Úvod do teorie her

Autor: Zdeněk Kadeřábek

Anotace:

Vzdělávací materiál vychází z diplomové práce Aleny Skálové: Teorie her pro nadané žáky středních škol. Tento materiál slouží jako pracovní list pro zpestření výuky a představení oblasti matematiky, která není součástí povinných osnov SŠ. Studenti se zde seznámí s jiným způsobem řešení matematických problémů než jsou zvyklí z klasické hodiny. QR kódy motivují studenty k dalšímu zamyšlení se nad řešenými problémy.

Pracovní list je určen pro starší studenty ZŠ a studenty SŠ. Časová délka materiálu odpovídá jedné vyučovací hodině. Za zdroji je umístěn postup řešení úloh z uvedené diplomové práce.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

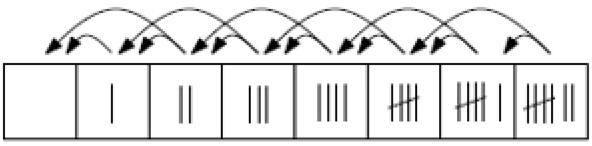
Úvod do teorie her

Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů. Teorii her založil jeden z předních matematiků John von Neumann.

Hra je matematický model rozhodovací situace, jejíž výsledek závisí na rozhodnutí alespoň dvou různých hráčů. Protože takové situace můžeme nalézt téměř ve všech oblastech týkajících se našeho života, obor aplikací teorie her je mimořádně široký a bohatý. Zahrnuje ekonomii, telekomunikace, politologii, sociologii, biologii, etiku, dopravu a mnoho dalších oblastí.

Hra 1: Sedm sirek
Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

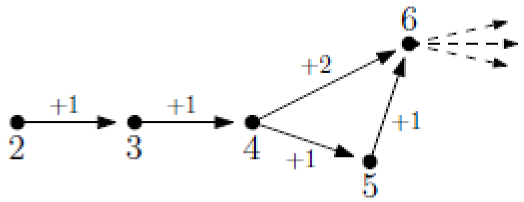
Počty sirek s možnými tahy:



Hra 2: Ořechy
V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

Hra 3: Přičítání dělitelů (kradení strategií)
Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele. Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

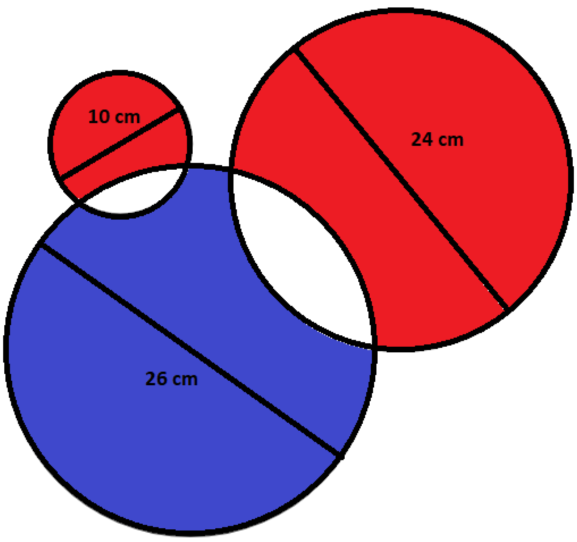
Řešení. Nakresleme si, jak vypadá prvních pár pozic, viz obrázek.



Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízy, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Pokud je prohrávající, pak začínající hráč, který je na řadě rovněž v pozici 4, bude volit přičtení dvojky, čímž se druhý hráč dostane do prohrávající pozice 6.

Na druhou stranu, je-li pozice 6 vyhrávající, pak začínající hráč může z pozice 4 táhnout do pozice 5, odkud jeho protivník musí nutně táhnout do pozice 6, čímž se první hráč ocitl ve vyhrávající pozici. Tím jsme dokázali, že **první hráč má vyhrávající strategii – vždy si ji může pro sebe ukrást.**
[A. Skálová, Teorie her pro nadané žáky SŠ, str. 19]

Únik od tématu: Kruhy
Na obrázku jsou tři kruhy se zadaným průměrem. Je větší červená nebo modrá plocha? Vypočítejte, o kolik se barevné plochy liší.



Chcete se dozvědět více o teorii her v praxi? Podívejte se na následující přednášku nebo Vězňovo dilema.

- Teorie her v praxi - Branislav Bošanský,
  https://www.youtube.com/watch?v=WH-H0a_wlK8

- Vězňovo dilema, Radek Pelánek
  https://www.youtube.com/watch?v=iOiuQJibkQE

  Představte si, že jste uvězněn spolu s vaším komplicem, jste držen každý zvlášť a jste zvlášť vyslýcháni. Máte možnost vypovídat proti tomu druhému nebo mlčet.
  Policie na vás skoro nic nemá, a pokud se oba svorně rozhodnete mlčet, dostanete oba tak akorát podmínku. Pokud však pomůžete vašeho kolegu usvědčit, půjde on sedět na deset let a vy vyváznete bez trestu. Totéž platí i v opačném případě. A pokud se rozhodnete oba vypovídat proti tomu druhému, půjdete sedět na pět let oba. Jak se rozhodnete?

