Hrátky s Geogebrou

Posouvání a deformování obrázků pomocí matic

Autor: Zdeněk Kadeřábek

Anotace:

Vzdělávací materiál se skládá ze dvou částí – na začátku je pracovní list shrnující základní návody a úlohy pro studenty, v druhé části je návodná část vysvětlující praktické využití lineárních transformací v Geogebře. Materiál nepodává ucelený výklad k lineárnímu zobrazení, ale spíše podporuje u studentů objevování vlastností transformací prostřednictvím deformováním a posouváním obrázků v Geogebře. Cílem materiálu je zpestřit výuku prostřednictvím propojení matematiky s informatikou (transformace obrazu), případně rozšířit výuku nadanějším studentům.

Naším hlavním nástrojem je Geogebra, v které využíváme funkce posunutí a lineárního zobrazení (transformace). QR kódy s animacemi motivují studenty k podrobnějšímu zamyšlení nad řešenými problémy.

Pracovní list je určen pro starší studenty ZŠ a studenty SŠ. Pracovní list je vhodné zařadit po seznámení maticového řešení soustav rovnic, po probrání shodných a podobných zobrazení v planimetrii nebo rozšířit pojem funkce na SŠ. Časová délka materiálu odpovídá 2 – 3 vyučovacím hodinám. Za zdroji je umístěn postup řešení úkolů.

Klíčová aktivita „Podpora gramotností", část „Matematická gramotnost” je realizována v rámci projektu Implementace KAP JMK II, registrační číslo CZ.02.3.68/0.0/0.0/19_078/0017177 v rámci Operačního programu Výzkum, vývoj a vzdělávání, s finanční podporou z Evropské unie a Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy.

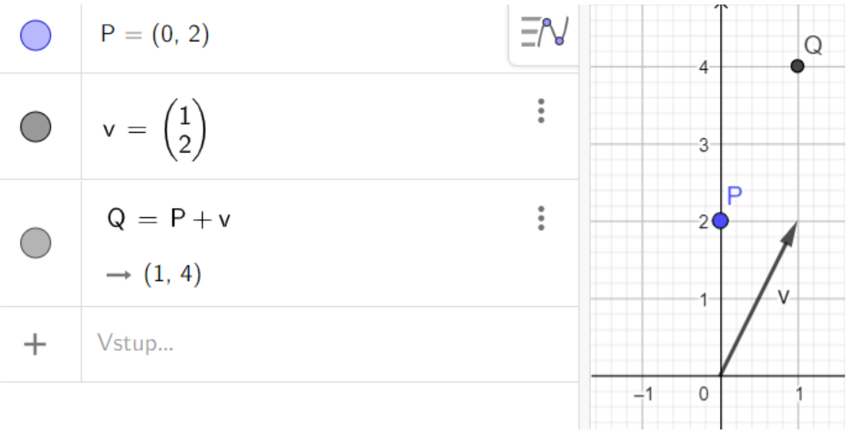
Pracovní list – Hrátky s Geogebrou

Posouvání a deformování pomocí matic

Přemýšleli jste někdy nad tím, jak se tvoří fraktály? V obrázku se opakuje neustále jeden vzor, který tvoří soběpodobnou strukturu. V tomto materiálu se naučíme vytvářet různě deformované a posunuté obrazy v rovině. Nejprve se seznámíme s Geogebrou při posouvání bodů a následně využijeme matice ke komplexnějším operacím. Vše je vysvětleno v teoretické části.

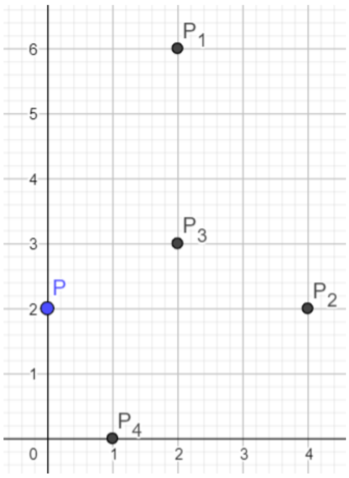
Lineární transformací se v matematice označuje takové zobrazení mezi vektorovými prostory, které zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Lineární zobrazení umožňuje popsat rotace, zvětšování, zmenšování, natahování, zrcadlení podle počátku či zrcadlení podle osy.

Návod k posunutí bodu



1: Geogebra Klasik

Úkol 1: Objevte v Geogebře, jaký vektor musíte využít, abyste dostali následující obrazy bodu P.



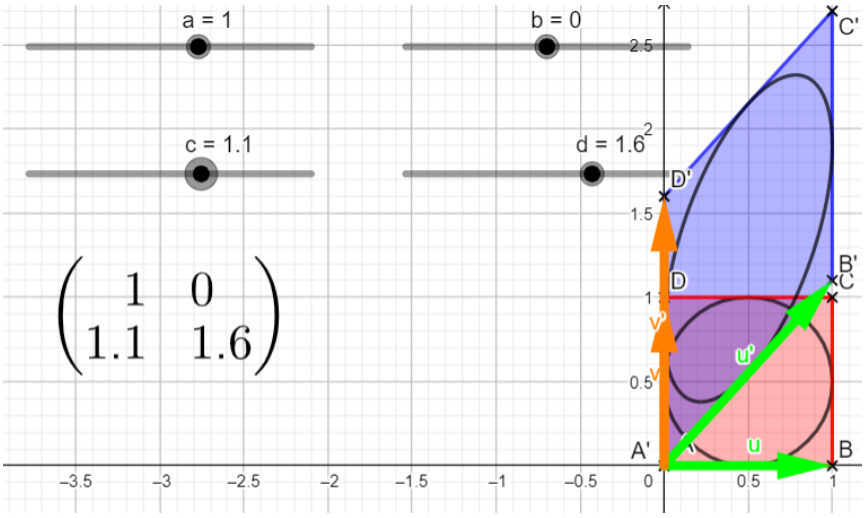
$$P_1 = P + (2, \dots)$$

$$P_2 = P + (\dots, 0)$$

$$P_3 = P + (\dots, \dots)$$

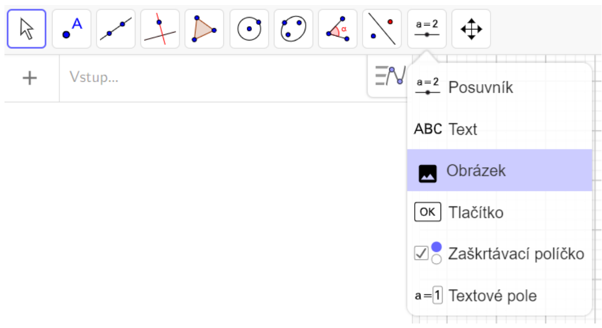
$$P_4 = P + (\dots, \dots)$$

Vyzkoušejte si transformace v následující animaci https://www.geogebra.org/m/qhj4sgfd



Návod k transformaci obrázku

Nejprve je nutné vložit obrázek na nákresnu, což není složité pomocí nástroje ukrývajícího se na předposledním poli nabídky, viz obrázek.



