Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice; trigonometrie

- Goniometrické funkce *sinus* a *kosinus* s reálným argumentem definujeme jako souřadnice bodů na jednotkové kružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic (pomocí x-ové, resp. y-ové souřadnice příslušného bodu jednotkové kružnice definujeme hodnotu funkce kosinus, resp. sinus).

- Funkce *tangens* a *kotangens* definujeme předpisy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\}.$$

- Výše uvedený přístup zobecňuje zavedení goniometrických funkcí pomocí pravoúhlého trojúhelníku (učivo ZŠ).

- Přímo z definic jednotlivých goniometrických funkcí plynou jejich základní vlastnosti. Všechny výše uvedené goniometrické funkce jsou *periodické*, základní perioda funkcí sinus a kosinus je 2π, funkcí tangens a kotangens π, tzn., že pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x.$$

  Funkce sinus, tangens i kotangens jsou *liché* (tzn. graf každé z těchto funkcí je středově souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadnic), funkce kosinus je *sudá* (tzn. její graf je osově souměrný podle osy y), tedy platí

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

- Při řešení goniometrických rovnic a nerovnic se zpravidla snažíme pomocí algebraických úprav za užití vztahů mezi goniometrickými funkcemi dostat rovnici či nerovnici, ve které se neznámá nachází ve stejném násobku v argumentu jediné goniometrické funkce. Někdy je rovněž výhodné řešenou rovnici či nerovnici převést do součinového tvaru, kdy na jedné její straně je nula.

- Tabulka znamének goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech:

	$x \in (0; \pi/2)$	$x \in (\pi/2; \pi)$	$x \in (\pi; 3\pi/2)$	$x \in (3\pi/2; 2\pi)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

- Tabulka monotonie goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech:

	$x \in (0; \pi/2)$	$x \in (\pi/2; \pi)$	$x \in (\pi; 3\pi/2)$	$x \in (3\pi/2; 2\pi)$
$\sin x$	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí
$\cos x$	klesající	klesající	rostoucí	rostoucí
$\operatorname{tg} x$	rostoucí	rostoucí	rostoucí	rostoucí
$\operatorname{cotg} x$	klesající	klesající	klesající	klesající

- V libovolném trojúhelníku platí tzv. sinová věta, kterou lze při obvyklém značení matematicky zapsat ve tvaru

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

  kde r značí poloměr kružnice opsané uvažovanému trojúhelníku.

- V každém trojúhelníku při obvyklém značení platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

  Toto tvrzení se nazývá kosinová věta. Speciálním případem kosinové věty v pravoúhlém trojúhelníku je pak věta Pythagorova (je-li úhel γ pravý, pak $\cos\gamma = 0$).

- Užitím goniometrických funkcí lze odvodit různé vzorce pro výpočet obsahu S trojúhelníku o stranách délek a, b, c, vnitřních úhlech o velikostech α, β, γ a poloměru kružnice opsané r, např.

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta,$$

$$S = \frac{abc}{4r}$$

  a tzv. Heronův vzorec

$$S = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

  kde $s = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$.

Úlohy:

1. S využitím definice (tj. pomocí jednotkové kružnice, nikoliv kalkulačky) vypočtěte

$$\sin\frac{41\pi}{6} - \operatorname{cotg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right).$$

2. Určete obor hodnot funkce

$$f:\ y = \frac{3 - 2\cos x}{\cos x}.$$

3. S využitím goniometrických vzorců, tj. aniž určíte x, vypočtěte $\sin x$, $\cos\frac{x}{2}$ a $\operatorname{cotg} 2x$, víte-li, že

$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \quad \text{a} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right).$$

4. Bez užití kalkulaček vypočtěte

$$\sin 11{,}25^\circ.$$

5. Vyjádřete

$$\sin 3x$$

   jako funkci $\sin x$ (tj. pomocí mocnin a násobků $\sin x$).

6. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

7. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC, kde a, b, c značí délky jeho stran, α, β, γ velikosti jeho vnitřních úhlů a S jeho obsah, platí
$$S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

8. Určete velikosti všech ostatních stran a úhlů trojúhelníku ABC, v němž platí

   a)
$$b = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm}, \qquad c = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\ \mathrm{cm}, \qquad \alpha = 30^\circ,$$

   b)
$$a - c = 12{,}86\ \mathrm{cm}, \qquad \beta = 47^\circ 39', \qquad r = 32{,}84\ \mathrm{cm},$$

   kde a, b, c značí délky stran, α, β, γ velikosti vnitřních úhlů a r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

