MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Bakalářská práce

BRNO 2020 **MARIKA KAŇOVÁ**

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Matematická logika ve výuce na středních školách

Bakalářská práce

Marika Kaňová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **Brno 2020**

Bibliografický záznam

Autor:	Marika Kaňová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita
Název práce:	Matematická logika ve výuce na středních školách
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Akademický rok:	2019/2020
Počet stran:	viii + 42
Klíčová slova:	Sbírka příkladů; Matematická logika; Neformální logika; Výroková logika; Výrok; Logické spojky

Bibliographic Entry

Author:	Marika Kaňová Faculty of Science, Masaryk University
Title of Thesis:	Mathematical logic in high-school teaching
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Mathematics with a view to Education
Supervisor:	doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Academic Year:	2019/2020
Number of Pages:	viii + 42
Keywords:	Exercise collection; Mathematical logic; Informal logic; Proposional calculus; Predicament; Logical couplings

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme logice jakožto učivu středních škol. Probíráme zde historii logiky jako vědy, rozdíly mezi formální a neformální logikou, zabýváme se také argumentací a pochopitelně také výrokovou logikou. Tedy výroky jednoduchými nebo složenými, jejich negacemi, spojeními a kvantifikacemi. Ve druhé části textu předkládáme příklady na procvičení učiva z výrokové logiky, to znamená úlohy na rozeznání výroků, jejich formální zápis, tabulky pravdivostních hodnot a s tím související úsudky o pravdivosti výroků. V poslední sekci se věnujeme netradičním příkladům, které nezapadají do osnov, zejména různé logické hádanky a úlohy z matematických olympiád.

Abstract

In this thesis we study logic as a subject of teaching in secondary schools. We discuss history of logic as a science, differences between formal and informal logic, we also deal with argumentation and proposional calculus as well. Namely, with simple and compound propositions, its negations, combining and quantifications. In the second part of this text we submit exercises to practice propositional calculus which means tasks of identifying the predicaments, their symbolical expression, truth tables and related assession of the truth value of those predicaments. In the last part we pursue unconventional problems, which are not included in the curriculum, especially logical riddles or tasks included in mathematical olympiads.

MUNI
SCI

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KOTLÁŘSKÁ 2, 611 37 BRNO
IČ: 00216224
DIČ: CZ00216224

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2019/2020

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Marika Kaňová
Program:	Matematika
Obor:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Geografie a kartografie se zaměřením na vzdělávání

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Matematická logika ve výuce na středních školách
Název práce anglicky:	Mathematical logic in high-school teaching

Oficiální zadání:
Cílem bakalářské práce je podat v první části výklad tématického celku Logika v rozsahu obvyklého středoškolského kursu - výroky a jejich negace, logické spojky, výrokové formy a jejich kvantifikace. V druhé části pak vypracovat vypracovat sbírku řešených příkladů, zadávaných jak formálně, tak ve formě slovních úloh.

Literatura:

VARGA, Tomáš. *Matematická logika pre začiatočnikov. 1*. Vyd. 1. Bratislava: Alfa, 1970. 193 s.

VARGA, Tomáš. *Matematická logika pre začiatočnikov. II*. Vyd. 1. Bratislava: Alfa, 1970. 280 s.

BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia :základní poznatky z matematiky*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. 178 s. ISBN 80-7196-146-9.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky.*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.

BIZÁM, György a János HERCZEG. *Zaujímavá logika : Sokszínü logika (Orig.)*. Translated by Karol Rovan. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1982. 421 s.

Jazyk závěrečné práce:	čeština
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.
Datum zadání práce:	26. 6. 2019
V Brně dne:	30. 10. 2019

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

....	....	....
Marika Kaňová **studentka**	doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat zejména vedoucímu mé práce doc. RNDr. Jaromíru Šimšovi, CSc. za podnětné rady a vstřícný přístup. Dále děkuji své sestře Haně Kaňové za jazykovou korekturu textu a všem, se kterými jsem měla možnost svou práci prodiskutovat.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 17. dubna 2020 ....

Marika Kaňová

Obsah

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$a \in A$	a je prvkem množiny A
$a \notin A$	a není prvkem množiny A
$A = \{a, b, c\}$	množina daná výčtem prvků
$A = \{x \mid V(x)\}$	množina prvků x splňujících podmínku $V(x)$
$A \cap B$	průnik množin A, B
$A \cup B$	sjednocení množin A, B
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$\neg A$	negace výroku A
$A \wedge B$	konjunkce výroků A, B
$A \vee B$	disjunkce výroků A, B
$A \Rightarrow B$	implikace výroků A, B
$A \Leftrightarrow B$	ekvivalence výroků A, B
$\forall a \in A \mid V(a)$	pro každé a z množiny A platí $V(a)$
$\exists a \in A \mid V(a)$	existuje a z množiny A, pro které platí $V(a)$
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	posloupnost prvků $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Úvod

Tématem této bakalářské práce je logika, zvláště pak ta matematická. Toto téma jsme zvolili zejména proto, že bývá ve školách opomíjena celá šíře jeho možností. Matematická logika prolíná všechna témata středoškolské matematiky, a to zejména v definicích a větách. Na mnoha středních školách se ale ani v dnešní době nedozvíme mnoho zajímavých a obohacujících informací, které nám logika poskytuje.

Cílem práce je tedy přiblížit větší spektrum možností, které nám logika propůjčuje, než poskytuje běžná středoškolská učebnice a nabídnout souhrn příkladů k procvičování v hodinách matematiky i mimo ně. V první části textu formou snadno přístupnou rozebíráme historii logiky, neformální logiku, matematickou logiku tak, jak ji známe z učebnic, ve druhé části uvádíme již zmíněnou sbírku podrobně řešených příkladů.

Zaměřujeme se zde na čtenáře, kteří se již v minulosti s logikou setkali a znají tedy základní pojmy formální logiky, jako jsou výrok nebo logické spojky, podobně jako symbolické značení s tím související. Text samotný je proto zamýšlen jako studijní materiál pro posluchače učitelství matematiky s možností využití v jejich budoucí profesní praxi.

Téma logika je na elementární a popularizační úrovni rozpracováváno mnoha autory, ať už českými nebo zahraničními. O neformální logice se lze dozvědět více například v knize *Logika pro střední školy* [6] od O. Seluckého, zájemci o podrobnější informace o formální logice by mohli najít poučení na stránkách L. Dostálové [12] a [13] zabývajících se výukou tohoto tématu a další, neobvyklé, příklady jsou k nalezení mimo jiné v knize *Jak se jmenuje tahle knížka?* [7] od R. M. Smullyana.

Zdůrazněme, že při přípravě bakalářské práce jsme se vůbec nezabývali matematickou logikou na vysokoškolské úrovni, jak byla třeba prezentována ve skriptech MFF UK *Matematická logika* autora P. Štěpánka. K soustavnému čtení a vážnému studiu je určena unikátní 400stránková monografie *Klasická matematická logika* sepsaná A. Sochorem.

Kapitola 1

Teoretický základ

1.1 Vznik, vývoj a členění logiky

1.1.1 Vznik logiky

Položme si na začátek otázku: „Kdy vznikla logika?“, nebo snad ještě jinak: „Jak vznikla logika?“, či možná: „Co je to vlastně logika?“ V běžném životě rozumíme pod pojmem logika jakousi myšlenkovou cestu, která vedla k daným závěrům. Chceme-li však definovat vědu s názvem logika, řekli bychom, že tato věda zkoumá právě způsob vyvozování závěrů. [19]

Jak ale logika vznikla? I zvířata se řídí podvědomými logickými zákony říkajícími snad: „Už jsem okousal tenhle keř, tak budu muset jít k jinému.“ Jenže právě od zvířat se lišíme jazykem, ve kterém dokážeme formulovat naše myšlenky a nápady. Dokážeme ale popsat tento jazyk? Co si představíme pod pojmem „jazyk“? Zkusme začít něčím jednodušším. Co je to „slovo“? Mohli bychom říci, že slovo se skládá z určitého počtu písmen a dokážeme jej skloňovat, časovat, umístit jej do věty? Dobrá. Řekněme tedy, že máme slovo „lalika“. Toto slovo se bude skloňovat podle vzoru žena a umíme vytvořit například větu: „Nevím si s lalikou rady.“ Naši definici toto slovo splňuje. Za existující bychom jej však neoznačili. Zkusme tedy naši definici doplnit o „význam“. Tedy slovo musí mít nějaký význam. Vezměme si tedy nyní kupříkladu slovo pes. Významem psa je bezesporu skutečné zvíře. Ale které z nich? Jedno zvíře, nebo všechna zvířata? Označíme-li slovem pes všechna tato zvířata, měli bychom pro pochopení celého rozsahu pojmu „pes“ znát všechna zvířata. Minulá, současná i budoucí. Ale každý si jistě dokáže představit celou řadu psů, tedy chápe význam tohoto slova. Řekněme proto, že významem slova pes je jakýsi souhrn vlastností, které dělají psa psem, tedy to, co je všem psům společné. Tento souhrn vlastností nazveme „pojem“ psa. Tedy významem slova je jeho pojem. Vraťme se nyní k naší definici. Slovo je tedy nějaký z písmen složený, napsaný nebo vyslovený celek, ke kterému patří jeho význam, kterým je pojem věci. [6, str. 14]

Vidíme jistě, jakou práci nám dalo definovat „slovo“. Pojmy jako věta, jazyk nebo řeč jsou tedy definovatelné jen velmi obtížně. Jazyk je totiž skutečnost, která má své vlastní zákony (je autonomní), a navíc si jej museli lidé sami vymyslet. Každý národ tedy hovoří jinou řečí. Je zřejmě více cest, jak vyjádřit jednu skutečnost. Z toho plyne, že jazyk a myšlení nejsou totéž. Jen pro ilustraci – máme různé typy jazyků (slovní, psaný, kreslený (jako ve hře Aktivity), znakovou řeč nebo pantomimu). Podívejme se dále na slova mnohoznačná (koruna, list, oko, ucho,...), různá vyjádření týchž myšlenek (myslím si – domnívám se, jsem unavená – chce se mi spát,...) nebo metafory (zlatý hřeb, studna informací, zub času,...). Je jasné, že jednu myšlenku jde vyjádřit mnoha způsoby, pod jedním slovem si lze představit více významů. Z těchto důvodů je někdy lepší používat cizí termíny, které jsou přesněji definované, než naše česká slova. Myšlení ale přesahuje jazyk například v intuici, kde skutečnost pochopíme, ale neumíme ji vyjádřit. Jedná se například o pocity nebo třeba barvy (je to pomněnkově modrá nebo blankytná, meruňková nebo lososová, nebo něco mezi tím?). Jedním z největších kamenů úrazu je již zmiňovaná mnohoznačnost. V okamžiku, kdy si pod jedním pojmem dva lidé představí něco jiného a snaží se o věci bavit, dochází k mnoha nedorozuměním a misinterpretacím. Zkrátka a dobře je lepší používané pojmy vysvětlit, než je poprvé zmíníme. V běžném rozhovoru to samozřejmě nebývá potřeba. Týká se to především osvětových přednášek a učených disputací, popřípadě politických projevů.

Jazyk je tedy prostředkem pro formulaci myšlenek. Přibližme si nyní proces myšlení, které může být nahodilé nebo vědecké. Vědecké se od nahodilého liší zejména v cílevědomosti, směřování úvah určitým směrem a ve zjišťování závěrů. Jakkoliv se to zdá zvláštní, žádný předmět zkoumání není zcela triviální. Příkladem může být červená skvrna. Můžeme zkoumat, na jakém podkladu byla vytvořena, jakou má velikost, tvar, odstín, sytost, je-li lesklá či matná, popřípadě je-li souvislá. A existuje mnoho dalších kritérií, které tu ani nezmiňujeme.

V tomto případě byl objekt dán, mohu jej tedy snadno popsat. V případě, že objekt není dán (jedná se o vzdálený nebo abstraktní pojem), musím se o něm dozvídat informace usuzováním. Pro představu si uveďme příklad $5 \cdot 7 = ?$. K výsledku musím zřejmě dojít usuzováním. Zcela jistě nemohu z tohoto řádku vyčíst odpověď pouze svýma očima. Co si tedy představit pod pojmem usuzování? Usuzování je zpravidla soustava premis (pravdivých nebo uznávaných) společně s pravidlem, podle kterého postupuji (Jestliže A, pak B. Platí A. — Tedy B.). Uvedený postup jistě funguje, i když ne stoprocentně. Zde je jeden z příkladů: „Pan X chodil vždy v neděli odpoledne do kavárny na rohu." Větu lze jistě přepsat do tvaru: „Jestliže je neděle odpoledne, pan X přijde do kavárny na rohu." Jenže jednoho nedělního odpoledne už pan X do kavárny na rohu nepřišel. Z tohoto důvodu se do usuzování, předpokladů a hypotéz míchá také pravděpodobnostní počet. Jak se s tím ale v životě vypořádat, když víme, že věda mnoho věcí právě takto jen odhaduje? Nutno říci, že věda je to nejlepší, co máme a v mnoha věcech je nepochybně užitečná. V těch ostatních situacích je jistě na místě použít kritické myšlení nebo selský rozum. Pojďme se ale nyní podívat na to, jak se logika vyvíjela.

1.1.2 Vývoj logiky

Již od samých počátků lidského vývoje se objevovaly první logické úsudky, zaznamenané zejména v příslovích, pranostikách a hádankách, navazující na každodenní zkušenosti s realitou. Jistě si dokážeme představit, že tato moudra se týkala především úrody, počasí, případně chování lidí a zvířat. Detailnější vhled do této disciplíny vnesl SOKRATES (469–399 př.n.l.), který se pomocí dialogu snažil navést své žáky k definování nějakého zdánlivě jednoduchého pojmu. Vybral si velmi často nějaký obecně známý pojem (miska, stůl, pes) a snažil se dopracovat k co nejpřesnější definici. Můžeme si jistě představit, jak takové dialogy probíhaly. Zcela jistě vyvstávaly otázky jako: „Co je to stůl?" „Stůl je čtvercová dřevěná deska se čtyřmi nohami." „Mám přítele, který má kulatý stůl." „Stůl je tedy dřevěná deska libovolného tvaru se čtyřmi nohami." „Myslím, že jsem viděl stůl o třech nohách, nejspíš i stůl o jedné noze." „Dobrá tedy. Stůl je ... " Nadšený čtenář si jistě dialog domyslí a třeba si zkusí sám definovat nějaký zdánlivě jednoduchý pojem. [6, str. 12–14]

Sokratův žák PLATÓN (428–347 př.n.l.) vyjádřil myšlenku *logického zákona*, kde existují jak božské zákony řídící pohyb hvězd a přírody, tak zákony řídící lidské myšlení. My lidé ovšem tyto zákony neustále porušujeme a tedy se mýlíme. Platón zastával myšlenku, že k racionalizaci myšlení je nutné zmíněné zákony dobře poznat a řídit se dále podle nich.