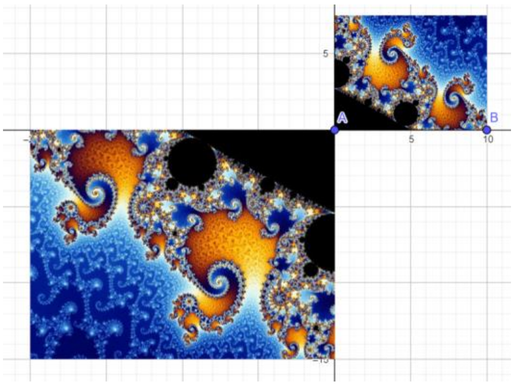
1. Po **vložení obrázku**, který je nazván *obrázek1*, **vložíme naši matici**, kterou budeme podle potřeby upravovat: *m={{2, 0}, {0, -0.5}}*
    - Středová souměrnost podle počátku a komprese ve směru y na polovinu je dána hodnotou -0.5.
    - Protažení obrázku ve směru x na dvojnásobek udává 2.
2. Aplikujeme naši matici na zvolený obrázek příkazem: *PouzitiMatice (m,obrázek1)*

Základní transformační matice

- Zrcadlení podle osy y: $Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Středová souměrnost podle počátku: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Rotace o úhel φ: $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- Zvětšení/zmenšení
    - k-násobné prodloužení $V_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, k-násobné zkrácení $V_{\frac{1}{k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$

Úkol 2: Najděte pomocí Geogebry matice transformace, které odpovídají následujícím obrázkům. Vše si vyzkoušejte na svém obrázku.

a)



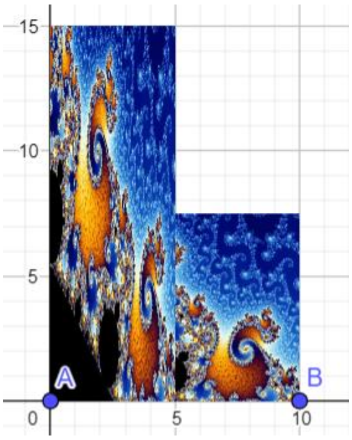
Slovní popis:

•

•

$$m = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

b)



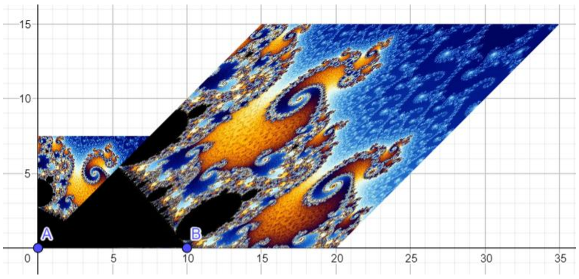
Slovní popis:

•

•

$$m = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

c)



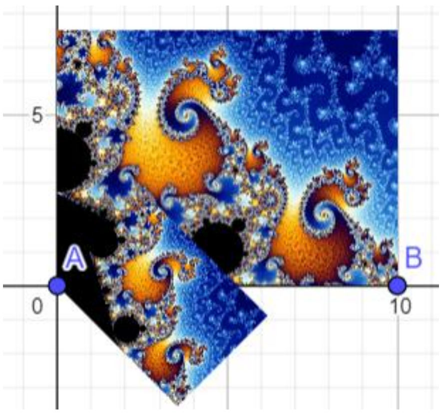
Slovní popis:

•

•

$$m = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

d)



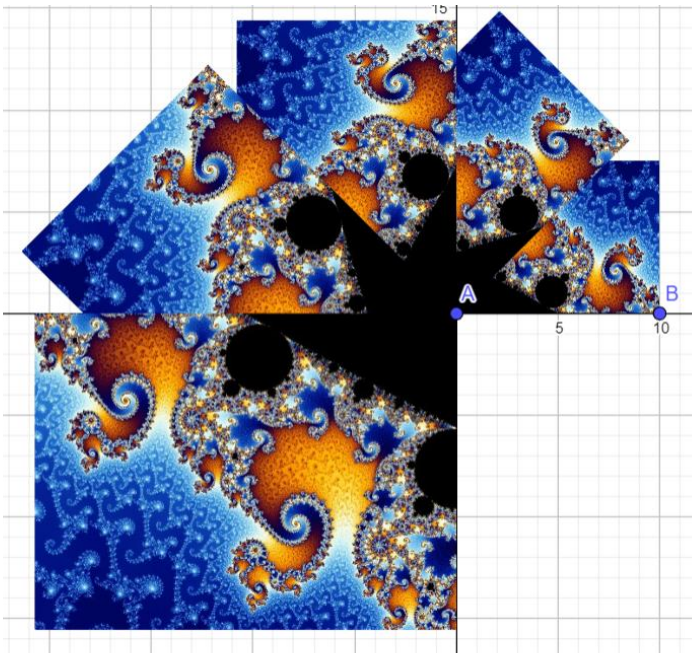
Slovní popis:

•

•

$$m = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Úkol pro zvídavé: Zkuste si vyrobit spirální obrázek podobný následujícímu. Budete muset aplikovat matici několikrát na výsledný obraz.



Rozšiřující videa:

- Fraktální geometrie
  https://www.youtube.com/watch?v=wNsHMo06LZc
- Mandelbrotova množina
  https://www.3blue1brown.com/lessons/holomorphic-dynamics

Teoretická část: Hrátky s Geogebrou
Posouvání a deformování obrázků pomocí matic

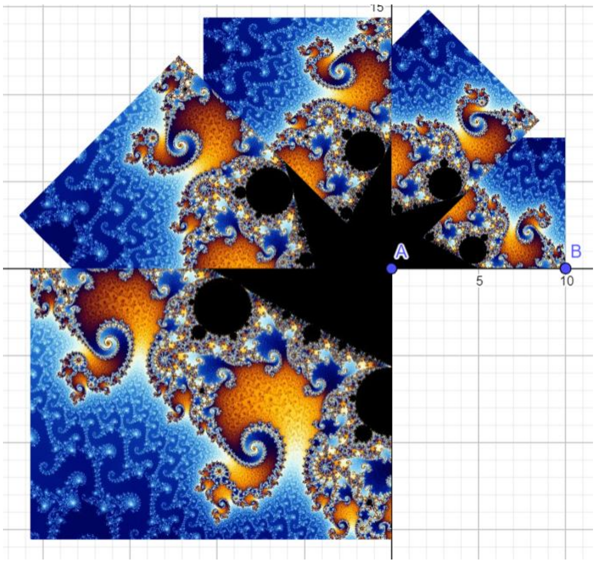
Přemýšleli jste někdy nad tím, jak se tvoří fraktály? V obrázku se opakuje neustále jeden vzor, který tvoří soběpodobnou strukturu. V tomto materiálu se naučíme vytvářet různě deformované a posunuté obrazy v rovině. Nejprve si osaháme Geogebru při posouvání bodů a následně využijeme matice ke komplexnějším operacím.

