

Fibonacci a zlatý řez

ZDENĚK KADEŘÁBEK
GYMNÁZIUM BRNO, KŘENOVÁ, P.O.

Co mají společného počty korunních lístků?

Mnoho **sedmikrásek** má 34 korunních lístků, nebo 55, 89

Měsíčky a **Astry** mívají 13, 21 korunních lístků

Slunečnice mají obvykle 55, 89, 144



Fibonacciho čísla

Fibonacciho posloupnost: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ...

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kde } F_0 = 0, F_1 = 1$$

Mnoho květin, zvláště příbuzných se sedmikráskami, má počet korunních lístků roven některému z Fibonacciho čísel

Ostatní čísla se vyskytují vzácněji (fuchsie 4 okvětní lístky, čtyřlístek...)

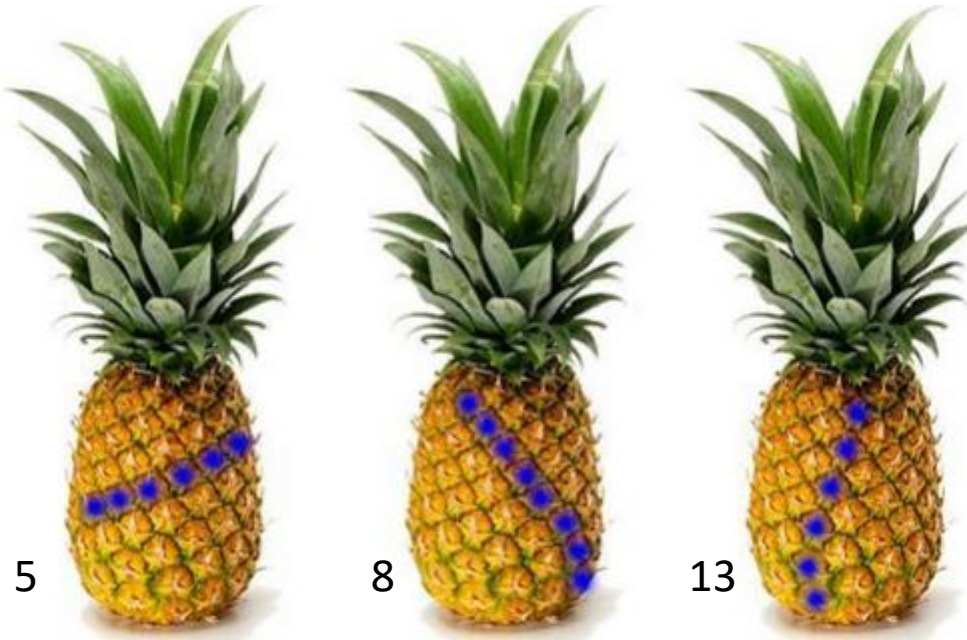
--> **Lucasova čísla 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29**