Logiku, jakožto vědeckou disciplínu, založil ve 4. stol. př.n.l. ARISTOTELES ZE STAGEIRY (384–322 př.n.l.). Chápal ji jako metodu správného vedení rozumu. *„Kostrou Aristotelovy logiky je* sylogismus*, nástroj, kde pomocí dvou známých pravd lze získat novou pravdu, závěr."* [3, str. 46] Mezi nejznámější příklady patří bezesporu následující: „Každý člověk je smrtelný." „Sokrates je člověk." Tedy „Sokrates je smrtelný." Pozor ale na chybné implikace, tzv. *sofismy*: *„Myš je slabika. Myš sežrala sýr. Tedy slabika sežrala sýr."* [3, str. 45] Aristoteles nás dále nabádá, abychom nepřipouštěli nesmysly, pak totiž můžeme odvodit cokoliv z čehokoliv. Také záměna implikace a ekvivalence nebo záměna protikladu a negace patří podle něj k neodpustitelným chybám. Zajisté můžeme říci, že věta: „Když bude tma, rozsvítím světlo," by dávala větší smysl pronesena takto: „Právě když bude tma, rozsvítím světlo." Nestane se totiž, že bude-li tma, já přesto nerozsvítím. Co se týče negace a protikladu: jestliže chci znegovat větu: „Všechny vrány jsou černé.", dostanu „Alespoň jedna vrána není černá." Protikladem původní věty bude ale spíše „Alespoň jedna vrána je bílá." V tomto případě jsou protiklady černá – bílá, ale co když na jednu z vran zrovna spadla plechovka s barvou a ona vrána je nyní modrá? Nebo červená? Proto nemůžeme obecně označit větu „Alespoň jedna vrána je bílá" za negaci původní věty.

Zajisté je vhodné zmínit také *logiku megariků a stoiků* (4.–2. stol. př.n.l.), obvykle nazývanou pouze *logika stoiků*, která se zabývala složenými výroky a výrokovými spojkami, zkoumala vztahy dále již nedělitelných výroků. Z historického hlediska nabyla tato část významu teprve až dlouho poté, a to na přelomu 19. a 20. století.

Logika středověku se zabývala zejména technickou stránkou, tedy různými postupy nebo mnemotechnickými pomůckami. Důraz byl kladen zejména na zapamatování operací a procesů. Tento myšlenkový proces se odvíjel ze soudobé výuky. Ta probíhala ve třech vrstvách - gramatika, rétorika a logika. Aby se obsah učiva přiblížil méně nadaným žákům, zúžila se logika právě na memorování postupů a nikoliv na rozvíjení myšlení. *„Ve svém tvůrčím období vypracovala logika středověku hlavně dvě významné teorie. V teorii tzv. supposotio, čili podkladu termínů, vyskytujících se ve výrocích, jde o to přesně vymezit význam daného termínu ve výroku. Například ve výroku „Housle jsou hudební nástroj" má termín „housle" přesný význam „housle obecně vzato". Naproti tomu řeknu-li „Rozbily se mi housle", podkládám témuž termínu „housle" jiný význam: „moje konkrétní housle". Teorie podkladu byla ve středověku velmi detailně vypracována za účelem vyhnutí se nedorozuměním a nepřesnostem, zvlášť v obtížných filosoficko-teologických diskusích. Druhou významnou teorií středověku je teorie tzv. consequentiae, čili podmínkových výroků typu: Jestliže,... pak... Současná matematická logika v ní nachází vypracování mnohých logických zákonů a formulí, o jejichž systematizaci sama usiluje."* [6, str. 118]

Renesanční logika je téměř zapomenuta a nahrazována rétorikou. Dilematem doby bylo mimo jiné přesvědčování, které jistě zvládne lépe rétor než logik. Aristoteles je nahrazován Cicerem a logika je nahrazována termínem *dialektika*.

Jednou z nejdůležitějších osobností vývoje logiky je bezesporu GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), jehož životním cílem bylo zpracovat dva projekty. První z nich nazval *lingua characteristica universalis*. Jednalo se o jakýsi univerzální symbolický jazyk, pomocí kterého bychom byli schopni vyjádřit veškeré poznatky symbolickým zápisem. Tyto symboly by měly přesně definovaný význam a jasně daná pravidla používání. Leibniz se inspiroval zejména matematikou a její precizností. Chtěl tento postup uplatnit i v jiných oblastech života, zejména ve filosofii a morálce, tedy tam, kde nejčastěji docházelo ke sporům. Cílem bylo předejít nedorozuměním a omylům. Druhý z projektů dostal název *calculus ratiocinator* a jeho účelem bylo dát každé myšlence takovou formu, aby bylo zřejmé, zda je pravdivá nebo nikoliv. Leibniz těmito projekty zavedl symboličnost jazyka a formální charakter matematických operací. Nutno dodat, že současná symbolická logika byla formována v polovině 19. století, a to nezávisle na Leibnizovi. Teprve dodatečně si tvůrci všimli podobnosti v jeho díle a přihlásili se k němu. Za svůj život Leibniz stihl projekty pouze teoreticky navrhnout a jejich realizaci přenechal dalším. Do logiky ale přispěl také *zákonem totožnosti*: $a = b$ znamená, že a má každou vlastnost, kterou má b a b má každou vlastnost, kterou má a. Čtenář může tento fakt považovat za samozřejmost, ale i takováto trivialita má v matematice velký význam, podobně jako ve starověku zavedení čísla *nula*. [3]

Na Leibnize navázali GEORGE BOOLE (1815–1864) a AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871), kteří zanedbali sémantickou stránku výroků a zaměřili se pouze na jejich obsah. Výsledkem jejich práce jsou De Morganova pravidla (zákony) pojednávající o negacích konjunkcí a disjunkcí výroků ($\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ a $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$) a také Booleova algebra, o které si nyní řekneme více.

Booleova algebra logiky vychází z podobnosti mezi algebrou a racionálním myšlením – v obou oblastech jde o snahu co nejpřesněji podchytit dosažené poznatky a co nejlépe je dokázat, aby se o nich již v budoucnu nemuselo diskutovat. Algebra však, narozdíl od myšlení, dokáže pracovat pouze se symboly, bez návaznosti na běžný jazyk. Také důkazy jsou v algebře prováděny podle přesných formálních pravidel, kdežto logika spoléhá také na intuici a obsah myšlení. Boole se proto snažil dát logice formu podobnou algebře. Začal tím, že klasifikoval algebraické symboly podle jejich funkce. Dále se snažil najít analogii s běžným jazykem a ve finále nalezené formy označil symboly stejnými nebo podobnými jako v algebře. V díle *Laws of thought* formuluje závěr takto: *„Všechny jazykové operace, považované za nástroj myšlení, mohou být uskutečněny pomocí systému symbolů, složeného z následujících prvků:*

1. *Symboly mající charakter písmen, např. x, y atd., které reprezentují věci, jež jsou předmětem našich pojmů.* (podstatná jména, přídavná jména, popisné výrazy)
2. *Operativní znaménka, např.* $+$, $-$, $\cdot$, *která reprezentují myšlenkové operace, jimiž jsou pojmy či myšlenky navzájem kombinovány tak, aby vznikly nové myšlenkové útvary složené z těchto prvků.* (a, nebo, kromě,. . . myšlenkové operace)
3. *Znaménko totožnosti,* $=$. (slovesa – všechna se dají převést do tvaru „být . . . “ kupř. běžím $\rightarrow$ jsem běžící)

Uveďme k těmto zákonům myšlení ilustrační tabulku podle [6, str. 144]:

Syntax algebraická	*Syntax logická*
$xy = yx$	*bílí lidé = lidé bílí*
$x + y = y + x$	*ovce a berani = berani a ovce*
$z(x + y) = zx + zy$	*evropští (mužové a ženy) = evropští mužové a evropské ženy*
$z(x - y) = zx - zy$	*evropští (mužové, ale ne ženy) = evropští mužové, ale ne evropské ženy*
$(x = y + z) = (x - z = y)$	*hvězdy jsou slunce a planety = hvězdy, kromě planet, jsou slunce”*

Výjimku tvoří zákon $x^n = x$, neboť vynásobíme-li například „všichni Evropani“ · „všichni Evropani“, nikdy nám nevyjde nic jiného, než „všichni Evropani“. V okruhu reálných čísel existují pouze dva případy, kdy je tento příklad v pořádku, a to $1^n = 1$ a $0^n = 0$. Boole tedy zavedl speciální druh algebry pouze s čísly 1 a 0 a dokázal, že zde platí komutativita a distributivita sčítání (sjednocení) a násobení (průniku). Touto algebrou byl vytvořen použitelný abstraktní kalkul.

Dalším významným logikem byl brněnský rodák KURT GÖDEL (1906–1978), který formuloval dvě věty o neúplnosti. Tyto věty potřebují hlubší základ z teorie množin, proto je zde pomineme.

V současné době se matematická (často též symbolická) logika někdy řadí mimo rámec matematiky, mnohdy má na univerzitách samostatné katedry, pořádají se logické kongresy, objevují se nové otázky této disciplíny, které občas vedou ke vzniku nových podoborů. Mezi jednu z mnoha jejích tendencí patří tzv. axiomatická metoda, která se zabývá konstruováním teorií, při kterém ovšem symboly nemají reálný význam. Ten se jim přisoudí teprve konkrétní interpretací.

1.1.3 Členění logiky

Jak jsme si již řekli, logika se zabývá zákony, formami a prostředky správného usuzování. Je členěna na velké množství podkategorií, které se různě prolínají. My ji budeme dělit na formální (matematickou) a neformální, dále vyčleníme logiku výrokovou a aristotelskou. Začněme nyní přiblížením obsahu formální a neformální logiky.

„Jako formální se označuje každý systém logiky, který se zaměřuje výhradně na formu tvrzení (a nikoliv na jeho obsah). To znamená, že pravdivost tvrzení nebo vztah vyplývání mezi tvrzeními zkoumá pouze natolik, nakolik závisí na formě tvrzení. V jistém smyslu byla formální již tradiční aristotelská logika. Důsledně formální však je až logika moderní. Aby byla forma tvrzení patrnější a přehlednější, pomáhá si formální logika používáním symbolů. A proto se jí také říká symbolická. Naopak neformální logika, jak už sám název napovídá, zůstává zcela na úrovni přirozeného jazyka a intuitivního myšlení. Prostředky, které nabízí, a problémy, které zkoumá, se netýkají ani tak přísně vědeckého odvozování, jako spíš běžného lidského způsobu uvažování. S tím pochopitelně úzce souvisí rozbory postupů argumentace a rétorika vůbec.“ [13]

Co se týče neformální logiky, argumentaci a běžnému způsobu uvažování se budeme věnovat v podkapitole 1.2.

Formální (matematická) logika se zabývá způsoby vedení důkazů, budováním teorií a s tím souvisejícími otázkami jejich axiomatizace, bezespornosti, úplnosti a rozhodnutelností. Jedná se zřejmě o exaktní vědu, která má jasně vymezené objekty a operace s nimi. Tato část logiky vznikla v návaznosti na třetí krizi matematiky. Ta vypukla na přelomu 19. a 20. století a byla zapříčiněna antinomiemi v tehdejší teorii množin. Mezi nejznámější antinomie patří Russelova (Všechny možné množiny X rozdělme do dvou množin: $A = \{X \mid X \in X\}$ a $B = \{X \mid X \notin X\}$. Do které z množin patří B?) nebo krokodýlovo dilema (Krokodýl sebral matce dítě. V případě, že mu matka správně odpoví na otázku, jestli jí dítě vrátí nebo ne, krokodýl jí ho vrátí. Jestliže odpoví špatně, krokodýl dítě sežere. Co se ale stane, když matka odpoví, že jí krokodýl dítě nevrátí?) a čtenář by jistě objevil mnoho dalších případů, kdy zůstává rozum stát.

Ve dvacátém století jako východisko z naznačené krize vznikla formální logika budovaná axiomaticky. Takový přístup k definování matematických objektů, jejich vlastností a vztahů nyní stručně objasníme. Mějme tedy nějaký systém objektů s jistými vlastnostmi, které jsou provázány vztahy. Místo toho, abychom definovali každý objekt, každou vlastnost, každý vztah zvlášť, určíme řadu přesných tvrzení, která náš systém splňuje. Tato tvrzení nazveme *axiomy*. Těmito axiomy jsou dále definovány všechny systémy objektů splňující daná kritéria. Obrazně řečeno: axiomy jsou síto, kterým propadnou jen ty systémy (lidí, národů, čísel,. . .), které splňují dané axiomy. Každé tvrzení odvozené dedukcí z axiomů nazýváme teorém a platí v každé interpretaci. Interpretací systému axiomů rozumíme dále každou skupinu objektů, která „propadla sítem“, tedy takovou skupinu, ve které jsou tyto axiomy pravdivé. Interpretace se mimo jiné používají také k důkazům bezespornosti a nezávislosti axiomů. V běžném životě totiž nemůžeme dokázat tvrzení i jeho opak, najdeme-li tedy interpretaci systému axiomů, je onen systém bezesporný. Nezávislost axiomů, tedy skutečnost, že nelze jedno ze zahrnutých tvrzení odvodit z ostatních, se dokazuje tak, že nalezneme interpretaci systému axiomů, kde místo daného tvrzení použijeme jeho negaci. Je-li zvolený axiom odvoditelný z ostatních, musel by být v novém systému přítomen jak on, tak jeho opak, což vede ke sporu. Můžeme-li tedy najít interpretaci nového systému, je i ten starý nezávislý.