Chceš se dozvědět něco více o maticích? Koukni na následující video.

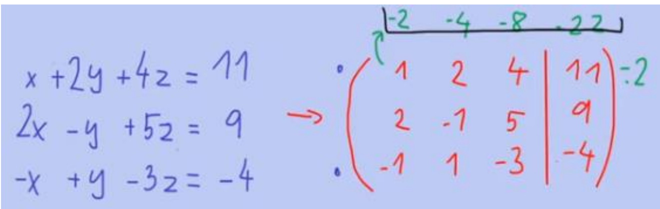
- Maticové operace (pro nás nejdůležitější je součin matic)
  https://onlineschool.cz/matematika/maticove-operace/

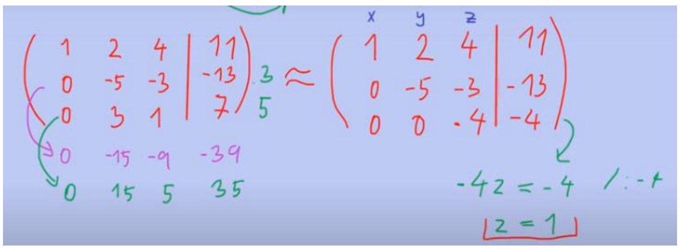
V materiálu budeme využívat nástroje v Geogebře, které se váží k pojmu lineární zobrazení (transformace). **Lineární transformací** se v matematice označuje takové zobrazení mezi vektorovými prostory, které zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Lineární zobrazení umožňuje popsat rotace, zvětšování, zmenšování, natahování, zrcadlení podle počátku či zrcadlení podle osy.

Líbí se vám obrázek níže? Po přečtení materiálu ho jistě zvládnete vytvořit.

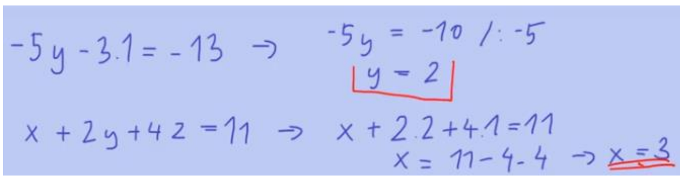


Poznámka: Někteří využívali **matice při řešení soustav rovnic**. Poznáváte následující výpočet? Pokud ne, můžete se podívat na následující video. V tomto materiálu takto pracovat s maticemi nebudeme.





- Rozšiřující video: Soustavy rovnic (Gaussova eliminační metoda)
  https://onlineschool.cz/matematika/soustavy-rovnic-pomoci-matic/



Seznámení s Geogebrou – posunutí

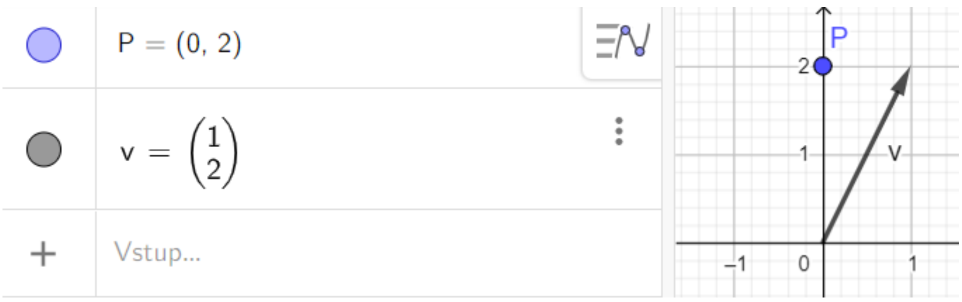
Než se dostaneme k lineárnímu zobrazení a využití matic, seznámíme se s příkazovým řádkem v Geogebře. Otevřte si Geogebru Klasik na https://www.geogebra.org/classic nebo využijte aplikaci v telefonu.

Při posunutí budeme využívat vektory. Velikost a směr vektoru je stejná jako velikost a směr orientované úsečky, která reprezentuje daný vektor. Souřadnicové vyjádření vektoru $\boldsymbol{v} = (x, y)$ nám vyjadřuje koncový bod vektoru, jestliže je vektor umístěn v počátku souřadnicového systému, viz výstup z Geogebry níže. Geogebra pod příkazem (x, y) zobrazuje právě tento koncový bod.

2: Geogebra Klasik

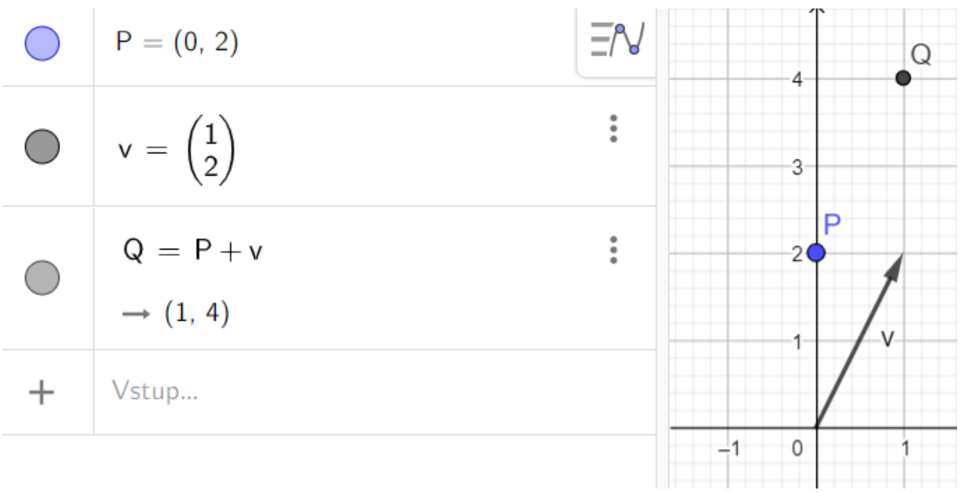
Posunutí bodu

1. Do souřadnicového systému umístěte bod příkazem *P = (0,2)* a vektor *v = (1,2).*



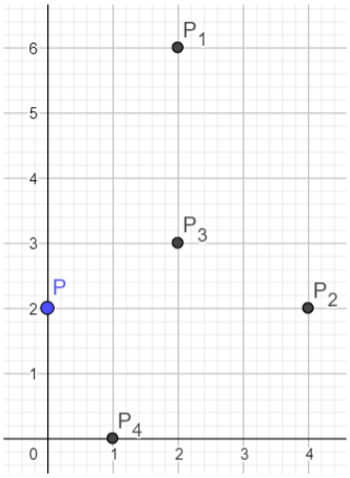
Poznámka:
- Popisky velkými písmeny značí v Geogebře body, zatímco malá písmena značí vektory.
- Souřadnice bodů Geogebra ponechává v řádku, u vektoru je zobrazí do sloupce.

