Výpočet Ludolfova čísla π – Buffonova úloha o jehle

Autor: Zdeněk Kadeřábek

Anotace:

Vzdělávací materiál je vytvořen především jako rozšíření výuky pro nadanější studenty. Pracovní list lze také využít jako zpestření výuky po probrání obvodu a obsahu kruhu, iracionálních čísel nebo pravděpodobnosti. Studenti se zde seznámí s jiným způsobem řešení matematických problémů než jsou zvyklí z klasické hodiny. QR kódy motivují studenty k dalšímu zamyšlení se nad řešenými problémy.

Pracovní list je určen pro starší studenty ZŠ a studenty SŠ. Časová délka materiálu odpovídá jedné vyučovací hodině.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

Výpočet Ludolfova čísla π

Ludolfovo číslo je matematická konstanta udávající poměr obvodu kruhu k jeho průměru. Jeho hodnotu lze snadno nalézt například měřením obvodu a průměru mince

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Už žáci na základní škole rychle zjistí, že π je konstanta, protože jim vychází stejná hodnota uvedeného poměru bez ohledu na velikost mince.

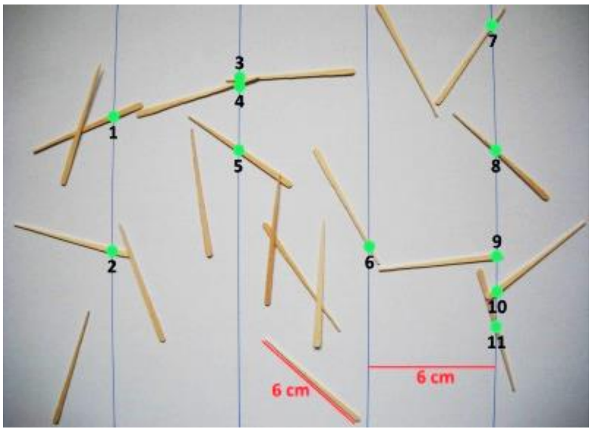
- Pro odhad hodnoty π lze využít vepsaného pravidelného n-úhelníku do kružnice, viz animace v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/fhgfhyjj

Lze určit hodnotu Ludolfova čísla pomocí náhody?

Představme si rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžky a jejichž vzdálenost je d. Na tuto rovinu házíme náhodně jehlu délky $l, l \leq d$. Ptáme se: Jaká je pravděpodobnost, že jehla přetne některou z rovnoběžek?

Takto zní slavná matematická úloha, kterou v roce 1777 vymyslel francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon a je známá pod názvem **Buffonova úloha o jehle**. Nejpozoruhodnější na tomto jevu je, že při dostatečném počtu hodů jehlou umožňuje spočítat přibližnou hodnotu čísla π.

Rozbor úlohy:



Pravděpodobnost, že hozená jehla dopadne na čáru, spočítáme takto:

$$P = \frac{v}{n} = \frac{\text{počet průsečíků jehly s linkou}}{\text{počet hodů}}$$

Pro $l \approx d$ dostaneme $P = \frac{2l}{\pi d}$, z čehož při dosazení z prvního vztahu pro *P* dostáváme $\boldsymbol{\pi = \frac{2ln}{vd}}$.

Platí, že čím více hodů provedeme, tím bude odhad hodnoty π přesnější (přibližování se k přesné hodnotě není moc rychlé).

Video: Buffon's needle experiment
https://www.youtube.com/watch?v=3VHp_E5FfQM

Pozn.: Například Volf v roce 1850 provedl 5 000 hodů a dostal pro π odhad 3.1596. Problém Buffonovy jehly poprvé převedl do praxe Lazaroni v roce 1901, když provedl 34 080 hodů jehlou a došel k hodnotě $\pi = 3.1415929$. Po zavedení počítačů se však naskytla příležitost tento pokus nasimulovat na počítači a rychlost „pokusů" o několik řádů zrychlit. Metoda řešení matematických úloh pomocí modelování náhodných veličin a statistického odhadu se nazývá **metodou Monte Carlo**.