Vraťme se ale k matematické logice. Jejími základními principy jsou: *princip identity, princip sporu* a *princip vyloučeného třetího*. Princip identity můžeme vyjádřit takto: „Dvě tvrzení jsou identická, shodují-li se všechny jejich vlastnosti“. Princip sporu prohlašuje, že nemůže platit tvrzení i jeho opak. Poslední z principů nám říká, že jsou-li dva výroky ve sporu, je pravdivý právě jeden z nich (z toho například plyne, že dvakrát znegovaný výrok nabývá původní pravdivostní hodnotu). V běžném životě se nám však velmi často stává, že tyto principy neplatí. Vezměme si už jenom odvěký boj mezi dobrem a zlem. Mezi těmito dvěma mezními hodnotami existuje mnoho mezistupňů, stejně jako mezi černou a bílou je mnoho odstínů šedé.

Segmentem matematické logiky je nejstarší aristotelská logika. Jejími základními stavebními kameny jsou *pojmy, soudy* a *úsudky*. Pojmy (slova) jsme si přiblížili v podkapitole 1.1.1, proto nyní již jen stručně. „Pojem“ je tedy to, co je míněno nějakým smysluplným slovem nebo slovním spojením, které samo o sobě vyjadřuje nějakou skutečnost. Pojmy samy o sobě jistě nemohou býti pravdivé nebo nepravdivé. Veškeré soudy a úsudky jsou dále tvořeny na základě vztahů mezi pojmy. Soudy konkrétně můžeme představit jako *„každou myšlenku (větu) o tom, že se věci mají tak a tak. Soudy vždy něco vypovídají (respektive popírají), a proto mají tu vlastnost, že jsou pravdivé nebo nepravdivé.“* [12] Aristoteles se však omezuje pouze na soudy *subjekt-*

-predikátové, tedy soudy tvaru subjekt je predikát (např. Sokrates je člověk). Jak jsme již zmínili v podkapitole 1.1.2, všechny jednoduché věty se dají převést do tohoto tvaru. Predikát může o subjektu něco vypovídat (Sokrates *je* člověk) nebo naopak něco nevypovídat (Dům *není* bílý). Jistě si uvědomíme, že soud může být pravdivý i nepravdivý v obou uvedených případech. Dále rozlišujeme soudy *obecné* (*Každý* člověk je živočich, *Žádný* člověk není čtvernožec) a soudy *částečné* (*Některý* člověk je hluchý). Mezi soudy existují následující vztahy:

- ze dvou odporujících si soudů je právě jeden pravdivý (Nebe je modré – Nebe není modré)
- ze dvou obecných soudů, které si navzájem protiřečí, může být nejvýše jeden pravdivý (Každý míč je bílý – Každý míč je černý)
- ze dvou částečných soudů, které jsou navzájem podprotivné, je alespoň jeden pravdivý (Některé houby jsou jedlé – Některé houby nejsou jedlé)
- vztah mezi obecnými a částečnými soudy: je-li obecný soud pravdivý, je pravdivý i částečný soud. Je-li částečný soud nepravdivý, je nepravdivý i obecný soud. (Každý delfín žije ve vodě – Delfín Sunny žije ve vodě; Někteří lidé mají modré oči – Všichni lidé mají modré oči)

Podívejme se ještě na poslední fundament aristotelské logiky, totiž na úsudky. *„Je to myšlenkový proces, ve kterém ze známých soudů odvodíme dosud neznámý závěr.“* [12] Úsudky se dále dělí na *sylogismy* (viz podkapitola 1.1.2) a na *obraty*. Ty můžeme ovšem použít jen ve specifických situacích: „Žádné S není P, tedy ani žádné P nemůže být S.“, „Některé S je P, tedy některé P musí být S“, „Každé S je P, tedy některé P musí být S.“ a „Žádné S není P, tedy některé P nemůže být S“. [12]

Nejvýznamnější částí formální logiky je logika výroková, které se podrobněji budeme věnovat v podkapitole 1.3. Výroková logika je často charakterizována jako logika zkoumající logické vztahy mezi výroky. Výrok definujeme jako tvrzení, o kterém má smysl rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Ptejme se sami sebe: můžeme rozhodnout, zda jsou následující věty pravdivé nebo ne? „Sněží?“ „Zavři, ať sem nenasněží.“ „Jéje, toto sněží.“ Jistě je tedy na místě brát v úvahu pouze oznamovací věty, a to dokonce jen některé. Například věty: „Ahoj“ nebo „Ano“ jsou zřejmě oznamovací a přesto nenesou hodnotu pravdivosti. Výroky dělíme na jednoduché a složené. Složené výroky vznikají za pomoci logických spojek z jednoduchých výroků. Ty jsou reprezentovány výrokovými proměnnými (obvykle značenými velkými písmeny), výrokové spojky jsou vyjádřením pravdivostní funkce. Tím, že výroková logika pracuje pouze s hodnotami pravda – nepravda, uplatňuje *princip dvouhodnotovosti* (každý výrok je buď pravdivý, nebo nepravdivý). Předpokládá se, že pravdivostní hodnota složených výroků závisí pouze na pravdivostní hodnotě jednoduchých výroků v nich obsažených (nikoliv na jejich obsahovém významu) a na přesně definovaných logických spojkách.

1.2 Neformální logika

1.2.1 Neformální logika a její úsudky

Jak už jsme zmínili, neformální logika nehledí tolik na formální stránku věci, ale spíše na tu obsahovou. Kde se formální logika pokouší o symbolické zápisy, tam se neformální logika kouká na běžný život, sílu zkušenosti a přesvědčovacích dovedností. Úsudky prováděné neformální logikou můžeme rozdělit do několika skupin.

První z nich je indukce. *„Indukce je úsudek, který na základě konstatování jisté vlastnosti u několika jedinců daného druhu vysloví obecný zákon: „Všichni jedinci tohoto druhu mají danou vlastnost.“* “ [6, str. 49] Přibližme si to nyní na příkladu: „Minulý týden jsem si na krájení mrkve vzala tupý nůž a řízla jsem se. Tento týden stejným nožem krájím okurek, takže se nejspíš také říznu.“ Problém nastává tehdy, kdy přehlédneme nějaký důležitý fakt. V tomto případě například fakt, že v pátek přišel můj bratr a všechny nože mi pečlivě nabrousil. Dalším zádrhelem je lidská svoboda. Používáme-li induktivní úsudky na přírodní zákony, je to zcela v pořádku. Lidské myšlení se ovšem vymyká kontrole. Takže přestože se 23. listopadu 1989 v Praze shromáždilo na 300 000 lidí a vláda po několika týdnech odstoupila, bylo možné, že se 23. června 2019 v Praze shromáždilo přes 258 000 lidí a vláda přesto neodstoupila.

Indukci můžeme rozdělit na úplnou a neúplnou. *Úplná indukce* je ve své podstatě vyjádření faktů. Například: každý žák třídy 4.C umí nakreslit kytičku. Jestliže chceme vědět, že je tato věta opravdu pravdivá, musíme její obsah experimentálně dokázat (aby se nám nestalo, že Jiřík místo kytičky namaluje dinosaura). Pokud ovšem nemůžeme všem jedincům přiřadit danou vlastnost, jedná se o *indukci neúplnou*. V běžném životě se nám ovšem často stává, že tato neúplná indukce je zaměňována s úplnou. Kupříkladu „zaškatulkování“ hodného nebo zlobivého žáka ve třídě, nebo rasová diskriminace – „Všichni Romové kradou“.

Chceme-li ovšem skutečně odvodit obecný zákon, nějakou pravidelnost, je třeba zajistit dostatečný vzorek s reprezentativními vlastnostmi, jejichž významnost musíme ovšem pečlivě zvážit, a jejichž původ musíme patřičně dohledat (např. je-li neschopnost naučit se matematiku zaviněna dyskalkulií nebo partou kamarádů s rozptylujícím vlivem – tedy je-li příčina odstranitelná nebo neodstranitelná). A dále je třeba zvážit, zda se pozorované vlastnosti vzorku vztahují na celou jeho populaci. Jak o tom svědčí humorná příhoda z Alp: *„Matematik, fyzik a inženýr letí v balónu nad Alpami, inženýr vykoukne přes okraj koše a vidí na hřebenu kamzíka, ukáže prstem a říká: „Koukejte, v Alpách žijí hnědí kamzíci!“ Fyzik ho opraví: „V Alpách žije alespoň jeden hnědý kamzík.“ Matematik opraví fyzika: „V Alpách žije alespoň jeden kamzík alespoň z jedné strany hnědý!“* “ Tomuto procesu, kdy z dostatečně reprezentativního menšího vzorku usuzujeme na celou populaci, se říká *statistická indukce*.

Dalším typem je *vědecká indukce*. Zatímco v oblasti přírodních a humanitních věd označuje pojem indukce způsob myšlení, který jsme si již popsali, v rovině filosofické se bavíme o indukci jako o předmětu zkoumání. Nejlépe tento filosofický problém znázorňuje Aristoteles, který zavádí pojem *přirozenosti*. Ten vyjadřuje, že si věci zachovávají stejnou strukturu, tedy stálý způsob činností (kočka mňouká, pes štěká). Následkem těchto pravidelností usuzujeme, že i zítra bude náš pes štěkat a sousedova kočka mňoukat. Ale je možné tento závěr udělat vždy? Na základě pravidelností a stálých vzorců chování? Ano, je. Důkaz však není konstruktivní, ale existenční.

To znamená, že i když nevíme, *jak* odvodit závěr, víme, že je to možné. [6, str. 55–56]

Samozřejmě nesmíme zapomenout ani na *matematickou indukci*. Jedná se o poněkud vyčnívající případ, protože se jedná o přesně daný postup s jasně danými pravidly, bez výjimek, který se ještě navíc dá vyjádřit axiomaticky. Jak tedy v matematické indukci postupujeme? Ukažme si to na příkladu. Mějme tvrzení: „Pro všechna přirozená čísla platí: $3 \mid n^3 + 2n$“. V prvním kroku matematické indukce dokážeme dané tvrzení pro první číslo (pro jedničku): $1^3 + 2 \cdot 1 = 3 \Leftrightarrow 3 \mid 3$, což platí. Indukčním předpokladem je v tomto případě, že tvrzení platí pro určité $m \in \mathbb{N}$. Nyní tvrzení dokážu pro $m+1$:

$$(m+1)^3 + 2(m+1) = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + 2m + 2 = (m^3 + 2m) + (3m^2 + 3m + 3)$$

První závorka je dělitelná třemi podle indukčního předpokladu a druhá závorka je dělitelná třemi, protože je součtem tří násobků čísla 3. Tedy jsme dokázali, že tvrzení opravdu platí pro všechna přirozená čísla.

Dalším typem úsudku je *deduktivní úsudek*. Jedná se o úsudek, kdy je-li něco dáno, něco dalšího je tím pádem již určeno. Můžeme zde uvést příklady jako sudoku, kde je-li dáno, že zde bude číslo 3, je tím také dáno, že číslo čtyři bude zase onde. Dalším příkladem budiž prohlášení: „Celá třída má jedničku.“, z čehož plyne, že Káťa, žačka této třídy, dostala jedničku. *„V našem příkladu je nutnost vyplývání závěru z předpokladu založena na principu, který má v logice klasický název „dictum de omnī et nullō“; znamená to „pravidlo o každém a žádném“. Říká toto: „Co platí o všech, platí i o každém jednotlivci zvlášť. Co neplatí o nikom, neplatí ani o žádném jednotlivci zvlášť.““* [6, str. 62] Důležité je ovšem také, abychom při dedukci neužívali dalších předpokladů. To je důležité zejména pro formalizované axiomatické systémy dnešní logiky.

Cílem deduktivního usuzování je však nejen vyslovení závěru, ale také jeho odůvodnění. Odůvodněný závěr je možné v tomto případě udělat dvěma způsoby. *Přímý závěr* indikuje, že z premis přímo vyplývá (11 je prvočíslo, tedy není dělitelné pěti), *nepřímý závěr* nevychází z premis, ale z popření závěru. Ukažme si to na příkladu. *„Detektiv chce dokázat, že vrah měl tmavý oblek. Uvažuje: „Dejme tomu, že vrah měl naopak světlý oblek. Pak by ho ale svědkové i za šera museli vidět. To je však v rozporu s jejich výpověďmi. Proto musel mít vrah tmavé oblečení.““* [6, str. 68] Metoda nepřímého usuzování bývá také nazývána jako důkaz sporem.

Metoda protipříkladu je zase způsob, jak tvrzení vyvrátit. Jde o dokázání nepravdivosti obecného tvrzení pomocí konkrétního příkladu. Ilustrujme si to takto (A, B, C jsou libovolné pojmy):

Předpoklady:	Všechna A jsou C.
	Všechna B jsou C.
Závěr:	Všechna A jsou B.

Lze jistě najít mnoho protipříkladů. Zmiňme si tady alespoň tento: Z tvrzení, že všichni lidé jsou živočichové a všechny opice jsou živočichové, jistě neplyne, že všichni lidé jsou opice.

1.2.2 Argumentace

Druhů argumentace je mnoho, mají však společný cíl: přesvědčit oponenta o správnosti našeho tvrzení. Na začátek bychom měli objasnit rozdíl mezi pojmy *argument* a *důvod*. Důvodem se snažím podložit své činy, argumentem se snažím přesvědčovat. Je nasnadě, že argumentace se může velmi rychle zvrhnout ve vydírání, tedy argumentaci výhrůžkou. Začněme ale jinak. Existuje zajisté korektní a přiměřená argumentace, kdy si oponenti vymění logické (popř. citové) argumenty a bez zbytečných okolků se dohodnou na závěru, ať už tezi jednoho, druhého, či zvolí možnost kompromisu. V praxi se však bohužel častěji setkáváme s argumentačními úskoky a podrazy. Zmiňme alespoň některé z nich.

Citová argumentace je velmi snadno zneužitelná, zejména pokud si je osoba vědoma svého vlivu. Tento typ argumentace často nesouvisí s tématem, i když si jistě dokážeme představit situace, kdy je citová argumentace zcela na místě („Radši bych šla do zoo než na hokejový zápas.“) Je velmi důležité si říci, nakolik je argument oprávněný. Při posuzování vhodnosti této argumentace se zaměřujeme zejména na blízkost citové oblasti od předmětu diskuze, na způsob použití (dotčená, prosebná formulace, mimika, ignorace, slzy, nářek, v některých případech až psychosomatické onemocnění, jako je například bolest hlavy) a na účinnosti argumentu (ta zpravidla závisí na projevu, citlivosti oponenta a na vzájemném vztahu protivníků). S tím úzce souvisí *argumentace holí* (výhrůžkou), která je spíše extrémním případem, než samostatnou kategorií. [6, str. 87]

Další chybou v argumentaci je poupravení teze, kterou se snažíme obhájit. Jedná se zejména o zdramatizování dopadu teze, který posléze vyvracím argumentací, další metodou je tvrdit o něco málo víc, než tvrdí původní teze, která se pak snáze vyvrací, a nakonec tvrdit o něco méně, než tvrdí původní teze, ta se potom lépe obhajuje. V řadě chyb stojí také jakési nesmyslné zobecnění (někteří malíři dosáhnou slávy až po smrti → všichni malíři dosáhnou slávy až po smrti). V dalším případě je použit *argument z autority* – jak tvrdí . . . (Platón, Eukleides,. . .).