  Hra na toto téma spočívá v tom, že se proti sobě postaví dva algoritmy na předem neznámý počet kol a mají hrát tak, aby maximalizovaly svůj zisk při nějakém bodovém ohodnocení jednotlivých tahů. --> https://php.vrana.cz/veznovo-dilema.php

Zdroje:

Hry a jejich řešení je převzato z diplomové práce **Teorie her pro nadané žáky středních škol, Alena Skálová**, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/

Přednáška z teorie her, Magdalena Hykšová,
https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/hyksova.pdf

Video:

- Teorie her v praxi, Branislav Bošanský
  https://www.youtube.com/watch?v=WH-H0a_wlK8
- Vězňovo dilema, Radek Pelánek
  https://www.youtube.com/watch?v=iOiuQJibkQE
  Jakub Vrána, Vězňovo dilema a programování,
  https://php.vrana.cz/veznovo-dilema.php

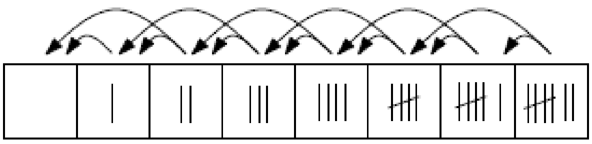
Řešení

Hra 1: Sedm sirek

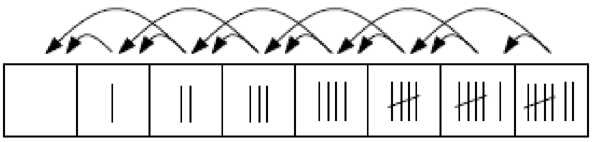
Postup řešení naleznete na str. 14 v diplomové práce A. Skálové, Teorie her pro nadané žáky středních škol, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/, viz obrázek níže.

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

Řešení. Nakresleme si možné počty sirek včetně možných tahů z jednotlivých pozic – viz následující obrázek.

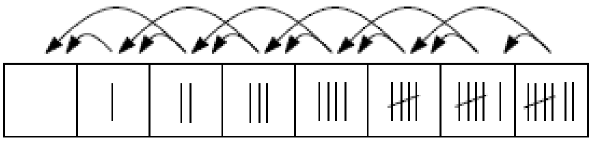


Koncová pozice je v této hře jediná (na stole nezbyla žádná sirka) a podle pravidel je prohrávající. Můžeme si to poznačit do nákresu.



P

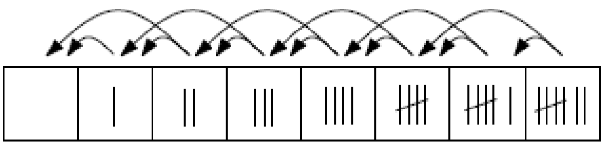
Pokud na stole zbývá jedna nebo dvě sirky, může je hráč ve svém tahu všechny odebrat a tím vyhrát (jeho soupeř se dostane do pozice, o které už víme, že je prohrávající).



P V V

Zbývají-li na stole tři sirky, pak hráč nemá jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice (což jistě potěší jeho protihráče), a tedy tři sirky jsou prohrávající pozice.

Z hromádky čtyř, resp. pěti sirek lze odebrat jednu, resp. dvě a tím se dostat do prohrávající pozice – proto jsou obě tyto pozice vyhrávající. Podobně si můžeme rozmyslet, že šest sirek je prohrávající pozice a sedm vyhrávající.



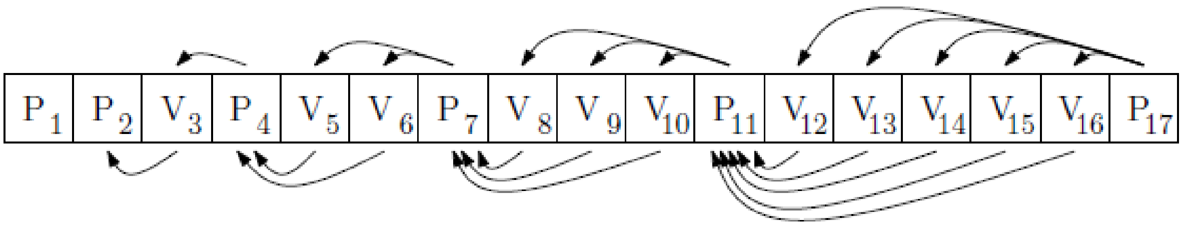
P V V P V V P V

Po označení V a P pozic v této hře je ihned patrná vyhrávající strategie prvního hráče – hraj tak, aby protihráči zbyly na stole sirky v počtu násobků tří. ♠

Hra 2: Ořechy

Postup řešení naleznete na str. 27 v diplomové práce A. Skálové, Teorie her pro nadané žáky středních škol, https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/, viz obrázek níže.

Úloha 1. Úlohu budeme řešit podobně jako v seriálu. Nakresleme si možné pozice (počty ořechů) – viz následující obrázek. Postupně určíme, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající.



Již ze zadání víme, že pozice s jedním a dvěma ořechy jsou prohrávající, neboť pokud bychom z nich chtěli táhnout, mohli bychom sníst maximálně $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{2}{3}$ ořechu, ale protože můžeme jíst pouze celé ořechy, nemůžeme nic sníst, tedy nemáme tah a prohráli jsme. Pozice 3 je vyhrávající, protože se z ní umíme dostat do pozice 2, která je prohrávající. Pozice 4 je prohrávající, protože se z ní umíme dostat jen do vyhrávající pozice 3, a ze stejného důvodu jsou prohrávající i pozice 7, 11 a 17 – viz odpovídající tahy na obrázku. Vyhrávající strategii má druhý hráč, tedy Filip, a to držet Míšu vždy na prohrávajících pozicích.[14]

Kruhy

Odpověď: 0

Označme bílé plochy X, Y. Pak platí, že $\pi \cdot 13^2 - X - Y - (\pi \cdot 12^2 - X + \pi \cdot 5^2 - Y) = 169\pi - 144\pi - 25\pi = 0$.