Zlatý řez u rostlin

Ananas

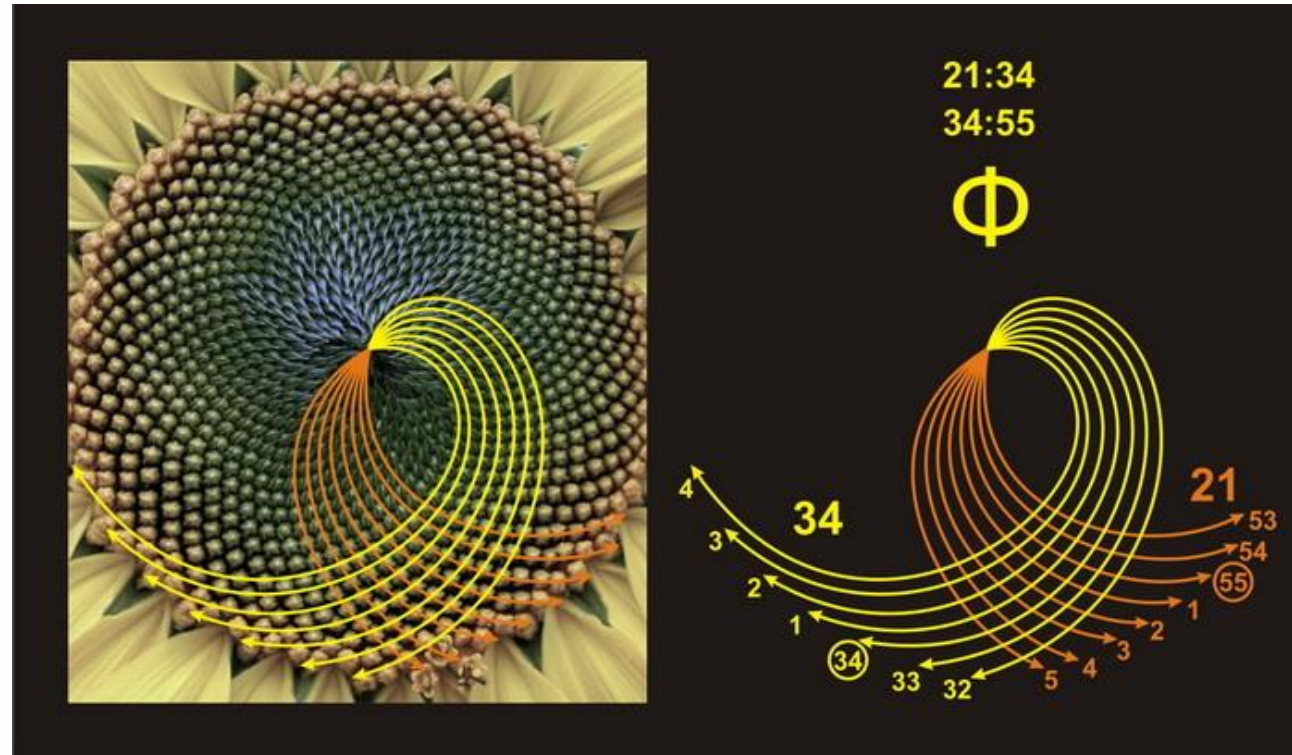
- Povrch má šestiúhelníkovou strukturu (plody, které splynou během růstu)
- Tři skupiny spirál na jeho povrchu
 - 13 spirál otáčejících se proti směru otáčení hodinových ručiček, 8 spirál po směru, 5 spirál otáčejících se po směru ručiček v tupějším úhlu



Zlatý řez u rostlin

Slunečnice – uspořádání semen ve spirálách

- Jedna skupina spirál po směru hodinových ručiček, druhá proti směru



Vytvoř Fibonacciho posloupnost

Excel

KDYŽ : *fx* =A1+A2

	A	B	C	D	E
1	1				
2	1				
3	=A1+A2				

A3 : *fx* =A1+A2

	A	B
1	1	
2	1	
3	2	
4	3	
5	5	
6	8	
7	13	
8	21	
9		

Google tabulky

fx =A1+A2

	A	B
1	1	
2	1	
3	=A1+A2	

fx =A1+A2

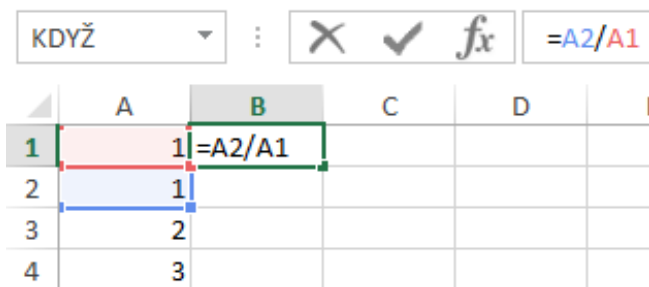
	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	

Fibonacciho posloupnost:
<http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/FP.html>

Jaký je poměr následujících členů Fibonacciho posloupnosti?

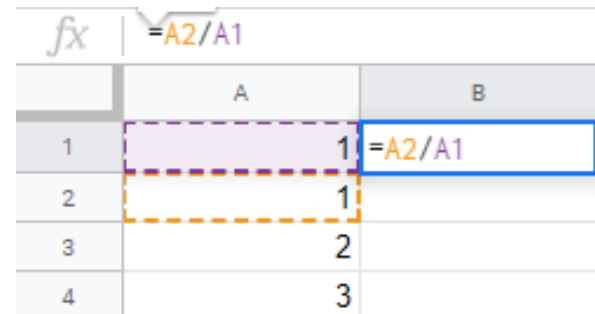
Fibonacciho posloupnost: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Excel