Velkou kategorií je *argumentace ad populum*, tedy argumentace k lidu, která využívá existence nějaké skupiny, jejího názoru a náležitosti jedince k ní. Cílem je, aby jednotlivec přijal názor skupiny, účastnil se jejích aktivit a hájil její zájmy. Tato argumentace může být jak pozitivní (jsem hrdý, že jsem skaut, Čech,. . .), tak negativní (když to neuděláš, tak nejsi jeden z nás; výhrůžky násilím, prozrazením tajemství,. . .).

Jiným druhem je *argumentace ad hominem*, neboli argumentace k člověku. Zatímco *argumentace ad rem* hovoří věcně a k tématu, argumentace ad hominem se zaměřuje na získání přízně konkrétního člověka. Nemusí se v tomto případě jednat pouze o argumenty k věci, jako spíš o argumenty, které vzbudí sympatie osoby. Jde tu především o lichocení, apel na stejné zájmy nebo sounáležitost. Není výjimkou ani použít různé argumenty vůči různým lidem, aby se dosáhlo vytyčeného cíle. [6, str. 105–108]

Zdůrazněme závěrem dvojí směr, kam se cílí pozornost argumentujícího. Ten se zaměřuje na:

a) obsah teze – zde může dojít ke klamu nebo omylu na čtyřech frontách: slovní vyjádření (metafory, víceznačnost,. . .), argumenty (mohou být nepravdivé, částečně nebo cele, a přesto předkládány jako vědecky podložené), teze (proměna, zveličení,. . .) a plynutí teze z argumentů (nakolik opravdu argumenty podporují danou tezi),
b) člověka – snaha získat sympatie, najít mezeru v obraně, argumentace se obrací na fyzickou i duševní zranitelnost jedince (jsi mi sympatický, tak ti vyhovím), na vlastnosti a názory jedince nebo na ztotožnění jedince se skupinou.

1.2.3 Logika v různých oblastech života

Na tomto místě bychom zmínili některá odvětví běžného života, která se řídí (alespoň částečně) podle jednoznačných logických pravidel. Řekneme si něco o logice reklamy, vlivu a moci, umění a nakonec zmíníme historiografické myšlení.

Jestliže je tedy logika vědou zabývající se lidským myšlením, je jasné, že logika reklamy je jistě její částí. Prodejci se snaží naladit se na myšlení kupujících, aby na ně co nejvíce zapůsobili. Základní taktikou je opakování. Reklamu uvidíte v televizi, na bilboardu, v tramvaji, na sociálních sítích, uslyšíte ji v rádiu. Jak říká prastaré úsloví: „Opakování je matka moudrosti“. Čím častěji reklamu zaznamenáváme, tím více si ji pamatujeme, a tím více máme pocit, že produkt známe. A právě známé produkty nakupujeme spíše, než ty neznámé. Jeden příklad za všechny: Můj táta se často koukal na francouzské filmy, ve kterých se jako aperitiv objevuje alkoholický nápoj Pastis. Na výměnném pobytu ve Francii se stavil v jedné restauraci a co si nedal jako aperitiv? S reklamami se setkáváme také v průběhu projekcí filmů. Jistě již jsme nesčetněkrát zažili, že v televizi je film v nejnapínavějším místě přerušen sérií reklam, které nás ale ani trošku nezajímají. Přesto je přetrpíme, abychom se dozvěděli, jak film skončí. Tímto způsobem nás prodejci nutí shlédnout jejich reklamy, které si často zapamatujeme (tatáž reklama se objeví třeba třikrát i víckrát během filmu). Dříve reklamní agentury braly člověka jako spíše racionálního a podkládaly mu argumenty, „proč zrovna tento prací prášek je nejlepší“. Dnes se reklama zaměřuje spíše na city. Málokdy už vidíme důvody, spíše je nám předkládán smyslový zážitek – ústa, kterými chutná čokoláda, dotek čerstvě vypraného prádla nebo nos, který voní víno. Dalším způsobem, jak zaujmout cílového zákazníka, je útěk od tématu. Reklama začne například dřevorubcem s motorovou pilou a končí u piva s kamarády. Divák se ze začátku snaží odhadnout, co tato reklama předvádí, je zaujat a více si toho zapamatuje. Dalšími strategiemi ovlivnění nakupujících je například umístění polic s pečivem na konec prodejny, aby zákazník musel projít celou řadou regálů, a to tam i zpátky, tak, aby byl co nejvíce navnazen koupit něco dalšího, než jen pečivo.

Logika vlivu a moci nás odkazuje na způsob, jakým volíme své politiky a zástupce. Jak tedy jeden člověk získá vliv na řadu druhých? Je pro začátek možné něco přislíbit. Lidé mají touhu věci vlastnit. Nemají-li tedy jinou možnost, jak věc získat, podpoří toho, kdo jim tuto věc slíbí do budoucna. Další možností je intelektuální autorita – pokud tento člověk toho o daném tématu ví víc, než já, tak mu budu důvěřovat. Velkou roli hrají také politické cíle a plány. Chceme-li zaujmout prostého člověka, je vhodné formulovat své cíle konkrétní (ty budí dojem splnitelnosti), přesně definované (ty přesvědčují o jasných idejích tvůrce), vypadající jako prostředek k dosažení cíle, které zastávané s neochvějnou jistotou jsou základem pro image silné politické osobnosti. Dalším krokem je bezesporu formulovat vše tak, aby tomu i prostý člověk rozuměl (alespoň zdánlivě), neboť právě porozumění řeči je často kamenem úrazu. [6, str. 178]

Mezi další odvětví, ve kterém vidíme strukturu myšlení, je umění. Dnešní umění se může leckomu zdát velmi abstraktní. I přesto v něm nacházíme spoustu zákonů a pravidel, které lidský mozek jistě nepřekvapí. Vezměme si například čáru. Obyčejnou vodorovnou čáru. Taková čára vyjadřuje klid, harmonii, rovnováhu. Svislá čára indikuje dynamiku a šikmá čára srší akcí a energií. Zkuste si sami vzít čistý bílý papír, plný nekonečných možností, čekající na váš další krok, a energickým pohybem udělejte šikmou čáru. Je v tuto chvíli možné začít malovat letní krajinku? Klidnou hladinu moře? Spíš se nám v tuto chvíli podaří zobrazit vzlétající letadlo nebo silný vítr. V umění se ale velmi často pracuje s geometrickými obrazci. Ať už se jedná o zobrazování kachliček na podlaze nebo o malby stropů, aby se jevily vyšší než doopravdy jsou, nebo o další optické klamy.

Dějiny lidstva i jednotlivých kultur a národů mají jistě svou logickou návaznost. Ale kromě toho, že je historie vykládána různě, je různě i zapisována. Podíváme-li se na záznamy historických knih, jistě nás to nepřekvapí. Jedná se o rozdíly ve vnímání samotných autorů nebo o způsob, jakým se snaží zapůsobit na čtenáře. Jak o tom svědčí například trojí hodnocení založení Karlovy univerzity, a to z pohledu Karlova životopisce, který vyzdvihuje kulturní aspekt, vzdělávací hodnotu a pohled do budoucna, z pohledu politika, který chválí vyzdvihnutí Prahy po stránce mezinárodní politiky, a z pohledu básníka, který popisuje veselí, hudbu a radost obyčejných lidí. [6, str. 189–191]

1.2.4 Logika ve školské výuce

Před sedmdesáti lety se logika na školách vyučovala velmi spoře, spíše jako odvětví filosofie. Na dnešních středních školách se prvky logiky objevují při výuce přírodovědných a humanitních předmětů v různé šíři i intenzitě. Matematika je bezesporu tím předmětem, v jehož hodinách se formální logika užívá nejhojněji. Měla by prolínat výuku všech tématických celků tohoto předmětu. Tak bude výuka matematiky plnit nejen samotnou funkci *vzdělávací* (učitel by měl umět žákům odpovídat na otázky typu: „K čemu mi budou kvadratické rovnice?“), ale i funkci *výchovnou*, totiž rozvíjet následující dovednosti potřebné nejen v matematice: dokázat myslet abstraktně, činit logicky správné závěry, umět se přesně vyjadřovat, posuzovat úplnost a bezespornost úvah (ať už vlastních, či jiných osob). Jako užitečný příklad konkrétního projevu zmíněného abstraktního myšlení uveďme dovednost používat písmena v roli konstant či proměnných a pomocí nich zapisovat slovně vyjádřené vztahy algebraickými výrazy. [3, str. 50–51]

Na matematickou logiku by učitelé měli dbát ve všech hodinách matematiky, vždyť většina matematických pouček má formu složených výroků se standardními logickými spojkami a zastoupené proměnné v nich zpravidla bývají kvantifikovány. Několik vyučovacích hodin matematiky je v tématických plánech pro 1. ročník gymnázií a některých dalších středních škol věnováno přímo základům matematické logiky, jejichž osvojení je nezbytné k tomu, aby žáci správně chápali obsah výsledků v dalších tématických okruzích. Přehledu tohoto učiva logiky věnujeme následující podkapitolu 1.3, zatímco četné příklady na procvičení tohoto učiva budou náplní kapitoly 2, stěžejní části celé naší práce.

Na jistém gymnáziu použili k zaujetí žáků logikou následující metodu: *„Když například na matematický kabinet zaklepal žák a zeptal se, zda je v kabinetě profesor X, dostal kladnou odpověď a dveře se zavřely. Žák tedy zaklepal znovu a řekl: „Pane profesore, mohl byste mi zavolat profesora X?“ Opět dostal kladnou odpověď a dveře se zase zavřely. Až do třetice všeho dobrého se žákovi podařilo zformulovat svoji prosbu náležitě: „Pane profesore, prosím vás, zavolejte mi pana profesora X.“ Učitel s úsměvem řekl: „Velmi rád“ a kolegu X zavolal.“* [3, str. 51]

Zpravidla panuje názor, že je pochopitelnější, když žákům objasníme myšlenky vývoje logiky, než že jim naservírujeme výsledky, které do sebe prakticky nezapadají. Je vhodné žákům osvětlit rozdíl mezi obsahovou a formální stránkou věci, říci jim, že tato formální stránka se zaměřuje pouze na pravdivostní hodnotu, která nezaručuje, že z prvního výroku lze dokázat druhý, a tedy nemá cenu se snažit dokázat například: „$2+7=9 \Rightarrow$ tráva je zelená“. Běžně používáme ale obsahovou stránku logiky, spojované výroky spolu blízce souvisí a jsou vázány kauzalitou.

Argument, že matematika rozvíjí logické myšlení slyšíme ze všech stran. Logické myšlení je ale rozvíjeno také výukou jazyků či historií. Nutno ovšem dodat, že matematika je k tomuto účelu nejvhodnější a nabízí nám spoustu věcí, nad kterými můžeme žasnout, nabízí nám různé myšlenkové konstrukce, užitečné vztahy a neobvyklé postupy. Byla by škoda tuto výhodu zahodit. [3, str. 50]

1.3 Formální logika v učivu matematiky

V této podkapitole podáme stručný výčet pojmů a poznatků z formální logiky, které jsou součástí gymnaziálního učiva matematiky v dnešní době. Náš přehled není zamýšlen jako učební text pro žáky při prvních hodinách výuky tohoto učiva. Na to je příliš stručný, bez podrobnějších komentářů a ilustrativních příkladů, a není ani striktně systematický – některé logické spojky užíváme před odstavci, ve kterých je formálně zavádíme. Text je tedy určen spíše samotným učitelům pro jejich orientaci v tématu a „na druhé čtení“ pouze vynikajícím žákům s hlubším zájmem o logiku. Obsahuje totiž i některé poznatky a postupy, které rámec gymnaziálního učiva přesahují.

1.3.1 Výroky a jejich negace

V předchozím textu jsme se už zmínili o pojmu *výrok*. Na středních školách ho definujeme pouze intuitivně (podobně jako pojem *množina*): je to sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé. Ve formální logice značíme výroky velkými písmeny, se kterými dále pracujeme namísto původních výroků. Tato substituce je zcela na místě, neboť jak již bylo řečeno, formální logika se zabývá formou, spíše než obsahem sdělení. Pravda nebo nepravda výroku se označuje termínem *pravdivostní hodnota* a symbolicky se značí čísly 1 (pravda) a 0 (nepravda).

Je důležité zmínit, že kupříkladu „$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$“ není výrok. Nevíme totiž, co znamenají proměnné a a b, jedná se tedy o *výrokovou formu*. Výrokem rozumíme až spojení: „Pro všechna $a,b \in \mathbb{R}$ platí: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$“.

Jedním z nejdůležitějších pojmů je *negace* výroku. Negace je unární operace obracející pravdivostní hodnotu výroku na opačnou. Značí se symbolem „$\neg$“ a dílčím úkolem logiky je znegovat výrok bez použití spojení: „není pravda, že. . . “, tedy převést negaci výroku do pozitivní formy. Čtenář si jistě uvědomí, že dvojnásobná negace nemění pravdivostní hodnotu výroku, tedy $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$. Formálně to dokážeme tabulkou pravdivostních hodnot:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
1	0	1
0	1	0

Jak jsme uvedli v podkapitole 1.1.2, je nutné rozlišovat protiklad a negaci. Negací výroku „Ebenové dřevo je bílé“ je tedy zřejmě „Ebenové dřevo není bílé“ a nikoliv „Ebenové dřevo je černé“.