2. Jak posuneme bod P o námi vytvořený vektor **v**, abychom dostali nový bod Q? Stačí zadat *Q = P +* ***v***.



Poznámka: První souřadnice vektoru **v** = (1,2) vyjadřuje, že jdeme od bodu P o 1 krok ve směru x, druhá souřadnice nás posouvá o 2 kroky ve směru y.

Úkol 1: Objevte v Geogebře, jaký vektor musíte využít, abyste dostali následující obrazy bodu P.



$$P_1 = P + (2, \dots)$$

$$P_2 = P + (\dots, 0)$$

$$P_3 = P + (\dots, \dots)$$

$$P_4 = P + (\dots, \dots)$$

Lineární transformace a využití matic

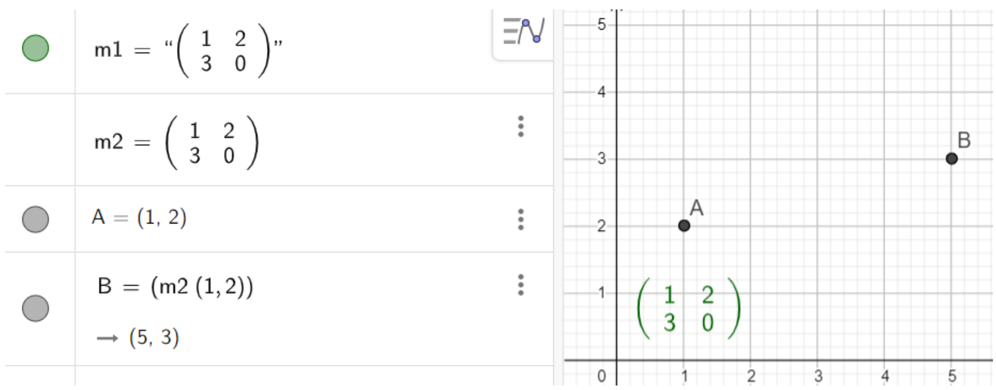
Podobně jako s vektory se pracuje v Geogebře i s maticemi, ale nabízejí nám mnohem větší využití pro transformaci objektů (vektor je speciálním typem matice). V následujícím postupu si zkuste osahat matice a později si řekneme více ke konkrétnímu využití.

Vložení matice a násobení vektoru s maticí

1. Matici vložíme příkazem: *{{1, 2}, {3, 0}}*
   První dvojice čísel nám udává hodnoty v prvním řádku matice, druhá dvojice v druhém řádku. Pro zobrazení matice na nákresně slouží příkaz: *Latex({{1, 2}, {3, 0}}).*

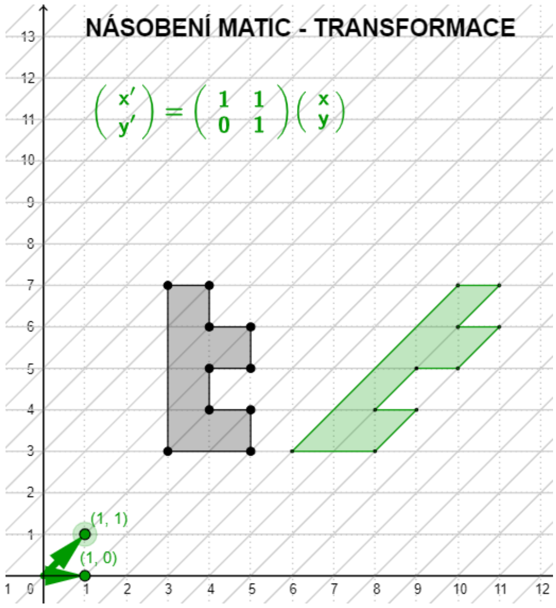
2. Nyní vložíme do Geogebry vektor příkazem *(1,2)*, což Geogebra vyhodnocuje jako zobrazení koncového bodu daného vektoru umístěného do počátku, proto vidíme bod A = (1,2).

3. Vynásobením naší matice s vektorem získáme obraz reprezentovaný koncovým bodem vektoru B. Lze použít příkazy: *{{1, 2}, {3, 0}}*(1,2)* nebo *m2*(1,2).*
   Druhý příkaz využívá názvu proměnných zavedených Geogebrou (název m1 nelze použít, protože se jedná o text na nákresně).



4. Zkuste se podívat, jak závisí poloha obrazu B na matici m1. Myší klikněte do matice v příkazovém řádku a změňte jednu nebo více hodnot.

Přišli jste na to, co jednotlivá čísla v matici dělají s obrazem bodu? Zkuste se podívat, co matice vytvoří za obraz, pokud ji využijeme při zobrazení rovinného objektu. V animaci si můžete vše pěkně osahat pomocí změny polohy vektorů v počátku: https://www.geogebra.org/m/hNBxBj9n