	A	B	C	D	E
1	1	=A2/A1			
2	1				
3	2				
4	3				

Google tabulky



	A	B
1	1	=A2/A1
2	1	
3	2	
4	3	

$$\frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{5}{3} = 1,666 \dots$$

$$\frac{8}{5} = 1,6$$

$$\frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{21}{13} = 1,615 \dots$$

$$\frac{34}{21} = 1,619 \dots$$

$$\frac{55}{34} = 1,617 \dots$$

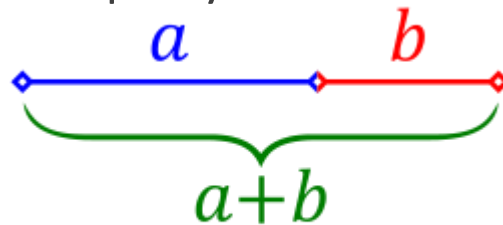
$$\frac{89}{55} = 1,618 \dots$$

Zlatý řez

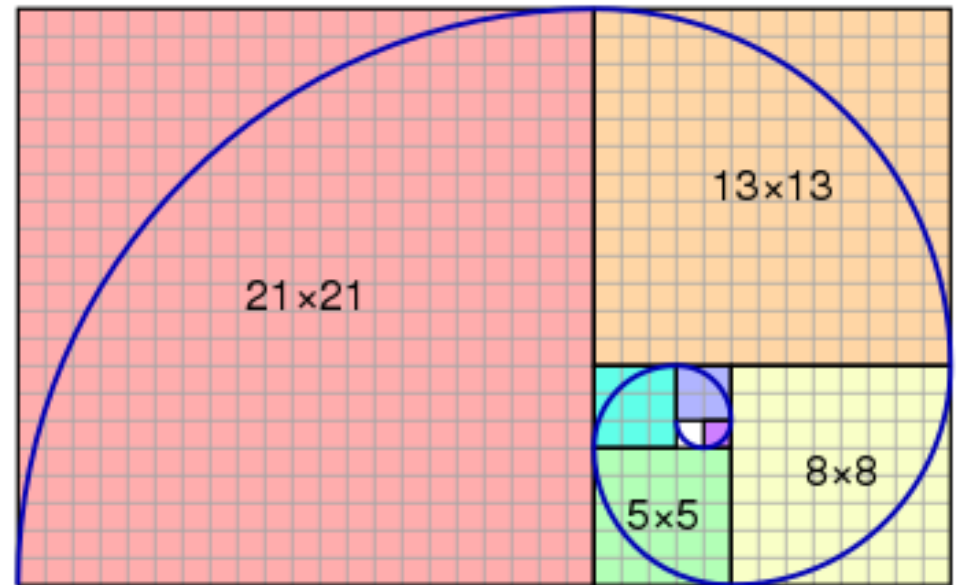
Rychlost růstu Fibonacciho posloupnosti konverguje k hodnotě zlatého řezu

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi = 1,61803 \dots$$

Fibonacciho spirála – aproximace zlaté spirály



Zlatý obdélník: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \equiv \varphi$



◦ http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/zlaty_rez.html

◦ <http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/FibonacciObdelniky.html>

Vypočítejte hodnotu zlatého řezu

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Jaká je hodnota zlatého řezu?

Řetězový zlomek zlatého řezu:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Zlatý řez a řetězový zlomek