Ve výrokovém počtu rozlišujeme dva druhy výroků – jednoduché a složené. *Jednoduchý výrok* je taková věta, kterou již nelze dále rozdělit na smysluplné celky. *Složený výrok* je tvořen dvěma nebo více jednoduchými výroky užitím logických spojek. Složenému výroku říkáme *tautologie*, je-li pravdivý, ať jsou pravdivostní hodnoty zastoupených jednoduchých výroků jakékoliv. Naproti tautologii stojí *kontradikce*, která je za každých okolností nepravdivá. Jako příklad tautologie uveďme výrok $A \vee (\neg A)$ s tabulkou pravdivostních hodnot:

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
1	0	1
0	1	1

1.3.2 Konjunkce a disjunkce

Logické spojky *konjunkce* a *disjunkce* patří mezi binární operace na množině výroků. Poznáme je ve slovně vyjádřených výrocích po řadě podle spojek „a, i, a současně“ a „nebo“ a značíme je „$\wedge$“ a „$\vee$“. Tyto spojky jsou definovány následující tabulkou:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Vidíme, že konjunkce je pravdivá, právě když jsou oba výroky pravdivé, zatímco disjunkce je pravdivá, právě když je pravdivý alespoň jeden z výroků. Přestože se v učebnicích běžně neuvádí, zmiňme si také *disjunkci ve vylučovacím smyslu*. Odpovídá větné konstrukci „buď. . . , nebo. . . “, někdy se značí symbolem „$\triangledown$“ a formálně je definovaná takto:

A	B	$A \triangledown B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

V šíři běžného užívání a standardního značení však zvítězila disjunkce v nevylučovacím smyslu. Je tomu tak zejména proto, že současná matematika používá množinový jazyk, kde definujeme základní operace sjednocení a průniku množin právě užitím spojek $\wedge$ a $\vee$:

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N \qquad\qquad x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M \vee x \in N$$

Ve sjednocení dvou množin se tedy každý prvek nachází alespoň v jedné z množin, nikoliv buď v jedné, nebo druhé. Kromě toho je pomocí disjunkce v nevylučovacím smyslu snazší vyjádřit negaci konjunkce (a s tím související negaci disjunkce), a to takto:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \qquad\qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Důkazem těchto *De Morganových pravidel* je následující tabulka:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Zdůrazněme ještě, že obě operace „$\wedge$“ a „$\vee$“ jsou zřejmě komutativní. Méně zřejmé jsou dva distributivní zákony, kterými jsou tyto dvě operace navzájem svázány, totiž

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad\qquad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

První zákon nyní dokážeme pomocí tabulky, druhý pak odvodíme z prvního užitím de Morganových pravidel.

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Vidíme, že pravdivostní hodnota obou zkoumaných výroků je vždy stejná.

Důkaz druhého zákona nyní provedeme tak, že uvážíme negace obou posuzovaných výroků:

$$\neg\big(A \vee (B \wedge C)\big) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg(B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \wedge (\neg B \vee \neg C) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C),$$
$$\neg\big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big) \Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg(A \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C).$$

Z toho jasně vidíme, že negace obou stran ekvivalence se dají upravit do totožného tvaru, tedy mají stejné pravdivostní hodnoty. Ekvivalence $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ proto platí.

1.3.3 Implikace a ekvivalence

Stejně jako konjunkce a disjunkce, jsou i logické spojky *implikace* a *ekvivalence* binárními operacemi. V psaném projevu je poznáme podle spojek „Jestliže. . . , pak. . . “ a „. . . právě tehdy, když. . . “ a značíme je symboly „$\Rightarrow$“ a „$\Leftrightarrow$“. Definuje je následující tabulka:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Vidíme, že implikace $A \Rightarrow B$ platí vždy s výjimkou případu, kdy platí A a neplatí B. Zdůrazněme tedy, že implikace $A \Rightarrow B$ formálně platí, pokud A neplatí. To sice poněkud neodpovídá užití implikace v běžném jazyku, ale má to v matematice velký význam. Například implikaci „$x > 3 \Rightarrow x > 1$“ považujeme za platnou pro každé číslo x, přitom hodnoty $x = 2$ a $x = 0$ odpovídají třetímu, resp. čtvrtému řádku definiční tabulky.

Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je podle definiční tabulky pravdivá pouze tehdy, když oba výroky A, B mají stejnou pravdivostní hodnotu. Jedná se o konjunkci dvou implikací $A \Rightarrow B$ a $A \Leftarrow B$, na což poukazuje i symbol ekvivalence, vzniklý spojením právě dvou šipek $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$. To se dá vyjádřit tautologií

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$$

a dokázat následující tabulkou:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Implikaci $B \Rightarrow A$ nazýváme *opačnou* k implikaci $A \Rightarrow B$. Jak vidíme ze třetího a čtvrtého sloupce předchozí tabulky, původní a opačná implikace nejsou logicky ekvivalentní. Třetí řádek pravdivostních hodnot totiž ukazuje, že implikace $B \Rightarrow A$ *neplyne* z implikace $A \Rightarrow B$. Kromě toho nás tabulka vede k závěru (neobvyklému pro neformální logiku), že totiž z libovolných dvou navzájem opačných implikací je vždy alespoň jedna pravdivá.

Implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$ nazýváme *obměněnou* implikací $A \Rightarrow B$. Jak slovo obměna napovídá, původní a obměněná implikace logicky vyjadřují totéž, tj. mají vždy stejnou pravdivostní hodnotu. Tuto skutečnost, která hraje v matematice významnou roli *nepřímých důkazů*, vyjádříme tautologií

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Její důkaz plyne z úvahy, ve kterých případech posuzované (navzájem obměněné) implikace *neplatí*. Jak jsme uvedli výše, pro implikaci $A \Rightarrow B$ je to jedině případ, kdy platí A a neplatí B. Podle téhož pravidla je to pro implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$ jedině pro případ, kdy platí $\neg B$ a neplatí $\neg A$, tj. kdy neplatí B a platí A. Vidíme, že u obou implikací jde o stejný případ vymezený konjunkcí $A \wedge \neg B$, tudíž důkaz jejich ekvivalence je hotov. Zároveň jsme vymezením jediného případu, kdy neplatí implikace $A \Rightarrow B$, odvodili důležité *pravidlo pro negaci implikace*:

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$$

Rovněž *pravidlo pro negaci ekvivalence*

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow B)$$

zdůvodníme úvahou: negace ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ platí, právě když výroky A a B mají různou pravdivostní hodnotu. To nastane, právě když výroky $\neg A$ a B mají stejnou pravdivostní hodnotu, tedy právě když jsou ekvivalentní.

Vraťme se ještě k problematice implikací a uveďme jednu jejich významnou vlastnost. Ta je obecně označována termínem *tranzitivita* a v případě implikací je vyjádřena tautologií

$$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Stejně jako předchozí pravidla, i tuto implikaci dokážeme úvahou. Její pravá strana $A \Rightarrow C$ neplatí v jediném případě, kdy platí A a neplatí C. Proto nám k důkazu stačí ukázat, že tehdy rovněž neplatí ani konjunkce z levé strany celé implikace, že tedy neplatí alespoň jedna z implikací $A \Rightarrow B$ nebo $B \Rightarrow C$. Skutečně: platí-li B, neplatí $B \Rightarrow C$; neplatí-li B, neplatí ani $A \Rightarrow B$.

Díky dokázané tranzitivitě zapisujeme konjunkci několika na sebe navazujících implikací

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge \cdots \wedge (Y \Rightarrow Z)$$

zjednodušeným způsobem jako řetězec

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \ldots \Rightarrow Y \Rightarrow Z,$$

který znamená, že platí rovněž implikace $A \Rightarrow Z$. Takový řetězec implikací je v matematice podstatou *přímých důkazů*.

1.3.4 Výrokové formy a kvantifikátory

Pod pojmem *výroková forma* rozumíme sdělení, které má tvar výroku, avšak některé jeho prvky nejsou konkrétní, tj. jsou zaměněny symboly (nejčastěji písmeny) v roli proměnných. Z výrokové formy se tedy stane výrok, až za všechny proměnné, které obsahuje, dosadíme konkrétní prvky (nejčastěji čísla, množiny, geometrické útvary, apod.). Výrokovou formu V s jednou proměnnou x budeme značit $V(x)$, výrokovou formu se dvěma proměnnými x, y zapisujeme $V(x,y)$ atd.

Druhý způsob, jak se z výrokové formy stane výrok, je postup, kdy stanovíme, pro kolik hodnot proměnných daná výroková forma platí. Mohou to být konkrétní počty (např. 3), nebo „nekonečně mnoho“, nebo odhady počtů, kupř. „alespoň 8“ nebo „nejvýše 42“. Uvedenému způsobu přeměny výrokové formy ve výrok se říká *kvantifikace*.

V samotné matematice se kvantifikace často realizuje pomocí tzv. *kvantifikátorů*. Nejvýznamnější z nich jsou *obecný kvantifikátor* „$\forall$“ (čteme „pro všechna“, „pro každé“) a *existenční kvantifikátor* „$\exists$“ (čteme „existuje“, „existuje alespoň jeden“).

Kvantifikátor $\forall$ vyjadřuje, že za ním uvedená výroková forma platí pro všechny prvky z některé (jasně vymezené) množiny. Užití obecného kvantifikátoru pro jednu proměnnou je tedy tvaru

$$\forall x \in M \mid V(x)$$

(množina M a forma $V(x)$ však musí být zadány), tento zápis čteme: „Pro každé x z množiny M platí výroková forma $V(x)$.“ Například množinová inkluze $M \subseteq N$, jako jeden z nejužívanějších matematických vztahů, je vlastně definována výrokem

$$\forall x \in M \mid x \in N.$$

Kvantifikátor $\exists$ zaručuje existenci takového prvku z uvedené množiny, pro které následná výroková forma platí. Zapisujeme

$$\exists x \in M \mid V(x)$$

a čteme: „Existuje x z množiny M, pro které platí výroková forma $V(x)$.“

V matematice jsou časté složené výroky s více kvantifikátory, které mají například tvar:

$$\forall \varepsilon > 0 \mid \big(\exists \delta > 0 \mid (\forall x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\big),$$

kde je ve výrokové formě „$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$“ nejprve kvantifikována proměnná x, poté δ, a nakonec ε. Tento zápis je zbytečně složitý, proto bývá zjednodušen vypuštěním závorek, po kvantifikování všech proměnných nahrazujeme svislou čáru dvojtečkou:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Tento příklad je definicí limity $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ v matematické analýze. Je třeba důrazně upozornit, že při takovém zápisu nelze pořadí úvodních kvantifikátorů měnit (jinak pozměníme význam výsledného výroku).

Negací výroku s obecným kvantifikátorem je zřejmě výrok s kvantifikátorem existenčním. Negací výroku „Pro každý prvek množiny M platí, že má danou vlastnost“ je totiž tvrzení „Není pravda, že každý prvek množiny M má danou vlastnost“, což se dá stejně dobře vyjádřit jako „Existuje prvek z množiny M, který danou vlastnost nemá“. Symbolicky toto *pravidlo o negaci* zapíšeme tautologií

$$\neg\big(\forall x \in M \mid V(x)\big) \Leftrightarrow \exists x \in M \mid \neg V(x).$$

Druhé pravidlo

$$\neg\big(\exists x \in M \mid V(x)\big) \Leftrightarrow \forall x \in M \mid \neg V(x)$$

dostaneme z prvního, když v něm formu $V(x)$ zaměníme formou $\neg V(x)$ a poté obě strany ekvivalence znegujeme.

Uvedená pravidla lze používat opakovaně při negacích výroků s více kvantifikátory. U výše uvedeného příkladu tak skutečnost, že neplatí rovnost $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, zapíšeme výrokem

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in \mathbb{R} \;:\; 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon,$$

přitom jsme také využili pravidlo $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.

Kapitola 2

Řešené příklady

2.1 Příklady k běžnému procvičování

Jak název podkapitoly napovídá, jsou v ní soustředěny původní i převzaté náměty ve formě řešených úloh, které jsou určeny k procvičování základů matematické logiky jako samostatného tématického celku předmětu *Matematika* v programech středních škol.

Úloha 2.1.1. *Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky; u výroků určete jejich pravdivostní hodnotu.*

1. $5 \cdot 3 + 12 > 26$
2. *Obsah kruhu o poloměru r je* $2\pi r$.
3. *Řešte tuto rovnici.*
4. *Jak je dnes venku?*
5. $2x + 3 < 0$
6. *Pro každé reálné číslo x platí, že* $2x + 3 < 0$.
7. *Na Marsu existují živé organismy.* [4, str. 12]

Řešení. 1. Výrok pravdivý 2. Výrok nepravdivý 3. Není výrok
4. Není výrok 5. Není výrok 6. Výrok nepravdivý
7. Výrok, jehož pravdivostní hodnotu neznáme (hypotéza)

Úloha 2.1.2. *Stejně jako v předchozím příkladu rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky; u výroků určete jejich pravdivostní hodnotu.*

1. *Morče je hlodavec.*
2. *Střed kružnice vepsané danému trojúhelníku leží v průsečíku os jeho stran.*

3. *Poslouchej.*
4. *Nejdelší řekou světa je Amazonka.*
5. $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}:\ 3x + 6y = 9z.$
6. *Žijeme ve čtrnáctém století.*

Řešení. 1. Výrok pravdivý 2. Výrok nepravdivý 3. Není výrok
4. Výrok pravdivý 5. Není výrok 6. Výrok nepravdivý

Úloha 2.1.3. *Rozhodněte o pravdivosti výroků:*

1. $\forall x \in \{1,2,3,4\}\ \exists y \in \{3,4,5,6,7\} : 2x < y$
2. $\forall x \in \{5,7,9\}\ \exists y \in \{8,10,12,14,16,18\} : x = \frac{1}{2}y$
3. $\exists x \in \{281,687,984,567,213,208\} : 3 \mid x$
4. $\exists k \in \{\frac{8}{3}, \frac{12}{5}, \frac{6}{7}\}\ \exists c \in \{0,85;1,666;2,4;5;8,9\} : k = c$
5. $\forall t \in \mathbb{Z}\ \exists c_1, c_2 \in \mathbb{N} : t = \frac{c_1}{c_2}$

Řešení. 1. Výrok neplatí, protože pro $x = 4$ nerovnost $2 \cdot 4 < y$ neplatí pro žádné $y \leq 7$.

2. Výrok platí, protože $5 = \frac{1}{2} \cdot 10$, $7 = \frac{1}{2} \cdot 14$ a $9 = \frac{1}{2} \cdot 18$.
3. Výrok platí, např. $213 : 3 = 71$.
4. Výrok platí, $\frac{12}{5} = 2,4$
5. Výrok neplatí, např. -2 nelze zapsat takovým zlomkem.