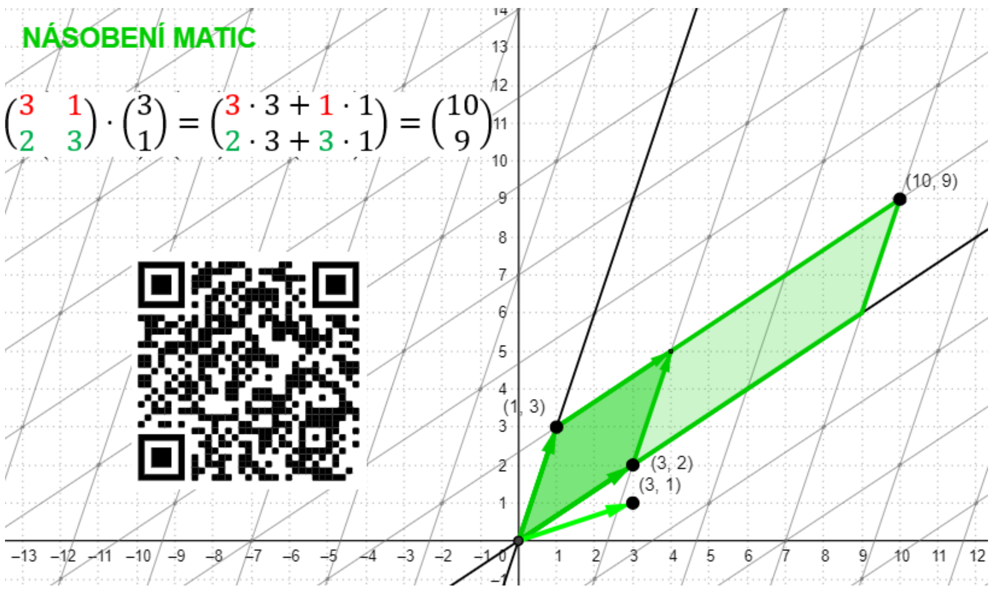


Poznámka: Násobení matic

- Vysvětlíme si pouze násobení dvou speciálních matic (matice transformace 2 x 2 a vektoru), které budeme dále potřebovat. První řádek přiložíme k sloupci s vektorem a vynásobíme podle obrázku, stejně tak budeme násobit s druhým řádkem.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- Grafické znázornění násobení naleznete zde (pohybem vektorů můžete měnit prvky součinu): https://www.geogebra.org/m/QzHrupaJ#material/pWMFt3WW

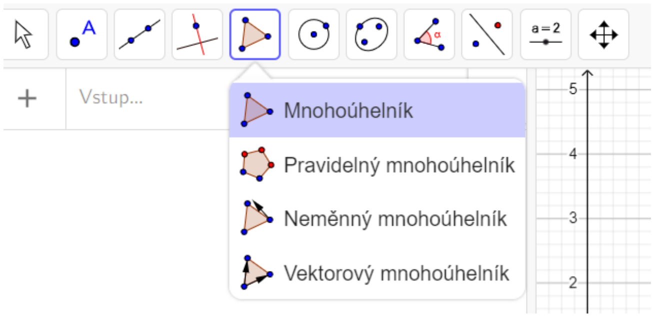


Jak vytvořit lineární transformaci objektu v Geogebře?

K vytvoření lineární transformace slouží příkaz *PouzitiMatice(<[[Matice)]>, <Objekt>],* který aplikuje matici na každý bod objektu ve stejném smyslu jako jsme dělali pomocí násobení maticí.

Zobrazení trojúhelníku

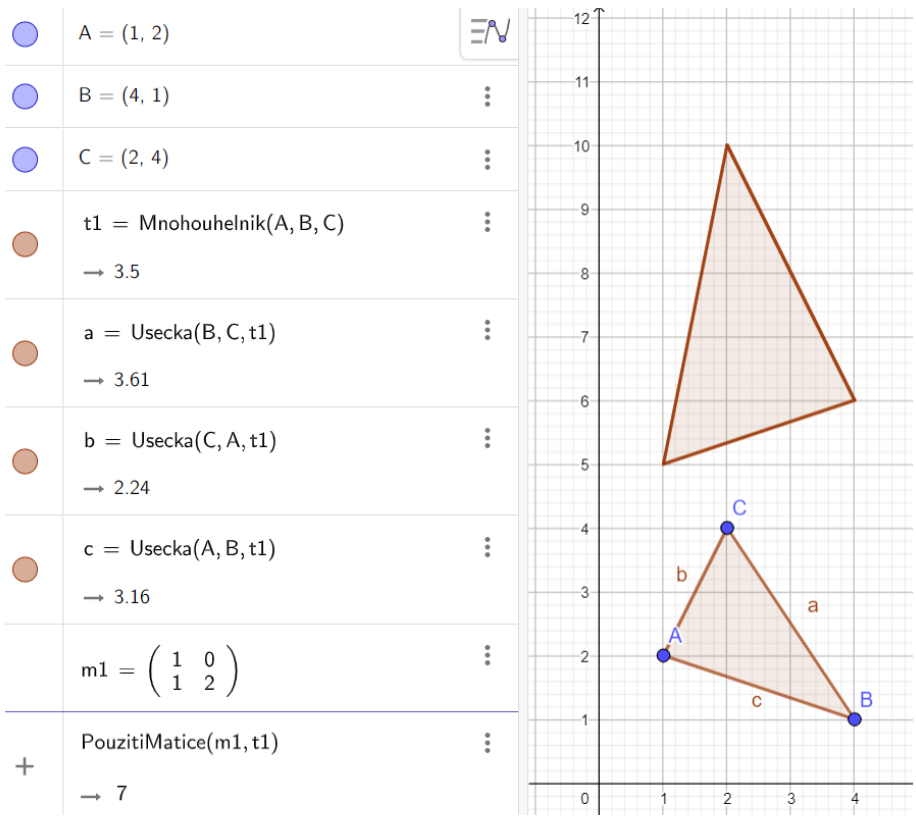
1. Pomocí myši a nástroje Mnohoúhelník vytvoříme libovolný trojúhelník ABC (pro ukončení tvorby mnohoúhelníku je nutné kliknout myší do počátečního bodu). Pomocí tří bodů vytvoříme trojúhelník ABC s názvem t1, viz výstup Geogebry vlevo od nákresny.



2. Dalším příkazem vložíme matici, abychom mohli pracovat s proměnou a měnit snadno její hodnoty: *{{1, 0}, {1, 2}}.*

3. Vložením posledního příkazu *PouzitiMatice(m1, t1)* získáme obraz trojúhelníku.

4. Vyzkoušejte si pomocí změny hodnot matice m1, jak se chová obraz trojúhelníku ABC.



Transformační matice a jejich zobrazení

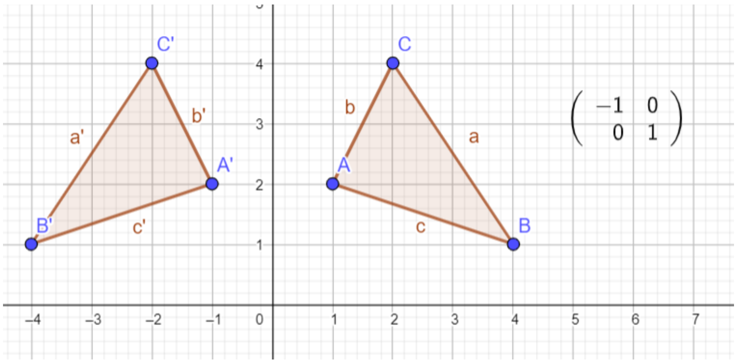
Lineární zobrazení zobrazuje bod se souřadnicemi (x, y) na obraz (x', y') prostřednictvím transformační matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.x + b.y \\ c.x + d.y \end{pmatrix}$$

Souřadnice obrazu bodu závisí na transformační matici. Rozeberme si základní matice a jejich zobrazení.