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

Excel

KDYŽ f_x =1+1/A1

	A	B	C	D	E
1	1				
2	=1+1/A1				

	A	B
1	1	
2	2	
3	1,5	
4	1,666667	
5	1,6	
6	1,625	
7	1,615385	
8	1,619048	
9	1,617647	
10	1,618182	
11		
12		

Google tabulky

f_x =1+1/A1

	A
1	1
2	=1+1/A1

f_x =1+1/A1

	A
1	1
2	2
3	1,5
4	1,666666667
5	1,6
6	1,625
7	1,615384615
8	1,619047619
9	1,617647059
10	

Zlatý úhel

1868 – německý botanik Wilhelm Hofmeister

- Studium růstu stonku rostlin

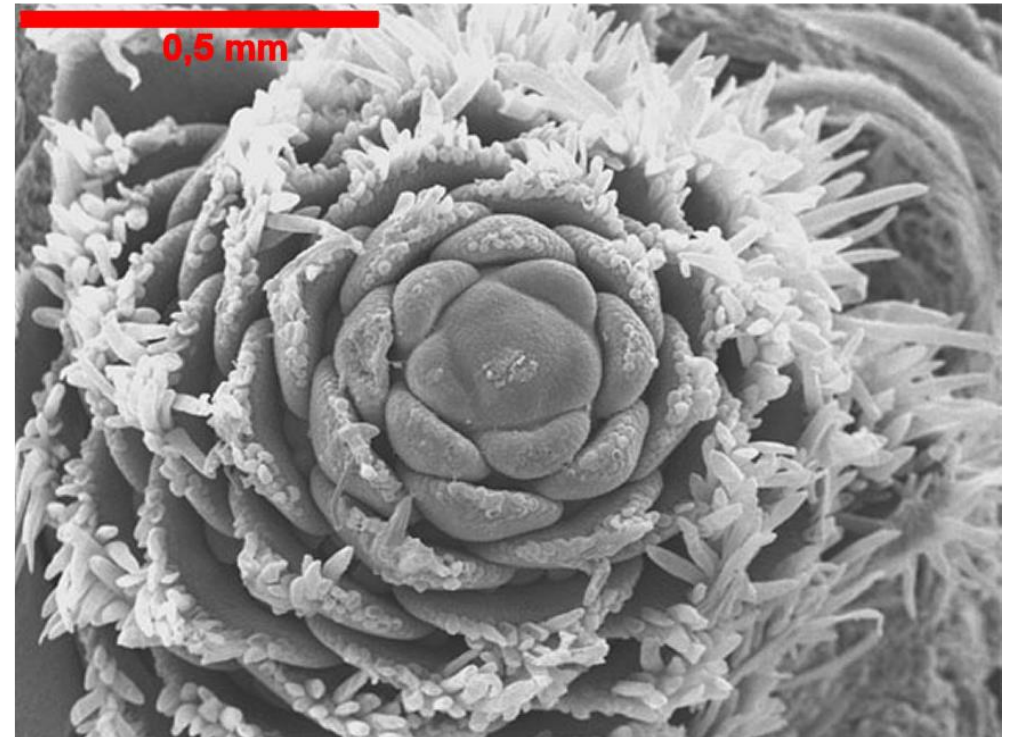
Vývin stonku určen chováním rostoucí špičky a závisí na malém shluku buněk nazývaných primordia (zárodky listů)

- Tyto buňky leží na spirále – každá buňka oddělena od předchozí zlatým úhlem A , takže n -té semeno leží odkloněno o úhel nA (přitom vzdálenost od středu je úměrná odmocnině $z\ n$)

--> vysvětlení uspořádání semen slunečnice

--> korunní lístky se vytvářejí na konci spirál

- Fibonacciho čísla počtu spirál vedou k Fibonacciho číslům pro počet korunních plátků



Semena slunečnice:

<http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/slunecnice.html>

Zlatý úhel

Rozdělte úhel 360° na dva úhly v poměru zlatého řezu

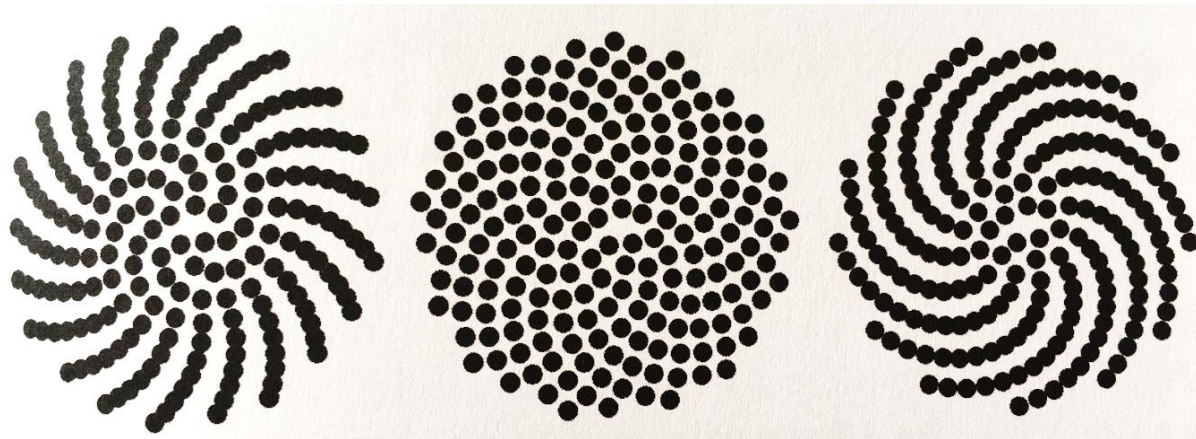
- Větší úhel je 1,618 násobek menšího úhlu

Zlatý úhel je přibližně $137,5^\circ$

--> Klíč k nejefektivnějšímu rozmístění semen slunečnice, růstu listů rostlin...