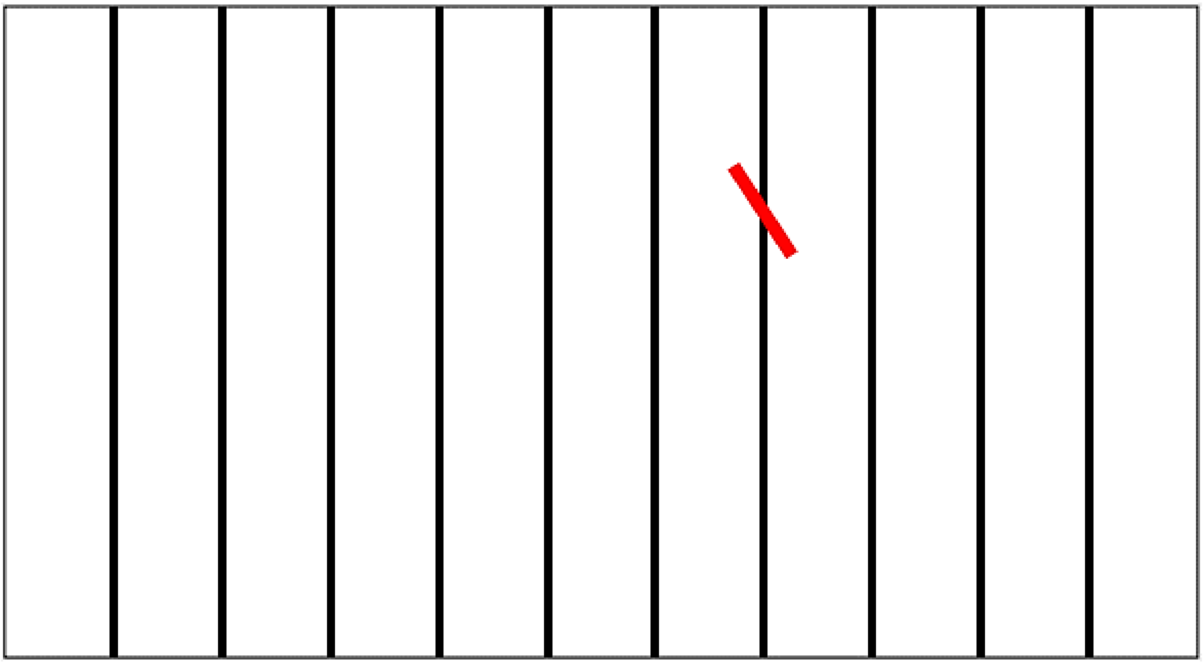
Pravděpodobnost jevu, kdy jehla stejné délky, jako je vzdálenost mezi rovnoběžkami, po dopadu na papír zůstane ležet na papíře tak, že protíná některou z linek je rovna $\frac{2}{\pi}$.

Nyní už zbývá vzít si linkovaný papír, tyčku přibližně stejné délky jako jsou mezery mezi linkami a začít náhodně házet. Jaká hodnota π Ti vychází?

Při výpočtu využij vztah pro pravděpodobnost: $P = \frac{2}{\pi} = \frac{\text{počet průsečíků jehly s linkou}}{\text{počet hodů}}$

Jak vyjádřit hodnotu π?

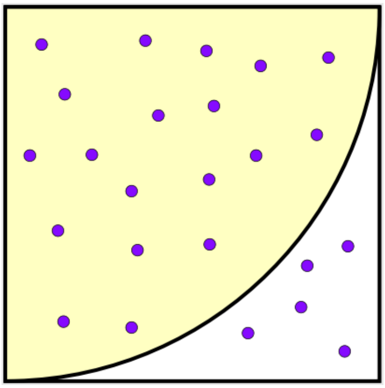
Kolik Ti vyšla přibližná hodnota? Jak výsledek zpřesnit?



- Pokud nemáte tyčku, lze využít i animaci v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/cmzHmeJ9
- **Rozšiřující video:** Estimate π with pasta? Why is pi here? Buffon's noodle problem (3blue1brown) https://www.youtube.com/watch?v=e-RUyCs9B08

Podobně lze stanovit hodnotu Ludolfova čísla π pomocí následujícího příkladu. Řešení této jednodušší úlohy nám objasní, jak lze uvažovat při řešení Buffonovy úlohy.

Příklad: Narýsujme čtverec o straně délky *r* a do něj čtvrtkruh se středem v jednom rohu čtverce s poloměrem také *r.* Nyní házejme náhodně kuličky do čtverce a výsledný poměr počtu všech hodů a hodů do čtvrtkruhu stanoví hodnotu π.



- **Nápověda:** Při náhodném dopadu kuličky bude pravděpodobnost dopadu do určitého místa úměrná velikosti dané plochy.

Napadá Tě, jak vypočítat pravděpodobnost a hodnotu π?

Výpočet:

Jaké jsou obsahy jednotlivých ploch?

Jak vypočítat pravděpodobnost dopadu do čtvrtkruhu? $P = \frac{\quad}{\quad}$

Co platí pro Ludolfovo číslo π?

Jaké jsou Tvé výsledky?

$P = \frac{\text{počet hodů do čtvrkruhu}}{\text{počet hodů}} = \text{výsledná pravděpodobnost z výpočtu}$

Jaká vychází hodnota π?

Zdroje:

- Joan Gómez – Neeuklidovské geometrie (když se přímky zakřivují), str. 105-107
- Š. Voráčová – Animace v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/fhgfhyjj
- Buffonova jehla v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/vnAZxxzN nebo https://www.geogebra.org/m/cmzHmeJ9
- Rozšiřující prezentace prof. Ing. Martin Krejsa, Ph.D., FAST VŠB Ostrava: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ppk_tema03.pdf
- Rozšiřující videa:
    - Buffon's needle experiment https://www.youtube.com/watch?v=3VHp_E5FfQM
    - Estimate π with pasta? Why is pi here? Buffon's noodle problem (3blue1brown) https://www.youtube.com/watch?v=e-RUyCs9B08

Rozbor příkladu:

- Obsah čtverce je $S_1 = r^2$
- Obsah čtvrtkruhu je $S_2 = \frac{\pi r^2}{4}$

Pravděpodobnost, že kulička náhodně dopadne do čtvrtkruhu je dána poměr obsahů jednotlivých ploch: $P = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi}{4}$

--> **Pro Ludolfovo číslo platí $\boldsymbol{\pi = 4 \cdot \frac{S_2}{S_1}}$**, kde počet hodů do čtvrtkruhu je S_2 a celkový počet hodů S_1.