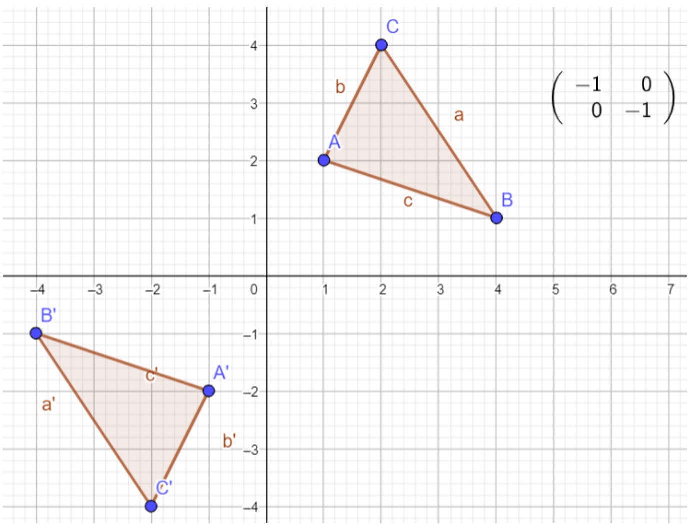
- **Identita:** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  Jednotková matice vytvoří obraz, který se překrývá se vzorovým objektem. Jde o identické zobrazení.
- **Zrcadlení podle osy y**: $Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  Po vynásobení touto maticí dostává x-ová souřadnice záporné znaménko a y-ová zůstává.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



- **Středová souměrnost**: $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  Předchozí zrcadlení podle vertikální osy vám napovědělo, že se jedná o středovou souměrnost podle počátku souřadnic.

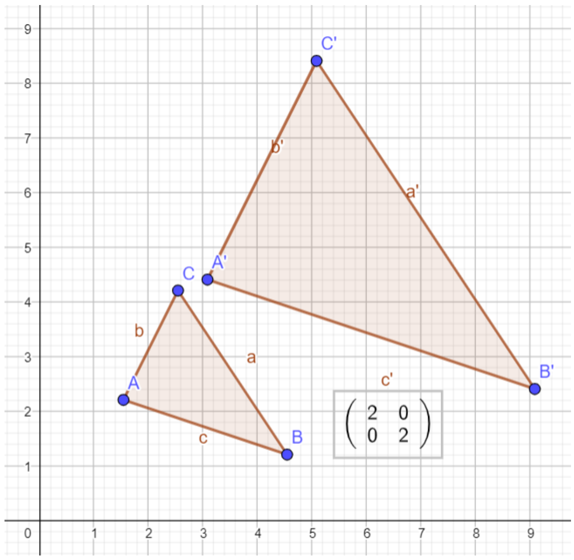
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



- **Zvětšení/zmenšení**: $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

  Všimněte si, že matice V protahuje všechny vzdálenosti roviny. Proto dostáváme dvojnásobný objekt a jednotlivé body obrazu jsou ve dvojnásobné vzdálenosti než u vzorového trojúhelníka.

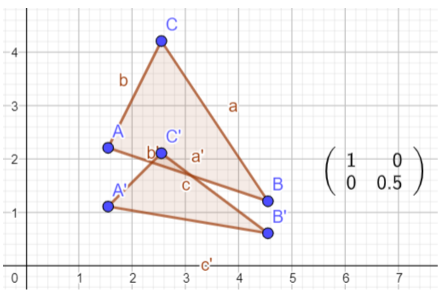
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

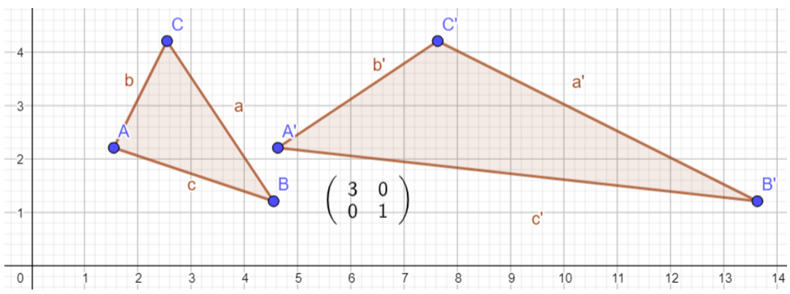


Můžete si všimnout, že existují zvětšující (zmenšující) matice, ale také matice, které protahují (zmenšují) jen v určitém směru.

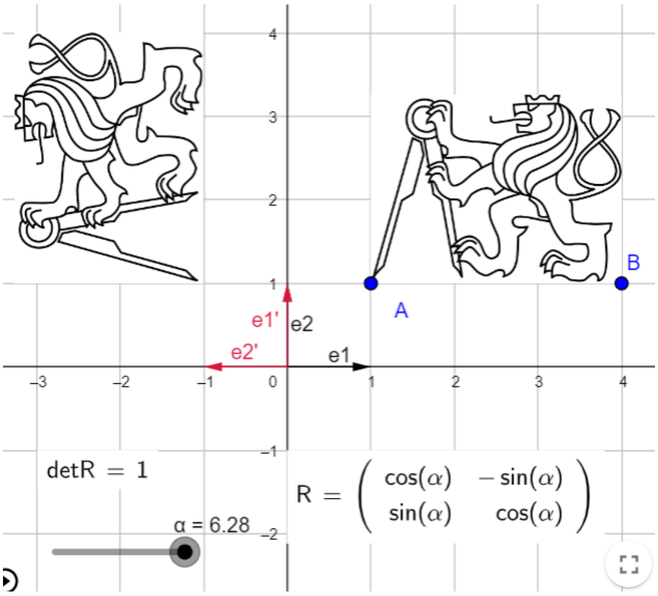
- k-násobné prodloužení $V_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- k-násobné zkrácení $V_{\frac{1}{k}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$
- k-násobné prodloužení (zkrácení) ve směru osy x $V_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- k-násobné prodloužení (zkrácení) ve směru osy y $V_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Protahování lze libovolně kombinovat a deformovat objekt různě v určitých směrech.