Růst listů:

<http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/FibonacciRust.html>



Rozmístění semen v úhlech 137° , $137,5^\circ$ a 138°

Semena slunečnice:

<http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/slunecnice.html>

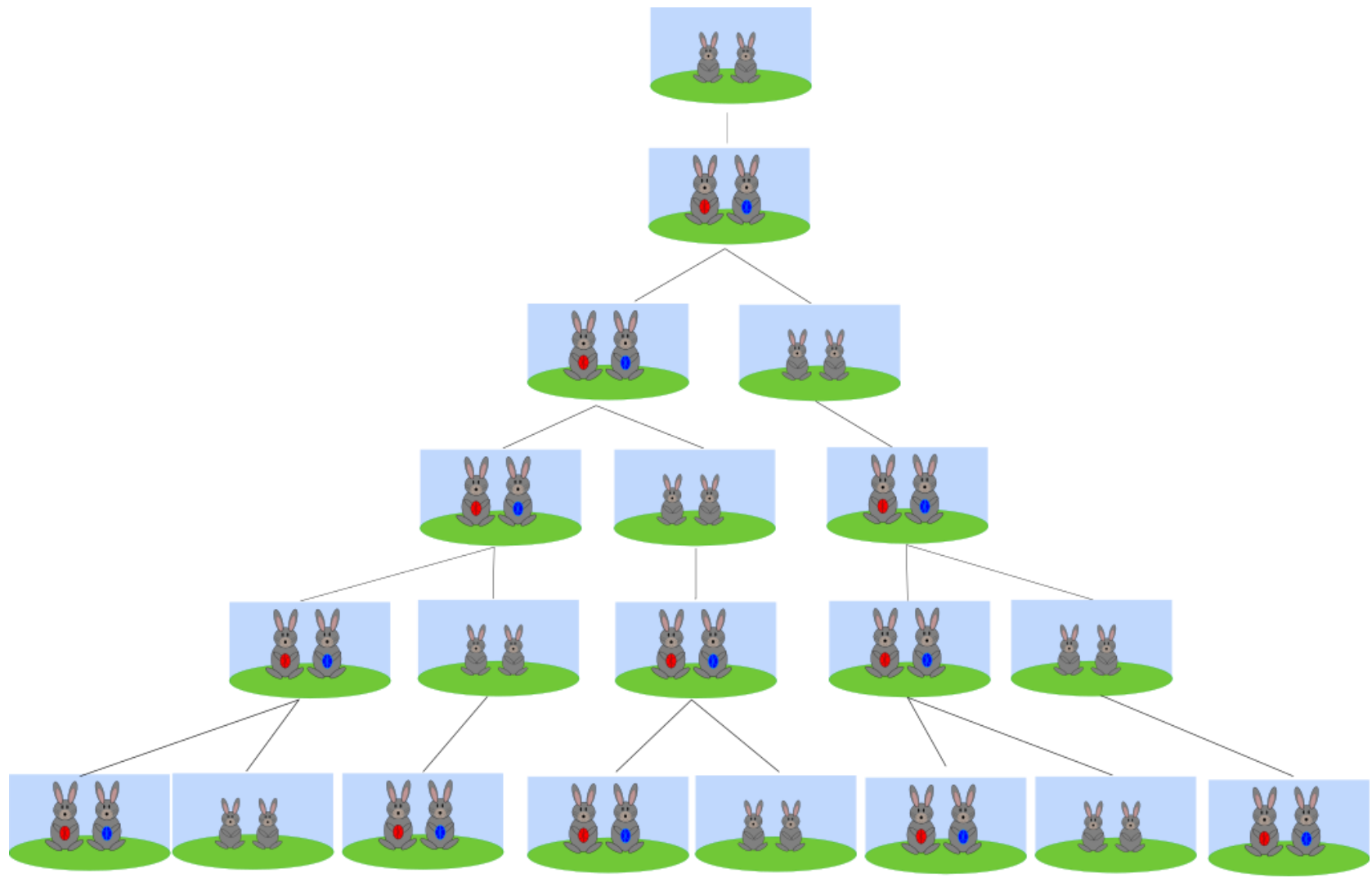
Růst populace králíků

Předpokládejme populaci králíků, která roste za následujících podmínek:

- První měsíc se narodí jediný pár.
- Nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života.
- Každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár.
- Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.