Úloha 2.1.4. *„V teto větě je pěd chip." Je tento výrok pravdivý?* [9, str. 102]

Řešení. Ano a zároveň ne. Výrok obsahuje pouze čtyři pravopisné chyby, tedy neplatí. V tom případě obsahuje i jednu chybu numerickou a potom platí. Jedná se tedy o paradox.

Úloha 2.1.5. *K babičce mají na prázdniny přijet dvě vnučky, Alena a Blanka. Pomocí logických spojek a výroků*

A: „přijede Alena", *B: „přijede Blanka"*

vyjádřete symbolicky následující složené výroky:

1. *Alena přijede a Blanka nepřijede.*
2. *Nepřijede Alena nebo nepřijede Blanka.*
3. *Jestliže nepřijede Alena, pak přijede Blanka.*

4. *Alena přijede právě tehdy, když přijede Blanka.*
5. *Přijedou obě vnučky.*
6. *Přijede nejvýše jedna vnučka.*
7. *Přijede právě jedna vnučka.* [2, str. 256]

Řešení. 1. $A \wedge \neg B$ 2. $\neg A \vee \neg B$ 3. $\neg A \Rightarrow B$ 4. $A \Leftrightarrow B$

5. Přijede Alena a zároveň Blanka: $A \wedge B$
6. Nepřijede Alena nebo nepřijede Blanka: $\neg A \vee \neg B$, také Není pravda, že přijedou obě vnučky: $\neg(A \wedge B)$
7. Přijede Alena a nepřijede Blanka, nebo nepřijede Alena a přijede Blanka:
   $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Úloha 2.1.6. *Ema dělá ovocný salát z pomeranče, jablka a ananasu. Pomocí logických spojek a výroků*

A: „přidá tam ananas“, *B: „přidá tam jablko“,* *C: „přidá tam pomeranč“*

vyjádřete následující složené výroky:

1. *Nakrájí tam ananas, ale nepřidá tam jablko ani pomeranč.*
2. *Jestli do salátu vmíchá pomeranč, potom tam dá také jablko nebo ananas.*
3. *Přidá tam jablko, právě když tam zamíchá ananas.*
4. *Do salátu si nakrájí všechno.*
5. *Nepřidá tam ani pomeranč ani ananas.*
6. *Přidá tam právě jedno ovoce.*
7. *Nenakrájí tam jablko, jestliže tam nezamíchá ananas ani pomeranč.*
8. *Do salátu přidá nejvýše dvoje ovoce.*

Řešení. 1. $A \wedge \neg B \wedge \neg C$ 2. $C \Rightarrow (A \vee B)$ 3. $B \Leftrightarrow A$ 4. $A \wedge B \wedge C$ 5. $\neg C \wedge \neg A$

6. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$
7. $(\neg A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B$
8. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee$
   $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
   nebo $\neg(A \wedge B \wedge C)$

Úloha 2.1.7. *Napiš negaci výroku (bez použití „Není pravda, že. . . “):*

1. *„Když je číslo α kladné, pak má rovnice řešení“.*
2. *„Číslo α je kladné a rovnice má řešení“.*
3. *„Pro každé reálné číslo α platí $\alpha^2 \geq 0$“.*
4. *„Existuje přímka p, která je kolmá k oběma mimoběžkám r a s“.*
5. *„Nejvýše 12 žáků třídy nosí brýle“.*
6. *„Daná rovnice má aspoň 5 kořenů“.* [1, str. 5]

Řešení.

1. „Číslo α je kladné a rovnice nemá řešení“.
2. „Číslo α je nekladné nebo rovnice nemá řešení“.
3. „Existuje reálné číslo α, pro které platí $\alpha^2 < 0$“.
4. „Žádná přímka p není kolmá k oběma mimoběžkám r a s“.
5. „Aspoň 13 žáků třídy nosí brýle“.
6. „Daná rovnice má nejvýše 4 kořeny“.

Úloha 2.1.8. *Znegujte následující výroky (bez použití fráze „Není pravda, že. . . “):*

1. *Každý přečetl aspoň jednu knihu.*
2. *Existuje fialová barva.*
3. *Nejvýše pět mimozemšťanů je zelených.*
4. *Do divadla máme koupené právě tři lístky.*
5. *Každou vteřinu se na světě narodí právě čtyři děti.*
6. *Slunce má na povrchu teplotu více než* $6\,000\,^\circ$C.
7. *Tento dům má méně než deset pater.*
8. *Cesta trvá aspoň* 35 *minut.*

Řešení.

1. Existuje člověk, který nepřečetl žádnou knihu.
2. Neexistuje fialová barva.
3. Nejméně šest mimozemšťanů je zelených.
4. Do divadla máme koupené nejvýše dva, nebo nejméně čtyři lístky.

5. Existuje vteřina, kdy se narodí nejvýše tři, nebo aspoň pět dětí.
6. Slunce má na povrchu teplotu nejvýše $6\,000\,^\circ\mathrm{C}$.
7. Tento dům má aspoň deset pater.
8. Cesta trvá méně než 35 minut.

Úloha 2.1.9. *Znegujte následující složené výroky (bez použití fráze „Není pravda, že. . . “):*

1. *Maloval jsem obraz a došla mi zelená barva.*
2. *Příšery na nás zaútočí právě tehdy, když zaútočíme první.*
3. *Vrátíš mi můj vláček nebo to řeknu tátovi.*
4. *Led taje, právě když teplota dosáhne* $0\,^\circ\mathrm{C}$.
5. *Všechny pastelky se mi vysypaly na zem a polámaly se jim tuhy.*
6. *Na rozhlednu půjdeme pěšky nebo se svezeme lanovkou.*
7. *Vylezeš z vody nebo nastydneš a umřeš.*
8. *Právě tehdy, když nechodím v přezůvkách, dostanu poznámku.*

Řešení.

1. Nemaloval jsem obraz nebo mi nedošla zelená barva.
2. Příšery na nás nezaútočí právě tehdy, když my zaútočíme první.
3. Nevrátíš mi můj vláček a neřeknu to tátovi.
4. Led taje a teplota nedosáhla $0\,^\circ\mathrm{C}$ nebo led netaje a teplota dosáhla $0\,^\circ\mathrm{C}$.
5. Některá pastelka mi nespadla na zem nebo se jí nezlomila tuha.
6. Na rozhlednu nepůjdeme pěšky a nesvezeme se lanovkou.
7. Nevylezeš z vody a nenastydneš nebo neumřeš.
8. Dostanu poznámku a chodím v přezůvkách, nebo nedostanu poznámku a nechodím v přezůvkách.

Úloha 2.1.10. *Znegujte přísloví:*

1. *Lež má krátké nohy.*
2. *Jablko nepadá daleko od stromu.*
3. *Ráno moudřejší večera.*
4. *Hlad je nejlepší kuchař.*
5. *Bez práce nejsou koláče.*
6. *Po bitvě je každý generálem.*
7. *Pro jedno kvítí slunce nesvítí.*
8. *Když se dva perou, třetí se směje.*
9. *Pod svícnem je největší tma.*
10. *Po tmě každá kočka černá.*

Řešení.

1. Některá lež nemá krátké nohy.
2. Některé jablko padlo daleko od stromu.
3. Některé ráno není moudřejší večera.
4. Hlad není nejlepší kuchař.
5. Některý koláč byl získán bez práce.
6. Existuje člověk, který po bitvě generálem není.
7. Slunce svítí právě pro jedno kvítí.
8. Dva se perou a třetí se nesměje.
9. Pod svícnem není největší tma.
10. Některá kočka se ve tmě nejeví černá.

Úloha 2.1.11. *Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ověřte*

a) *pravidlo pro negaci implikace:* $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

b) *tranzitivitu implikací:* $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Řešení. a)

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

b)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Úloha 2.1.12. *Ke každé z následujících implikací napište její negaci, obměnu a obrácení ($A \Rightarrow B \to B \Rightarrow A$). Na závěr do jedné tabulky zapište pravdivostní hodnoty těchto tří změn obecné implikace $A \Rightarrow B$.*

1. *Jestliže se trojúhelníky shodují v jedné straně a v úhlech jí přilehlých, jsou shodné.*
2. *Jestliže se úhlopříčky ve čtyřúhelníku půlí, pak je tento čtyřúhelník rovnoběžníkem.*
3. *Jestliže libovolný prvek x množiny M je zároveň prvkem množiny N, pak je množina M podmnožinou množiny N.*
4. *Jestliže má celé číslo $p > 1$ pouze nevlastní dělitele, pak je číslo p prvočíslem.*
5. *Bod A je hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pokud v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti.*
6. *Funkce f je spojitá na intervalu (a,b), je-li spojitá v každém bodě intervalu (a,b).*

Řešení. 1. Negace: Trojúhelníky se shodují v jedné straně a v úhlech jí přilehlých a přitom nejsou shodné.

Obměna: Nejsou-li trojúhelníky shodné, pak se neshodují v jedné straně a v úhlech jí přilehlých.

Obrácení: Jestliže jsou trojúhelníky shodné, pak se shodují v jedné straně a v úhlech jí přilehlých.

2. Negace: Úhlopříčky ve čtyřúhelníku se půlí a tento čtyřúhelník není rovnoběžníkem.

Obměna: Jestliže není čtyřúhelník rovnoběžníkem, pak se jeho úhlopříčky nepůlí.

Obrácení: Je-li čtyřúhelník rovnoběžníkem, pak se jeho úhlopříčky půlí.

3. Negace: Libovolný prvek x množiny M je zároveň prvkem množiny N a množina M není podmnožinou množiny N.

Obměna: Není-li množina M podmnožinou množiny N, pak existuje prvek x množiny M, který není prvkem množiny N.

Obrácení: Jestliže je množina M podmnožinou množiny N, pak je libovolný prvek x množiny M také prvkem množiny N.

4. Negace: Celé číslo $p > 1$ má pouze nevlastní dělitele a není prvočíslem.

Obměna: Není-li celé číslo $p > 1$ prvočíslem, pak má i vlastní dělitele.

Obrácení: Jestliže je celé číslo $p > 1$ prvočíslem, pak má pouze nevlastní dělitele.

5. Negace: Bod A není hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti.

Obměna: Jestliže není bod A hromadným bodem, pak v nějakém jeho okolí leží konečně mnoho bodů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Obrácení: Jestliže je bod A hromadným bodem, pak v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

6. Negace: Funkce f je spojitá v každém bodě intervalu (a,b) a není na intervalu (a,b) spojitá.

   Obměna: Není-li funkce f spojitá na intervalu (a,b) pak není spojitá v některém bodě tohoto intervalu.

   Obrácení: Jestliže je funkce f spojitá na intervalu (a,b), pak je spojitá v každém jeho bodě.

Tabulka:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$B \Rightarrow A$
1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Úloha 2.1.13. *Urči pravdivostní hodnoty výroků A,B,C, víš-li, že výroková formule*

$$\big((\neg A \Rightarrow C) \vee (B \wedge \neg C)\big) \Leftrightarrow (A \vee C)$$

je nepravdivá. [1, str. 6]

Řešení.

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$\neg A \Rightarrow C$	$B \wedge \neg C$	$(\neg A \Rightarrow C) \vee (B \wedge \neg C)$	$A \vee C$	Celá formule
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Daná výroková formule je nepravdivá právě tehdy, když je výrok B pravdivý a výroky A,C nepravdivé.

Úloha 2.1.14. *Rozhodněte, při kterých pravdivostních hodnotách výroků A,B je uvedená formule pravdivá:* $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$. [5, str. 10]

Řešení.

A	B	$\neg B$	$(A \Rightarrow B)$	$(A \wedge \neg B)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

Při žádných pravdivostních hodnotách výroků není uvedená formule pravdivá, je to kontradikce.

Úloha 2.1.15. *Rozhodněte, zda se jedná o tautologii:*

1. $(A \Rightarrow B) \vee A$
2. $\big((B \Rightarrow A) \Leftrightarrow B\big) \vee \neg A$
3. $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee C)$
4. $\neg(A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg B)$
5. $\big((A \Rightarrow B) \vee \neg C\big) \vee (A \wedge C)$
6. $\big((A \wedge \neg A) \Leftrightarrow (B \vee \neg C)\big) \wedge B$
7. $\big((A \Leftrightarrow C) \wedge (A \Leftrightarrow B)\big) \vee (B \vee C)$
8. $(A \Rightarrow C) \vee (\neg C \vee B)$
9. $\big((B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \vee D)\big) \vee \neg D$

Řešení. 1. Tautologie

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	1

2. Není tautologie

A	B	$\neg A$	$B \Rightarrow A$	$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow B$	$\big((B \Rightarrow A) \Leftrightarrow B\big) \vee \neg A$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

3. Tautologie

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$A \vee \neg A$	$B \vee \neg B$	$\neg C \vee C$	$(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee C)$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

4. Není tautologie

A	B	C	$\neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$C \vee \neg B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$\neg(A \Leftrightarrow B) \wedge (C \vee \neg B)$
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

5. Tautologie

A	B	C	$\neg C$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee \neg C$	$A \wedge C$	$\big((A \Rightarrow B) \vee \neg C\big) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1

6. Není tautologie, je to kontradikce

A	B	C	$\neg A$	$\neg C$	$A \wedge \neg A$	$B \vee \neg C$	$(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow (B \vee \neg C)$	$\big((A \wedge \neg A) \Leftrightarrow (B \vee \neg C)\big) \wedge B$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	0	0

7. Není tautologie

A	B	C	$A \Leftrightarrow C$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow C) \wedge (A \Leftrightarrow B)$	$B \vee C$	$\big((A \Leftrightarrow C) \wedge (A \Leftrightarrow B)\big) \vee (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1

8. Tautologie

A	B	C	$\neg C$	$A \Rightarrow C$	$\neg C \vee B$	$(A \Rightarrow C) \vee (\neg C \vee B)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

9. Tautologie

A	B	C	D	$\neg D$	$B \Leftrightarrow C$	$A \vee D$	$(B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \vee D)$	$\big((B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \vee D)\big) \vee \neg D$
1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1

Úloha 2.1.16. *Užitím obvyklých logických spojek zapište výrok V složený z jednoduchých výroků A,B, který má pravdivostní hodnoty dané tabulkou:*

A	B	V
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Řešení. Ze zadané tabulky vidíme, že výrok V platí v jediném případě, kdy neplatí A a zároveň platí B. Proto jedno z mnoha řešení je výrok $\neg A \wedge B$, dalším řešením je výrok $\neg(B \Rightarrow A)$.