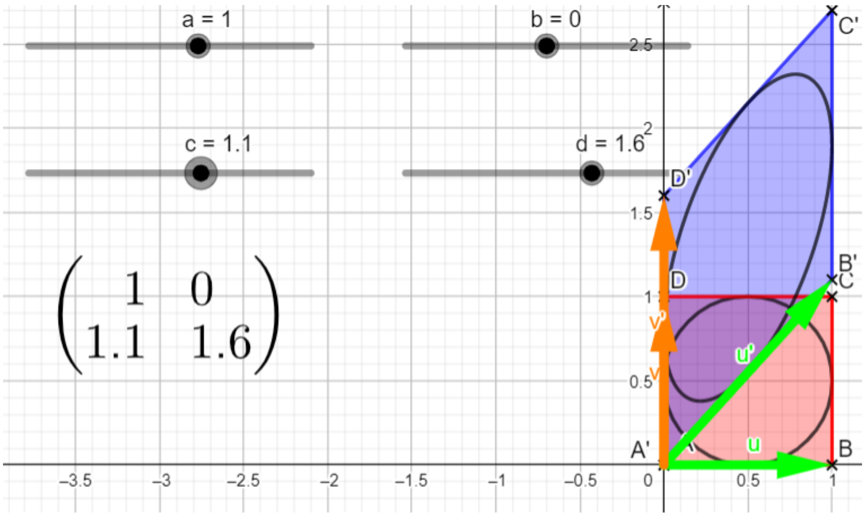


- **Rotace o úhel $\boldsymbol{\varphi}$:** $R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
  Otočení kolem počátku souřadnic o úhel φ vyjadřuje matice R. Tuto rotaci si vyzkoušjte prostřednictvím animace https://www.geogebra.org/m/BrAvB74d



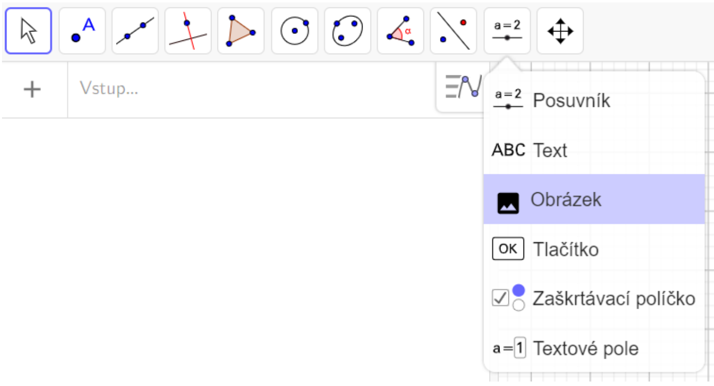
Ukázali jsme si typické transformační matice a kombinováním jednotlivých členů můžete docílit různých obrazů, např. otočené zmenšené logo, které bude roztažené pouze v daném směru.

Vyzkoušejte si transformace v následující animaci https://www.geogebra.org/m/qhj4sgfd



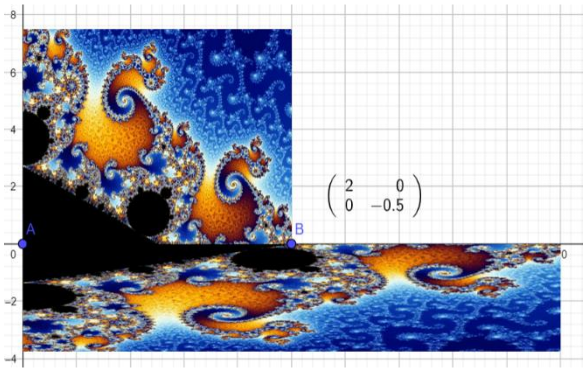
Lineární zobrazení obrázku

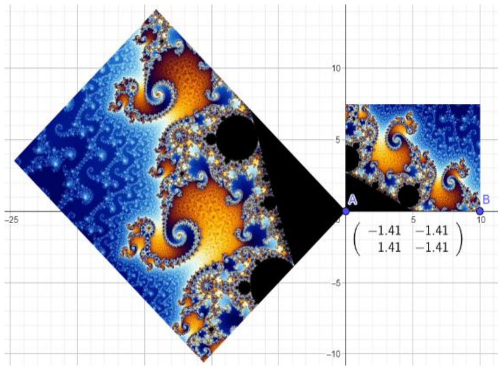
Využijme naše nové znalosti a zobrazme obrázek Mandelbrotovy množiny. Nejprve je nutné vložit obrázek na nákresnu, což není složité pomocí nástroje ukrývajícího se na předposledním poli nabídky, viz obrázek.



1. Po **vložení obrázku**, který je nazván *obrázek1*, **vložíme naši matici**, kterou budeme podle potřeby upravovat: *m={{2, 0}, {0, -0.5}}*
   - Středová souměrnost podle počátku a komprese ve směru y na polovinu je dána hodnotou -0.5.
   - Protažení obrázku ve směru x na dvojnásobek udává 2.

2. Aplikujeme naši matici na zvolený obrázek příkazem: *PouzitiMatice (m,obrázek1)*



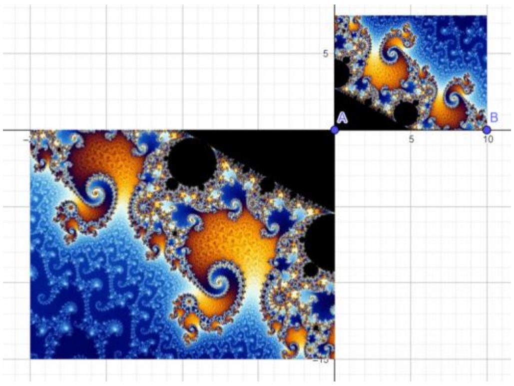


3. Změňte parametry matice *m* a vytvořte jiný obraz – obraz pootočený o 135° $\left(\frac{3\pi}{4}\ \text{rad}\right)$ a zvětšený dvakrát: *m={{2cos(3π/4),-2sin(3π/4)},{2sin(3π/4),2cos(3π/4)}}*

   Poznámka: Pro zadání hodnoty π slouží klávesová zkratka alt+P.