9. Určete vzdálenost dvou nepřístupných míst M, N, jestliže byly zaměřeny z bodů A, B, které leží v téže polorovině vyťaté přímkou $\overleftrightarrow{MN}$, a jsou od sebe vzdálené 435 m, úhly
$$\begin{array}{rcccl} |\sphericalangle MAN| &=& \alpha &=& 62^\circ 10' \\ |\sphericalangle MBN| &=& \beta &=& 66^\circ 34' \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} |\sphericalangle NAB| &=& \alpha_1 &=& 41^\circ 23' \\ |\sphericalangle MBA| &=& \beta_1 &=& 34^\circ 52'. \end{array}$$

10. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \sin 2y = \cos y, \quad \sqrt{2\sin z} = -\sqrt{3}\tan z, \quad \mathrm{tg}\, 3u - \mathrm{cotg}\, 3u = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

11. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice
$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \mathrm{cotg}\left(2y + \frac{\pi}{6}\right) \geq 1, \quad \sin z + \sin^2 z \geq \cos^2 z.$$

12. Určete definiční obory funkcí
$$f(x) = \sqrt{1 - 2\cos x} \quad a \quad g(x) = \sqrt{\sqrt{3} - \mathrm{cotg}\, 2x}.$$

13. Nechť je dána funkce
$$f:\ y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 2.$$
Rozhodněte, zda je funkce f sudá nebo lichá, načrtněte věrně její graf (vyznačte v něm důležité body a případné prvky souměrnosti), vypočtěte všechny její průsečíky se souřadnicovými osami, stanovte její obor hodnot a rozhodněte, zda je funkce f periodická (pokud ano, najděte i její nejmenší periodu).

Výsledky úloh:

1. $\sin\frac{41\pi}{6} - \operatorname{cotg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} + \operatorname{cotg}\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$.

2. Předpis funkce f upravíme do tvaru $y = \frac{3}{\cos x} - 2$. Vzhledem ke skutečnosti, že $\cos x \in \langle -1; 1\rangle$, platí $\frac{3}{\cos x} \in (-\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty)$. Proto $H(f) = (-\infty; -5\rangle \cup \langle 1; \infty)$.

3. Pro všechna $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ platí $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ a $\cos\frac{x}{2} > 0$. Řešením rovnice $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{-\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{4}{3}$ za uvedených podmínek dostáváme $\sin x = \frac{4}{5}$, proto $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\frac{3}{5}$. Dále platí $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $\operatorname{cotg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{7}{24}$.

4. Platí $\sin 11{,}25^\circ = \sin\frac{22{,}5^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 22{,}5^\circ}{2}}$. Ale $\cos 22{,}5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, takže $\sin 11{,}25^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

5. $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x\cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = -4\sin^3 x + 3\sin x$.

6. Algebraickými úpravami lze levou stranu rovnice upravit do tvaru $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, tzn. rovnice je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je definována, tj. $x \neq \pi + 2k\pi$ a $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

7. Podle sinové věty platí $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$. V libovolném trojúhelníku navíc platí $\sin\gamma = \sin[180^\circ - (\alpha+\beta)] = \sin(\alpha+\beta)$. Uvážíme-li, že $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ a dosadíme-li $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, dostaneme dokazovaný vztah.

8. a) Podle kosinové věty vypočteme $a = 2$ cm. Pomocí sinové věty určíme úhel β, o kterém vzhledem k tomu, že nyní již známe délky všech stran trojúhelníku, víme, že je ostrý. Zjistíme, že $\beta = 45^\circ$ a dopočteme $\gamma = 105^\circ$.

   b) Pomocí sinové věty snadno vypočteme $b = 2r\sin\beta = 48{,}54$ cm. Na straně BC pak uvažme pomocný bod P takový, aby $|AB| = |BP|$. Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABP je rovnoramenný se zadaným úhlem β při hlavním vrcholu, můžeme určit velikost tupého úhlu $\sphericalangle APC$. Trojúhelník APC je nyní jednoznačně určen podle věty Ssu a úlohu lze dořešit užitím sinové a kosinové věty. Výsledky $a = 64{,}71$ cm, $c = 51{,}85$ cm, $\alpha = 80^\circ 12'$ a $\gamma = 52^\circ 09'$.

9. $|MN| = 625{,}5$ m.

10. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $z = k\pi$, $z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $u = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$, $u = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $z \in \left\langle\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

12. $D(f) = \left\langle\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$, $D(g) = \left\langle\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

13. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle 0; 4\rangle$, periodická s hlavní periodou $p_0 = 4\pi$, není ani sudá ani lichá, průsečík s osou y v bodě $[0; 3]$, průsečíky s osou x ve všech bodech, jejichž x-ovou souřadnici lze zapsat ve tvaru $x = \frac{8\pi}{3} + 4k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.