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

A	B	$B \Rightarrow A$	$\neg(B \Rightarrow A)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0

Úloha 2.1.17. *Užitím obvyklých logických spojek zapište výrok V složený z jednoduchých výroků A,B,C, který má pravdivostní hodnoty dané tabulkou:*

A	B	C	V
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Řešení. Začneme tím, že vyjádříme pravdivé řádky tabulky následujícím způsobem:

$$A \land \neg B \land C \qquad \neg A \land B \land C \qquad \neg A \land B \land \neg C$$

a následně je propojíme disjunkcí:

$$(A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C).$$

Tento zápis se nyní pokusíme zjednodušit. Ze druhých dvou závorek můžeme za použití distributivního zákona vytknout $\neg A \land B$, tedy:

$$(\neg A \land B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \Leftrightarrow (\neg A \land B) \land \underbrace{(C \lor \neg C)}_{Tautologie} \Leftrightarrow \neg A \land B.$$

Zjednodušený příklad vyhovujícího složeného výroku je tedy: $(A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B)$

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A \land \neg B \land C$	$\neg A \land B$	$(A \land \neg B \land C) \lor (\neg A \land B)$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0

Úloha 2.1.18. *Podobně jako v předchozím příkladu nalezněte složený výrok V s následující tabulkou pravdivostních hodnot:*

A	B	C	V
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Řešení. Opět vyjádříme řádky tabulky do jednotlivých výrazů:

$$A \land B \land C \qquad \neg A \land B \land C \qquad \neg A \land B \land \neg C \qquad \neg A \land \neg B \land C$$
$$(A \land B \land C) \lor (\neg A \land B \land C) \lor (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land \neg B \land C)$$

a následně zjednodušíme:

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \Leftrightarrow \neg A \wedge \underbrace{\big((B \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)\big)}_{\text{zřejmě } B \vee C}.$$

Tedy zjednodušený složený výrok má tvar: $(A \wedge B \wedge C) \vee \big(\neg A \wedge (B \vee C)\big)$. Při hledání jiných řešení (než $(A \wedge B \wedge C) \vee \big(\neg A \wedge (B \vee C)\big)$) lze využít faktu, že výrok $B \vee C$ platí, hledáme tedy formuli tvaru $(B \vee C) \wedge W$, kde W je výrok, který platí-li A (tedy $\neg A \wedge (B \vee C)$ neplatí), pak platí právě $A \wedge B \wedge C$. Výrok, který hledáme je tedy například $(B \vee C) \wedge \big(A \Rightarrow (B \wedge C)\big)$.

A	B	C	$\neg A$	$B \vee C$	$A \wedge B \wedge C$	$\neg A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B \wedge C) \vee \big(\neg A \wedge (B \vee C)\big)$
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0

Úloha 2.1.19. *Tomáš řekl: „Jestliže si koupím in-line brusle, nekoupím si kolo.“ Tomáš mluví vždycky pravdu a víme, že kolo si nekoupil. Vyplývá z toho, že si koupil in-line brusle?*

Řešení. Označme výroky A: „koupím si in-line brusle“ a B: „nekoupím si kolo“ a utvořme tabulku:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Protože Tomáš mluví pravdu, víme, že se máme zaměřit na řádky s pravdivou implikací. Jak víme, kolo si nekoupil. Výrok B je tedy pravdivý. Rozhodující jsou proto první a třetí řádek tabulky. Nyní vidíme, že z toho, že si Tomáš nekoupil kolo *nevyplývá*, že si koupil in-line brusle.

Úloha 2.1.20. *Týna a Vojta se chystají na cestu kolem světa. Týna tvrdí: „Povede-li se návštěva Egypta a Fiji, povede se i návštěva Guatemaly.“ Vojta prohlašuje: „Myslím, že když se povede návštěva Egypta a nepovede se návštěva Guatemaly, nepovede se ani výlet na Fiji.“ Na to Týna říká: „No, to ale říkáš to, co já.“ Rozhodněte, zda skutečně říkají oba totéž.*

Řešení. Zapišme oba složené výroky pomocí výroků E, F, G s jasným významem:

Týna: $(E \wedge F) \Rightarrow G$ Vojta: $(E \wedge \neg G) \Rightarrow \neg F$

a sestavme tabulku pravdivostních hodnot:

E	F	G	$\neg F$	$\neg G$	$E \wedge F$	$E \wedge \neg G$	$(E \wedge F) \Rightarrow G$	$(E \wedge \neg G) \Rightarrow \neg F$
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

Z porovnání posledních dvou sloupců vidíme, že oba opravdu říkají totéž.

2.2 Doplňkové příklady

Do této podkapitoly jsme zařadili náročnější příklady, které je možné využít při výuce logiky v gymnaziálních třídách se zaměřením na matematiku nebo při práci matematického kroužku. Příklady převzaté ze sbírek jsou označeny citací.

Úloha 2.2.1. *Někdo z podezřelých A, B, C v galerii odcizil obraz. Tři svědci události pravdivě vypověděli toto:*

1. *Podezřelý C byl v galerii právě tehdy, když tam nebyl žádný z dvojice A, B.*
2. *V galerii nebyl podezřelý C nebo nebyla pravda, že tam byl aspoň jeden z dvojice A, C.*
3. *Jestliže není pravda, že v galerii byl podezřelý A současně s B, pak tam byl podezřelý C.*

Kdo je nevinen? [1, str. 7]

Řešení. Označme výrok A: „V galerii byl přítomen podezřelý A". Podobně označme B, C i výroky o přítomnosti osob B, C.
Výpovědi svědků:

1. $C \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ 2. $\neg C \vee \neg(A \vee C)$ 3. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow C$

K řešení použijeme tabulky pravdivostních hodnot výroků. Pomocí logických spojek zapíšeme výroky 1., 2., 3. a určíme jejich pravdivostní hodnoty.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$	$C \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	$\neg C \vee \neg(A \vee C)$	$\neg(A \wedge B) \Rightarrow C$	a) $\wedge$ b) $\wedge$ c)
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0

Nevinný je určitě podezřelý C, obraz odnesl někdo z podezřelých A, B.

Úloha 2.2.2. *Představme si ostrov, na kterém žijí dva kmeny domorodců. Jeden kmen - říkejme jim poctivci - mluví vždy pravdu. Druhý kmen - padouši - vždycky lžou. Nuže jsme se nějakým způsobem ocitli na ostrově a potkali jsme zde dva obyvatele, A a B. A prohlásil: „Aspoň jeden z nás je padouch." Z kterého kmene byl každý z nich?* [7, str. 25]

Řešení. Předpokládejme, že A je padouch. Potom by výrok „Aspoň jeden z nás je padouch" byl nepravdivý, a oba dva by byli poctivci. Kdyby A byl padouch, musel by být také poctivec, což není možné. Takže A musí být poctivec. Jeho výrok je tedy pravdivý a aspoň jeden z nich je skutečně padouch. Jelikož A je poctivec, tak padouch musí být B.

Úloha 2.2.3. *Šli jsme tedy po ostrově dále a potkali jsme tříčlennou skupinu domorodců A, B, C. A řekl: „Všichni jsme padouši," B promluvil: „Právě jeden z nás je poctivec." Kdo byl z kterého kmene?* [7, str. 26]

Řešení. Především A musí být padouch, protože kdyby byl poctivec, pak by bylo pravda, že všichni tři jsou padouši. Kdyby tedy A byl poctivec, musel by být i padouch, což není možné, jeho výrok je nepravdivý, ve skutečnosti je tedy mezi nimi aspoň jeden poctivec.

A teď předpokládejme, že B je padouch. Pak by A i B byli padouši, takže C by byl poctivec. To by znamenalo, že je mezi nimi právě jeden poctivec, takže výrok domorodce B by byl pravdivý. Padouch ale nemůže pronášet pravdivé výroky. Takže B musí být poctivec.

Teď víme, že A je padouch a B je poctivec. Protože B je poctivec, jeho výrok je pravdivý, takže je mezi nimi právě jeden poctivec. Tímto poctivcem je B, takže C musí být padouch. Zjistili jsme, že A a C jsou padouši a B je poctivec.

Úloha 2.2.4. *Jdouce po jednom výběžku ostrova jsme zahlédli přístav, ke kterému bychom se rádi dostali. Na dalším rozcestí jsme potkali domorodce D a opodál postával E. Požádali jsme D, aby se zašel zeptat, ke kterému kmeni patří E. Když se vrátil, sdělil nám, že E patří k padouchům. Než D odešel, zeptali jsme se ho, která cesta vede k přístavu. Na jednu ukázal a odešel.*

Měli bychom domorodci D věřit? Vede cesta, kterou nám ukázal, k přístavu? [18, upraveno]

Řešení. Není důležité, z kterého je kdo kmene, stejně o sobě nemůže říci, že je padouch – poctivec by řekl lež a padouch by mluvil pravdu.

Když nám tedy D řekl, že E je padouch, musel lhát. Je to tedy padouch a cesta do přístavu nevede.

Pro ilustraci uveďme tabulku všech možností:

První (D)	Druhý (E)	Druhý o sobě (E o E)	První o druhém (D o E)
Poctivec	Poctivec	Poctivec	Poctivec
Poctivec	Padouch	Poctivec	Poctivec
Padouch	Poctivec	Poctivec	Padouch
Padouch	Padouch	Poctivec	Padouch

Úloha 2.2.5. *Před Honzou seděly tři zahalené princezny, z nichž jedna byla Zlatovláska. Honza měl za úkol zjistit, která z nich to je.*
Princezna v prvním křesle řekla: „Ve třetím křesle Zlatovláska nesedí."
Princezna ve druhém křesle řekla: „Já Zlatovláska nejsem."
Princezna ve třetím křesle řekla: „Já jsem Zlatovláska."
Kouzelná muška Honzovi prozradila, kolik princezen lhalo. Teprve s touto radou dokázal Honza odhalit pravou Zlatovlásku.
Která z princezen byla Zlatovláska? [15]

Řešení. Rozlišíme tři případy podle toho, kde mohla sedět Zlatovláska:

1. Pokud by Zlatovláska seděla v prvním křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve druhém křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve třetím křesle lhala.

2. Pokud by Zlatovláska seděla ve druhém křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve druhém křesle lhala,
   - princezna ve třetím křesle lhala.
3. Pokud by Zlatovláska seděla ve třetím křesle, potom by
   - princezna v prvním křesle lhala,
   - princezna ve druhém křesle mluvila pravdu,
   - princezna ve třetím křesle mluvila pravdu.

V prvním a ve třetím případě by lhala jedna princezna, ve druhém případě by lhaly dvě princezny. Protože muščí rada Honzovi pomohla odhalit Zlatovlásku, musela mu muška prozradit, že lhaly dvě princezny. Tomu odpovídá druhý případ, totiž že Zlatovláska seděla ve druhém křesle. (Pokud by muška tvrdila, že lhala jedna princezna, Honza by neuměl rozhodnout mezi prvním a třetím případem.)

Úloha 2.2.6. *Na lyžařské soustředění přijeli* 4 *kamarádi ze* 4 *světových stran a vedli následující rozhovor.*
Karel: „Nepřijel jsem ze severu ani z jihu.“
Mojmír: „Zato já jsem přijel z jihu.“
Pepa: „Přijel jsem ze severu.“
Zdenda: „Já z jihu nepřijel.“
Víme, že jedna výpověď není pravdivá. Určete, která to je.
Kdo tedy přijel ze severu a kdo z jihu? [14]

Řešení. Podle předchozích výroků si představíme, odkud kdo mohl přijet:

- ze severu Pepa, nebo Zdenda,
- z východu Karel, nebo Zdenda,
- z jihu Mojmír,
- ze západu Karel, nebo Zdenda.

Nyní zvažujeme, které výroky mohly být nepravdivé:

- Kdyby lhal Mojmír, museli by všichni ostatní mluvit pravdu, a to by znamenalo, že z jihu nepřijel nikdo. Mojmírova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Zdenda, musel by přijet z jihu, což by znamenalo, že lhal i Mojmír. Zdendova výpověď tedy byla pravdivá.
- Kdyby lhal Karel, musel by přijet ze severu, nebo z jihu. To by v prvním případě znamenalo, že lhal i Pepa, ve druhém případě, že lhal i Mojmír. Karlova výpověď tedy byla pravdivá.

Mojmír, Zdenda a Karel mluvili pravdu, lhal tedy Pepa (což vskutku není s ničím v rozporu). Ze severu proto přijel Zdenda, z jihu přijel Mojmír.

Úloha 2.2.7. *Do třídy přibyl nový žák, o kterém se vědělo, že kromě angličtiny umí výborně ještě jeden cizí jazyk. Tři spolužáci se dohadovali, který jazyk to je.*
První soudil: „Francouzština to není.“
Druhý hádal: „Je to španělština nebo němčina.“
Třetí usuzoval: „Je to španělština.“
Záhy se dozvěděli, že alespoň jeden z nich hádal správně a alespoň jeden nesprávně.
Určete, který ze jmenovaných jazyku nový žák ovládal. [16]

Řešení. Kdyby oním jazykem, který nový žák ovládal, byla francouzština, potom by všichni tři spolužáci hádali nesprávně.
Kdyby oním jazykem byla španělština, potom by všichni tři spolužáci hádali správně.
Kdyby oním jazykem byla němčina, potom by první dva spolužáci hádali správně a třetí nesprávně. Toto je jediný případ, kdy aspoň jeden spolužák hádá správně a aspoň jeden nesprávně. Nový žák proto ovládá němčinu.

Úloha 2.2.8. *V našem městě jsou tři kina, kterým se říká podle světových stran. O jejich otvíracích dobách je známo, že:*

1. *každý den má otevřeno alespoň jedno kino,*
2. *pokud má otevřeno jižní kino, potom nemá otevřeno severní kino,*
3. *nikdy nemá otevřeno současně severní a východní kino*
4. *pokud má otevřeno východní kino, potom má také otevřeno jižní nebo severní kino.*

Vydali jsme se do jižního kina a zjistili jsme, že je zavřené. Které ze zbývajících kin má jistě otevřeno? [17]

Řešení. K řešení využijeme následující tabulku, kde 1 značí otevřeno a 0 zavřeno:

	J	S	V
1	1	1	1
2	1	1	0
3	1	0	1
4	1	0	0
5	0	1	1
6	0	1	0
7	0	0	1
8	0	0	0

Z této tabulky vyškrtneme řádky, které odporují podmínkám. Řádek číslo 8 odporuje první z nich, druhá podmínka znemožňuje situaci naznačenou prvním a druhým řádkem a třetí omezení popírá pátý řádek. Čtvrtá podmínka nás pak nutí škrtnout sedmý řádek. Proškrtaná tabulka tedy vypadá následovně:

	J	S	V
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
~~2~~	~~1~~	~~1~~	~~0~~
3	1	0	1
4	1	0	0
~~5~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~
6	0	1	0
~~7~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~
~~8~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

Zjistíme-li tedy u jižního kina, že je toto zavřené, pak severní kino je otevřené.

