

Matematická logika

K základním pojmům logiky patří pojem **výroku**, který je na střední škole zaváděn intuitivně, stejně jako například pojem *množiny*: výrokem rozumíme sdělení, u kterého má smysl otázka, zda je, či není pravdivé.

Pokud bychom použili formulaci "výrok je oznamovací věta", u které umíme rozhodnout, zda je pravdivá, či nepravdivá, měli bychom problémy s určením pravdivostní hodnoty tvrzení typu "před deseti lety jsem se na první jarní den probudil v 7 hodin ráno", i když intuitivně cítíme, že jde o výrok. Důležitým kritériem, zda tvrzení je či není výrokem, je tedy skutečnost, že z hlediska jeho pravdivosti nastane právě jedna ze dvou možností (pravda nebo lež).

Úkolem samotné logiky zpravidla není určování pravdivostních hodnot jednoduchých výroků, pokud jejich pravdivostní hodnota závisí na jejich věcném obsahu; to je předmětem zkoumání příslušných vědních oborů. O pravdivostní hodnotě výroku "číslo 2 311 je prvočíslo" rozhoduje matematika jako vědní disciplína, v případě výroku "sinice jsou prokaryotní organismy" rozhoduje biologie. Logika zkoumá, jak závisí pravdivostní hodnota složených výroků na pravdivosti jednoduchých výroků, z nichž se složené výroky skládají.

Převádět věty běžného života do symbolického jazyka výrokové logiky není jednoduchá záležitost. Abychom se „po cestě neztratili“, domluvme se na určitých pravidlech postupu zpracování dané věty.

1. V dané větě určíme jednoduché výroky, ze kterých je věta tvořena a označíme je velkými písmeny ze začátku abecedy.
2. Rozmyslíme si a zapíšeme, o jaký druh složeného výroku se jedná. K dispozici mějme těchto pět možností:
konjunkce (logická spojka a zároveň \wedge);
disjunkce (logická spojka nebo \vee);
implikace (logická spojka jestliže...pak... \Rightarrow);
ekvivalence (logická spojka právě tehdy když \Leftrightarrow);
složený výrok, ve kterém se vyskytuje víc než jedna logická spojka.
3. Danou větu symbolicky přepíšeme pomocí písmen a logických spojek. K dispozici máme i symbol negace výroku \neg .

Tento postup „zpracování“ dané věty si budeme ilustrovat na několika příkladech. Nejprve věta s matematickým obsahem.

Dva kruhy jsou shodné právě tehdy, když mají stejné poloměry.

Při označení jednotlivých jednoduchých výroků

A ... dva kruhy jsou shodné

B ... dva kruhy mají stejné poloměry

Lze chápat uvedenou větu jako

ekvivalenci s logickou spojkou právě tehdy když \Leftrightarrow

a lze ji symbolicky přepsat

A \Leftrightarrow B

Druhá věta již nemá matematický obsah.

Hlupák, který nás pochválí, nám nepřipadá tak hloupý.

Při označení jednotlivých jednoduchých výroků

A ... hlupák nás pochválí

B ... hlupák nám nepřipadá tak hloupý

lze chápat uvedenou větu jako

implikaci s logickou spojkou jestliže...pak...⇒

a lze ji symbolicky přepsat

A ⇒ B

Další příklad:

Když se člověk redukuje na sebe sama, ztrácí se.

Jednotlivé jednoduché výroky volíme takto:

A ... člověk se redukuje na sebe sama

B ... člověk se ztrácí

Uvedený citát lze chápat jako **implikaci**

a lze ho tedy zapsat

A ⇒ B

Rozeberme ještě popsáním způsobem citát Platóna z Athén, řeckého filozofa, který žil 428 – 347 př. n. l.

Jinoch se stává mužem, když obejde kaluž, místo aby do ní vstoupil.

Při označení jednotlivých jednoduchých výroků

A ... jinoch se stává mužem

B ... jinoch obejde kaluž

C ... jinoch vstoupí do kaluže

lze chápat uvedený citát jako

složený výrok, ve kterém se vyskytuje víc než jedna logická spojka.

a lze jej symbolicky přepsat

(B ∧ ¬C) ⇒ A

Na dalším listě najdete k procvičení obdobné úkoly pro Vaši samostatnou práci.

Není zamilován, kdo nemiluje navždy.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako
Citát mohu symbolicky přepsat

Moudrostí je pozorování života, ne smrti.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako
Citát mohu symbolicky přepsat

Luk se láme, když je napjatý, ale duše ztrácí své síly nečinností.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako
Citát mohu symbolicky přepsat

Nemoc je svátkem pro lenochy, neboť nemusí za svou prací.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako

Citát mohu symbolicky přepsat

Láska je zdvojená touha a zdvojená touha se stává šílenstvím.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako

Citát mohu symbolicky přepsat

Když má někdo peníze, může být hloupý, jak chce.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako

Citát mohu symbolicky přepsat

I když se nedostává sil, již sama vůle je hodna chvály.

Jednotlivé jednoduché výroky volím takto:

Uvedený citát chápu jako

Citát mohu symbolicky přepsat