Jaká bude velikost populace po n měsících?

- $F_1 = 1, F_2 = ?, \dots$



Fibonacciho čísla

Fibonacciho posloupnost: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ kde } F_0 = 0, F_1 = 1$$

- Italský matematik Leonardo Pisano Bonacci (1175-1250) – popsání růstu populace králíků

Číslo $F(n)$ popisuje velikost populace po n měsících, pokud předpokládáme, že

- První měsíc se narodí jediný pár.
- Nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života.
- Každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár.
- Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.

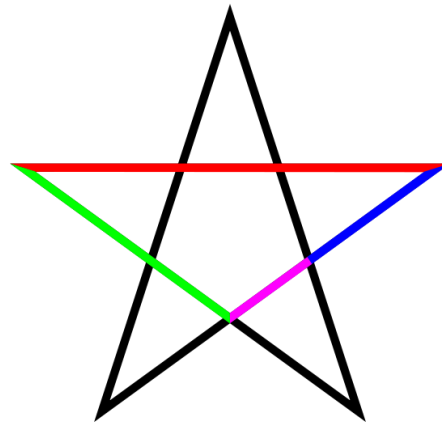
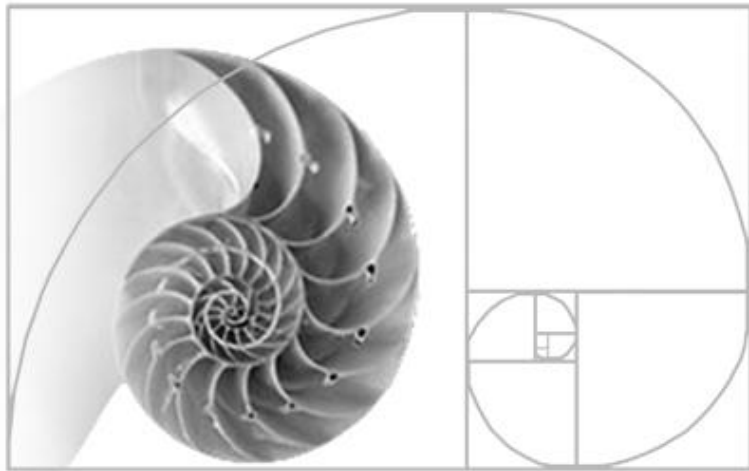
Zlatý řez kolem nás