Úloha 2.2.9. *U řeky stojí člověk, který má u sebe vlka, kozu a hlávku zelí. U břehu je přivázaná loďka, do které se ale vejde jenom on a jedna další věc. Když spolu nechá kozu a zelí, koza sežere zelí. Nechá-li spolu vlka a kozu, vlk sežere kozu. Jak to má muž udělat, aby se mu podařilo převézt všechny tři věci a o žádnou nepřišel?* [hádankářský folklór]

Řešení. Nejdříve převeze kozu. Kdyby převážel zelí, vlk sežere kozu a kdyby vzal vlka, koza sežere zelí. Vrátí se s prázdnou loďkou a naloží buď vlka nebo zelí. Obě varianty jsou stejně dobré. Pro tentokrát předpokládejme, že muž vezme vlka. Vyloží ho na druhém břehu a kozu odveze zpátky. Potom vezme zelí a odpluje s ním na druhý břeh. Nakonec se s prázdnou loďkou vrátí pro kozu.

Úloha 2.2.10. *Jsou dány výrokové formy:*

A(n): Číslo $3n-2n^2-1$ *je přirozené číslo dělitelné pěti.*

B(n): Číslo $n\cdot(n-1)-5$ *je přirozené číslo dělitelné sedmi.*

Najdi některé přirozené číslo n tak, aby byl výrok V(n) = A(n) ∨ B(n) pravdivý. [1, str. 7]

Řešení. Výrok $A(n)\vee B(n)$ je pravdivý právě tehdy, když aspoň jeden z výroků $A(n),B(n)$ je pravdivý.
Nejprve zjistíme, zda vůbec pro některé $n\in\mathbb{N}$ je hodnota výrazu $3n-2n^2-1$ rovna přirozenému číslu dělitelnému pěti, tedy číslu $5k$, kde $k\in\mathbb{N}$.

$5\mid 3n-2n^2-1\Rightarrow 3n-2n^2-1=5k$ pro vhodné $k\ \in\mathbb{N}$
$-2n^2+3n-(1+5k)=0$

Vypočteme diskriminant D posledního kvadratického trojčlenu:

$D=3^2-4\cdot(-2)\cdot\big(-(1+5k)\big)=9-8-40k=1-40k$
$D\geq 0\Leftrightarrow 1-40k\geq 0\Leftrightarrow k\leq\frac{1}{40}\ldots$ takové $k\in\mathbb{N}$ neexistuje.

Výrok $A(n)$ není pravdivý pro žádné $n\in\mathbb{N}$.

Musíme proto zjistit, zda pro některé $n\in\mathbb{N}$ je hodnota výrazu $n\cdot(n-1)-5$ rovna přirozenému číslu dělitelnému sedmi, tedy číslu $7l$, kde $l\in\mathbb{N}$.

$7\mid n\cdot(n-1)-5\Leftrightarrow n\cdot(n-1)-5=7l$ pro vhodné $l\in\mathbb{N}$
$n^2-n-(5+7l)=0$
$D=(-1)^2-4\cdot 1\cdot\big(-(5+7l)\big)=1+20+28l=28l+21$
$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{28l+21}}{2}\Rightarrow n_1=\frac{1-\sqrt{28l+21}}{2}<0,\ n_2=\frac{1+\sqrt{28l+21}}{2}$$
$$l=1\Rightarrow n_2=\frac{1+\sqrt{28\cdot 1+21}}{2}=\frac{1+7}{2}=4$$
Výrok $B(4)$ je pravdivý, tedy výrok $V(4)=A(4)\vee B(4)$ je pravdivý. Ze zadání máme najít některé $n\in\mathbb{N}$, nikoliv všechna, proto nám stačí pouze řešení $V(4)$.

Úloha 2.2.11. *Dívám se na obraz. Sourozence nemám a otec muže na obraze je syn mého otce. Kdo je to?* [7, str. 15]

Řešení. Je to můj syn.

Úloha 2.2.12. *Všeprobíjející střelou rozumíme střelu, která všechno prostřelí a nic jí neodolá. Neprůstřelným pancířem rozumíme pancíř, který žádná střela nedokáže prostřelit a všemu odolá. Nuže, jak to dopadne, když všeprobíjející střela zasáhne neprůstřelný pancíř?* [7, str. 15]

Řešení. Není možné, aby současně existovala všeprobíjející střela i neprůstřelný pancíř.

Úloha 2.2.13. *Sloni vždy nosí růžové spodky.*
Každý živočich, který jí med, umí hrát na dudy.
Cokoliv, co lze snadno spolknout, jí med.
Žádný živočich, který nosí růžové spodky, neumí hrát na dudy.
A toho vyplývá:
Slony lze snadno spolknout.
Je tato dedukce pravdivá? [10, str. 19]

Řešení. Tato dedukce je chybná.
Zkusme pro účely důkazu předpokládat, že slony lze snadno spolknout. Třetí tvrzení v úloze nám pak říká, že sloni jedí med. Z druhého tvrzení odvodíme, že sloni umějí hrát na dudy. Na druhou stranu první tvrzení nám ovšem říká, že sloni nosí růžové spodky, z čehož podle čtvrtého tvrzení vyplývá, že sloni neumějí hrát na dudy. Tak jsme se dostali k logickému sporu. Jedinou možností, jak z toho ven, je uznat, že slony nelze snadno spolknout.

Nebo symbolicky:
S: „Je slon“
M: „Jí med“
P: „Umožňuje snadné spolknutí“
R: „Nosí růžové spodky“
D: „Umí hrát na dudy“

Tedy:
$S \Rightarrow R$,
$M \Rightarrow D$ neboli $\neg D \Rightarrow \neg M$,
$P \Rightarrow M$ neboli $\neg M \Rightarrow \neg P$,
$R \Rightarrow \neg D$.

Můžeme tedy napsat:
$S \Rightarrow R \Rightarrow \neg D \Rightarrow \neg M \Rightarrow \neg P$
Tzn. $S \Rightarrow \neg P$, což znamená, že slony nelze snadno spolknout.

Úloha 2.2.14. *Všichni mimozemšťané jsou zelení.*
Každý tvor, který má dvě anténky, tančí rumbu.
Každý, kdo nežije na Plutu, má dvě anténky.
Všichni, kteří tančí rumbu, mají rádi vanilkovou zmrzlinu.
Ten, kdo má rád vanilkovou zmrzlinu, není zelený.
Z toho plyne:
Všichni mimozemšťané žijí na Plutu.
Je tato dedukce správná?

Řešení. Ano.

Zapišme si výroky symbolicky:
M: „Je mimozemšťan“
Z: „Je zelený“
D: „Má dvě anténky“
R: „Tančí rumbu“
P: „Žije na Plutu“
V: „Má rád vanilkovou zmrzlinu“

Tedy:
$M \Rightarrow Z$,
$D \Rightarrow R$ neboli $\neg R \Rightarrow \neg D$,
$\neg P \Rightarrow D$ neboli $\neg D \Rightarrow P$,
$R \Rightarrow V$ neboli $\neg V \Rightarrow \neg R$,
$V \Rightarrow \neg Z$ neboli $Z \Rightarrow \neg V$.

Tedy:
$M \Rightarrow Z \Rightarrow \neg V \Rightarrow \neg R \Rightarrow \neg D \Rightarrow P$, tzn. $M \Rightarrow P$

Dedukce „Všichni mimozemšťané žijí na Plutu“ je správná.

Úloha 2.2.15. *Všechny děti mají červená trička.*
Každý, kdo má rád bonbóny, nerad sportuje.
Nikdo, kdo pije džus, nenosí červené tričko.
Kdo nerad sportuje, má sestru.
Žádný člověk, který nepije džus, nemá sestru.
Mají děti rády bonbóny?

Řešení. Ne.

Zapišme symbolicky:
I: „Je dítě“
C: „Má červené tričko“
B: „Má rád bonbóny“
P: „Rád sportuje“
Z: „Pije džus“
E: „Má sestru“

Tedy:
$I \Rightarrow C$,
$B \Rightarrow \neg P$ neboli $P \Rightarrow \neg B$,
$Z \Rightarrow \neg C$ neboli $C \Rightarrow \neg Z$,
$\neg P \Rightarrow E$ neboli $\neg E \Rightarrow P$,
$\neg Z \Rightarrow \neg E$.

Tedy:
$I \Rightarrow C \Rightarrow \neg Z \Rightarrow \neg E \Rightarrow P \Rightarrow \neg B$
Z toho plyne, že děti nemají rády bonbóny.

Úloha 2.2.16. *Každý vrah má zbraň.*
Všichni, kdo nosí černý kabát, mají modré oči.
Nikdo, kdo má motiv, nechová křečka.
Ten, kdo nenosí černý kabát, je zahradník.
Nikdo, kdo nechová křečka, nemá zbraň.
Kdo nemá motiv, nemá modré oči.
Je vrahem zahradník?

Řešení. Ano.

Zapišme symbolicky:
V: „Je vrah“
Z: „Má zbraň“
O: „Má modré oči“
C: „Nosí černý kabát“
M: „Má motiv“
K: „Chová křečka“
H: „Je zahradník“

Tedy:
$V \Rightarrow Z$,
$C \Rightarrow O$ neboli $\neg O \Rightarrow \neg C$,
$M \Rightarrow \neg K$ neboli $K \Rightarrow \neg M$,
$\neg C \Rightarrow H$,
$\neg K \Rightarrow \neg Z$ neboli $Z \Rightarrow K$,
$\neg M \Rightarrow \neg O$.

Tedy:
$V \Rightarrow Z \Rightarrow K \Rightarrow \neg M \Rightarrow \neg O \Rightarrow \neg C \Rightarrow H$, tzn. $V \Rightarrow H$
Ano, vrahem je zahradník.

Závěr

Jak z předložené bakalářské práce vyplývá, logika je zajímavá a pro budování celé matematiky zásadní disciplína. Jistě neobsahuje pouze výroky a tabulky pravdivostních hodnot, jak jsme mohli zažít při studiu na středních školách. Jedná se o užitečné odvětví, použitelné v mnoha oborech, které jinak s matematikou vůbec nesouvisí. Logiku používáme i v každodenním hovoru, je tedy nedílnou součástí našich životů.

Popsali jsme zde vývoj logiky, zabrousili jsme do neformální logiky a nezanedbatelnou část jsme věnovali také matematické logice. Na závěr jsme uvedli četné příklady na procvičení jak školského učiva, tak úloh netradičních.

Toto téma skýtá mnoho možností širšího rozpracování, kupříkladu úlohy pro matematické olympiády popřípadě využití logiky v ostatních tématech probíraných na středních školách, ať už by se jednalo o definice a věty a jejich důkazy nebo myšlenkové pochody a postupy související s výzkumem témat jiných odvětví. Hlubšímu studiu matematické logiky se hodlám věnovat v magisterském studiu při přípravě své závěrečné diplomové práce.

Seznam použité literatury

[1] BOUCNÍK, Pavel, HERMAN, Jiří, KRUPKA, Peter, ŠIMŠA, Jaromír. *Odmaturuj z matematiky 3*. 1. vyd. Brno: DIDAKTIS, 2004. 248 s. ISBN 80-7358-010-1.

[2] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 1999. 631 s. ISBN 80-7196-140-X

[3] HEJNÝ, Milan a kol. *Teória vyučovania matematiky 2*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateĺstvo, 1989. 560 s. ISBN 80-08-00014-7.

[4] KUBÁT, Josef, HRUBÝ, Dag, PILGR, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000. 195 s. ISBN 80-7196-030-6.

[5] PETÁKOVÁ, Jindra. *MATEMATIKA: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. 287 s. ISBN 80-7196-099-3.

[6] SELUCKÝ, Oldřich. *Logika pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1995. 235 s. ISBN 80-7168-201-2.

[7] SMULLYAN, Raymond, Merrill. *Jak se jmenuje tahle knížka?*. 1. vyd. Praha: Portál, 2015. 200 s. ISBN 978-80-262-0822-8.

[8] SMULLYAN, Raymond, Merrill. *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*. 1. vyd. Praha: Portál, 2004. 216 s. ISBN 80-7178-843-0.

[9] STEWART, Ian. *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2013. 315 s. ISBN 978-80-7363-292-2

[10] STEWART, Ian. *Truhlice matematických pokladů profesora Stewarta*. 1. vyd. Praha: Dokořán, 2013. 343 s. ISBN 978-80-7363-527-5

[11] VARGA, Tamás. *Matematická logika pre začiatočnikov*. 1. vyd. Bratislava: Alfa, 1970. 193 s.

[12] DOSTÁLOVÁ, Ludmila. *Aristotelská logika* [Online]. 2013 [cit. 10. března 2020]. Dostupné z: `https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/2.pdf`

[13] DOSTÁLOVÁ, Ludmila. *Úvod* [Online]. 2013 [cit. 10. března 2020]. Dostupné z: `https://www.esf.kfi.zcu.cz/logika/opory/lof/prezentace/1.pdf`

[14] *Matematická olympiáda* [Online]. 2016/2017 [cit. 10. dubna 2020]. Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/3309252/z66-7.pdf`

[15] *Matematická olympiáda* [Online]. 2016/2017 [cit. 10. dubna 2020]. Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/3528330/z9iii-r.pdf`

[16] *Matematická olympiáda* [Online]. 2018/2019 [cit. 10. dubna 2020]. Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433862/z68i-8.pdf`

[17] *Matematická olympiáda* [Online]. 2018/2019 [cit. 10. dubna 2020]. Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433448/z68i-9.pdf`

[18] *Matematická olympiáda* [Online]. 2019/2020 [cit. 10. dubna 2020]. Dostupné z: `http://www.matematickaolympiada.cz/media/5435780/z69i-9.pdf`

[19] WIKIPEDIE. *Logika* [Online]. 2018 [cit. 9. března 2020]. Dostupné z: `https://cs.wikipedia.org/wiki/Logika`