Úkol 2: Najděte pomocí Geogebry matice transformace, které odpovídají následujícím obrázkům.

a)

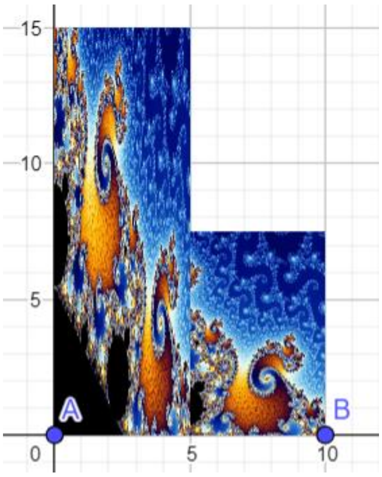


Slovní popis:

-
-

$$m = \left(\qquad \right)$$

b)

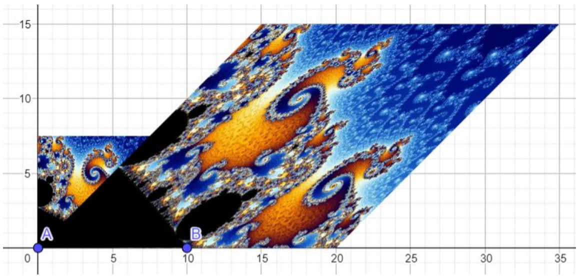


Slovní popis:

-
-

$$m = \left(\qquad \right)$$

c)

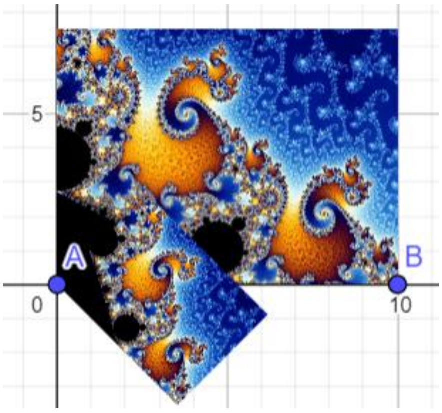


Slovní popis:

-
-

$$m = \left(\qquad \right)$$

d)

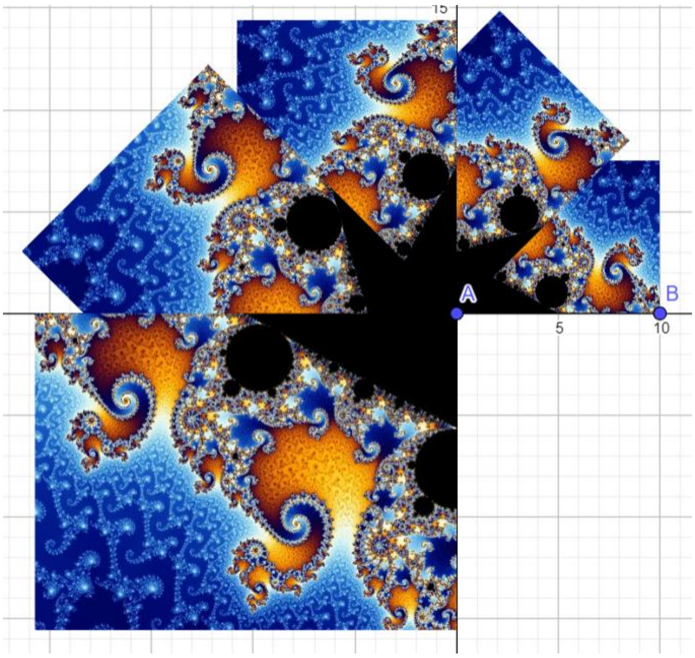


Slovní popis:

-
-

$$m = \left(\qquad \right)$$

Úkol pro zvídavé: Zkuste si vyrobit spirální obrázek podobný následujícímu. Budete muset aplikovat matici několikrát na výsledný obraz.



Zdroje:

V. Havelková: Násobení matic – transformace, animace v Geogebře
https://www.geogebra.org/m/hNBxBj9n
https://www.geogebra.org/m/QzHrupaJ#material/pWMFt3WW

Š. Voráčová: Rotace – animace v Geogebře
https://www.geogebra.org/m/BrAvB74d

M. Zamboj: Matice zobrazení
https://www.geogebra.org/m/qhj4sgfd

Transformační matice: https://wikijii.com/wiki/transformation_matrix

Lineární zobrazení: https://cs.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1rn%C3%AD_zobrazen%C3%AD

Videa OnlineSchool.cz:

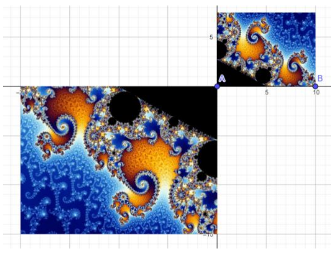
- Maticové operace https://onlineschool.cz/matematika/maticove-operace/
- Soustavy rovnic https://onlineschool.cz/matematika/soustavy-rovnic-pomoci-matic/

Řešení:

Úkol 1: $P_1 = P + (2,4)$, $P_2 = P + (4,0)$, $P_3 = P + (2,1)$, $P_4 = P + (1,-2)$

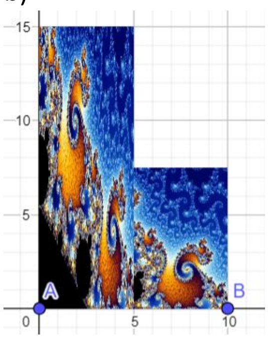
Úkol 2:

a)



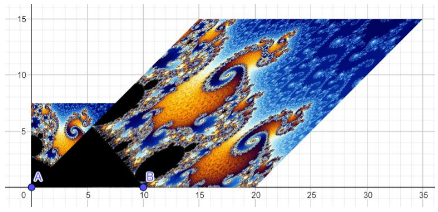
Středová souměrnost a dvojnásobné zvětšení
m={{-2, 0}, {0, -2}}

b)



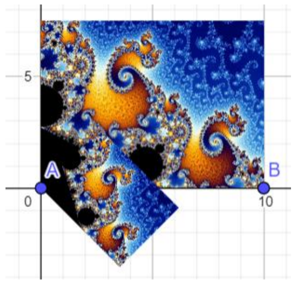
Dvojnásobné zvětšení ve směru y, zmenšení na polovinu ve směru x
m={{0.5, 0}, {0, 2}}

c)



Dvojnásobné zvětšení a zkosení ve směru x
m={{2, 2}, {0, 2}}

d)



Otočení o -45° $\left(-\frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad}\right)$ a zmenšení na polovinu:
m={{0.5cos(-π/4),-0.5sin(-π/4)},{0.5sin(-π/4),0.5cos(-π/4)}}

Úkol pro zvídavé:

Po otáčení nového obrazu je nutné zjistit název obrázku, který přiřadila Geogebra obrazu – po kliknutí pravým tlačítkem myši na obrázek naleznete název v nastavení. Matice transformace je neustále stejná: *m1={{1.2cos(π / 4), -1.2 sin(π / 4)}, {1.2sin(π / 4), 1.2cos(π / 4)}}*