

# Algebraické výrazy <sup>1</sup>

## Základní vzorce

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2,$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2), \quad a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3.$$

## Úpravy algebraických výrazů

Není-li řečeno jinak, je nedílnou součástí úpravy výrazu též **stanovení podmínek**, za nichž je uvažovaný výraz definován.

## Řešené příklady

**Zadání** Následující výrazy upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

1.

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - x - y^2 - y},$$

2.

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b^2}{a^2}}{1 - \frac{b}{a}} \cdot (a^2 - ab + b^2),$$

3.

$$\frac{\frac{x^3}{y^2} + \frac{x^2}{y} + x + y}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}},$$

4.

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2}.$$

## Řešení

1. Platí

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - x - y^2 - y} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x - y)(x + y) - (x + y)} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x + y)(x - y - 1)} = \frac{x - y}{x - y - 1},$$

příčemž  $x \neq -y$  a  $x \neq y + 1$ .

2. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b} - \frac{b^2}{a^2}}{1 - \frac{b}{a}} \cdot (a^2 - ab + b^2) &= \frac{\frac{a^3 - b^3}{a^2b}}{\frac{a-b}{a}} \cdot (a^2 - ab + b^2) = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{\frac{a^2b}{a-b}} = \\ &= \frac{(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)}{ab} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{ab}, \end{aligned}$$

příčemž  $a \neq b$ ,  $a \neq 0$  a  $b \neq 0$ .

---

<sup>1</sup>Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

3. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x^3}{y^2} + \frac{x^2}{y} + x + y}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}} &= \frac{\frac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{y^2}}{\frac{x^4-y^4}{x^2y^2}} = \frac{\frac{x^2(x+y)+y^2(x+y)}{y^2}}{\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y^2}} = \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x+y)}{y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2}{x-y}, \end{aligned}$$

přičemž  $x \neq \pm y$ ,  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$ .

4. Platí

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2} &= \frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}} \cdot \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2} = \\ &= \frac{b+c+a}{b+c-a} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{(a+b+c)^2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c-a) \cdot 2bc \cdot (a+b+c)} = \frac{1}{2bc}, \end{aligned}$$

přičemž  $b+c \neq \pm a$ ,  $b \neq -c$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  a  $c \neq 0$ .

## Úlohy

**Zadání** Následující výrazy upravte do nejjednoduššího možného tvaru.

1.

$$\left[ \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) : \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) \right] : \left( 1 + \frac{y}{x} \right),$$

2.

$$\left( 1 + t - \frac{1}{1-t} \right) : \left( t - \frac{t^2}{t-1} \right),$$

3.

$$(c^3 - d^3) : \left( c + \frac{d^2}{c+d} \right),$$

4.

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2b^2} : \left[ \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right) \right],$$

5.

$$\left\{ \left[ \left( \frac{a+1}{a-1} \right)^2 + 3 \right] : \left[ \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^2 + 3 \right] \right\} : \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1},$$

6.

$$\left( m + n - \frac{4mn}{m+n} \right) : \left( \frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2} \right),$$

7.

$$\frac{(a^2+2a)^2 - (2a+4)^2}{(a^2-2a)^2 - (2a-4)^2} : \left( 2 : \frac{a^2+a-6}{a^2+5a+6} \right),$$

8.

$$\frac{\left(\frac{x-y}{x^2+xy} - \frac{x}{y^2+xy}\right) : \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x+y}\right)}{\left[\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) : (y+x) + y\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\right] : \frac{1+y}{x}},$$

9.

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{z^2 - x^2 - y^2 + 2xy} \cdot \frac{y^2 - x^2 - z^2 + 2xz}{x^2 + z^2 + 2xz - y^2},$$

10.

$$x^2 y^2 \left[ \frac{1}{(x+y)^2} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^3} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right],$$

11.

$$\frac{x + \frac{1}{y}}{x + \frac{z}{yz+1}} - \frac{1}{y(xyz + x + z)}.$$

### Výsledky

1.

$$\frac{x}{x-y} \text{ za podmínek } x \neq 0, y \neq 0 \text{ a } x \neq \pm y,$$

2.

$$-t \text{ za podmínek } t \neq 0 \text{ a } t \neq 1,$$

3.

$$c^2 - d^2 \text{ za podmínky } c \neq -d,$$

4.

$$\frac{a+b}{a-b} \text{ za podmínek } a \neq 0, b \neq 0 \text{ a } a \neq b,$$

5.

$$-1 \text{ za podmínky } a \neq \pm 1,$$

6.

$$m - n \text{ za podmínky } m \neq \pm n,$$

7.

$$\frac{a+2}{2a-4} \text{ za podmínek } a \neq -3 \text{ a } a \neq \pm 2,$$

8.

$$1 \text{ za podmínek } x \neq 0, y \neq 0, y \neq -1 \text{ a } x \neq \pm y,$$

9.

$$\left( \frac{x+y-z}{x-y+z} \right)^2 \text{ za podmínek } x-y+z \neq 0, -x+y+z \neq 0 \text{ a } x+y+z \neq 0,$$

10.

$$1 \text{ za podmínek } x \neq 0, y \neq 0 \text{ a } x \neq -y,$$

11.

$$1 \text{ za podmínek } y \neq 0, x + xyz + z \neq 0 \text{ a } yz \neq -1.$$