Poměr velikostí dvou po sobě jdoucích komůrek ulity některých plžů

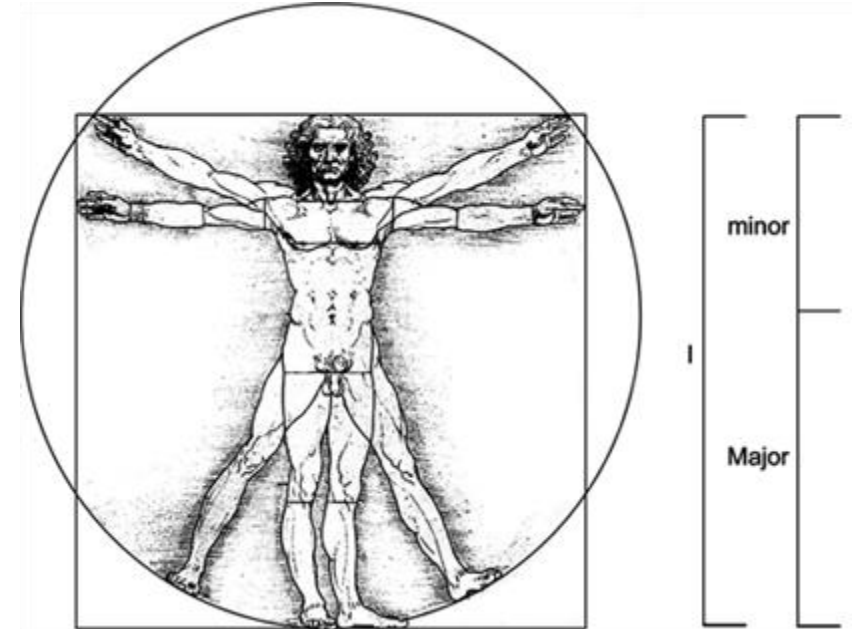
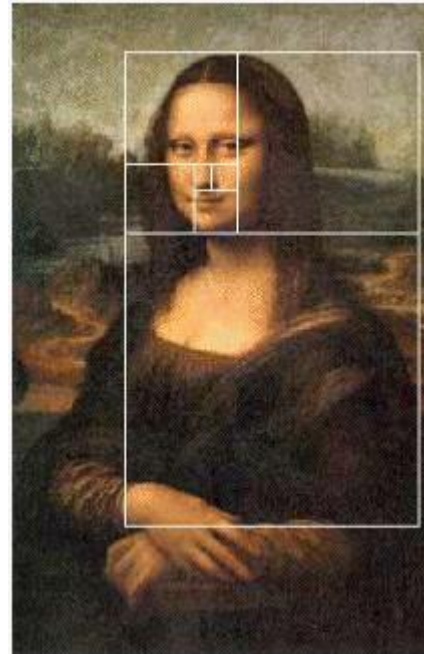
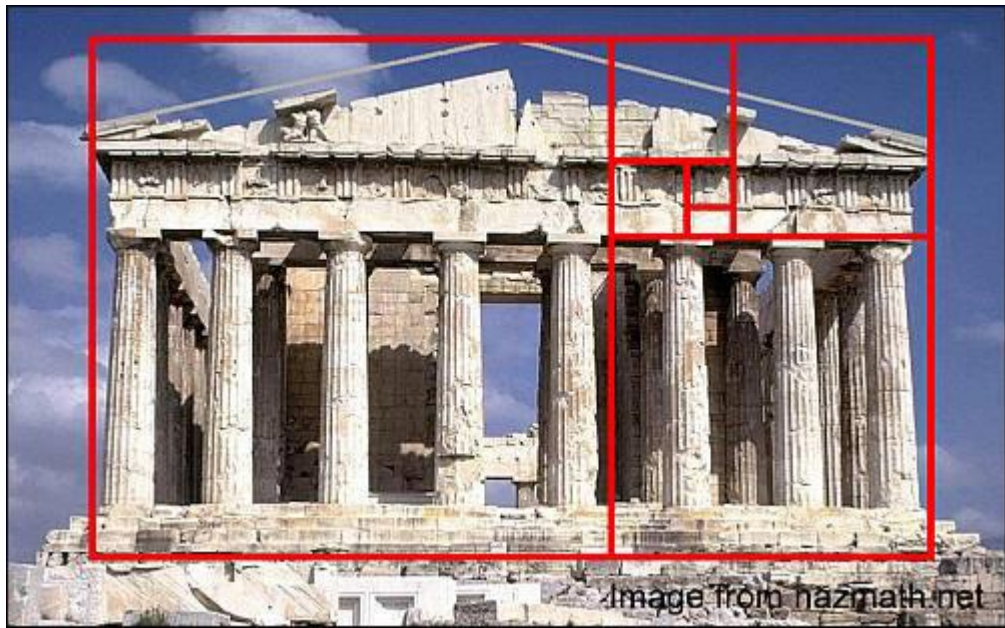
Pentagram - vzdálenosti mezi vrcholy jsou v poměru zlatého řezu.

Šupiny borových šišek tvoří podobné spirály jako semena sunečnice

V umění a fotografii je pokládán za ideální proporci mezi různými délkami.



Zlatý řez kolem nás



Athény: Parthenon

L.eonardo da Vinci: Mona Lisa a ideální postava

Literatura

Ian Stewart: Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta

<https://www.knihydobrovsky.cz/neuveritelna-cisla-profesora-stewart-147638523>

L. Příbylová: Fibonacciho posloupnost, Přírodovědecká fakulta MU

<http://www.math.muni.cz/~pribylova/Fibonacci/MathINNature.pdf>

Fibonacci number

https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

Golden ratio

https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio

M. Jarošová: Fibonacciho čísla a jejich souvislost s jinými matematickými pojmy, 2017