
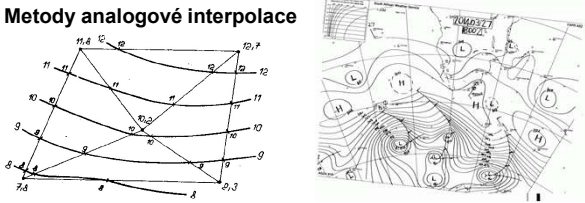


Metody prostorové interpolace (deterministické metody)



Metody analogové interpolace



- vytváření izoliní na základě spojování míst s obdobnými hodnotami jevu založené na expertním odhadu
- využívají empirie, obecné teorie a znalosti místních zvláštností
- expertní systémy

Základní omezení (s ohledem na počítačové zpracování):

- problém zpracování velkého množství bodů
- problém subjektivního přístupu
- problém časové náročnosti

Globální interpolátory využívající analýzu trendu

Princip - mnohonásobná regrese hodnot atributu vs. geografické souřadnice.

Metodou nejmenších čtverců jsou nalezeny nejhodnější koeficienty pro daný polynom n-tého řádu.

Předpokládá se normální rozdělení.

lineární trend:

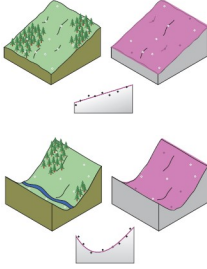
$$z = b_0 + b_1x + b_2y$$

kvadratický trend:

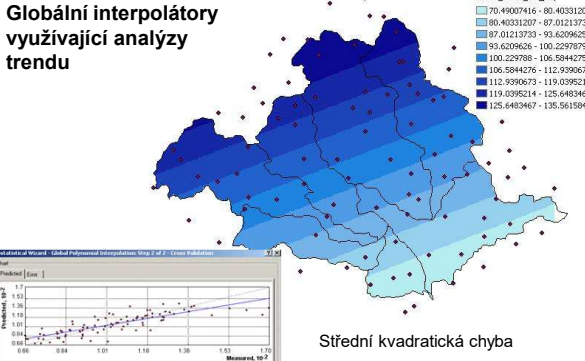
$$z = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2$$

Z – interpolovaná proměnná, b – koeficienty, x, y – souřadnice bodů

Verifikace: RMSE, analýza reziduálních hodnot



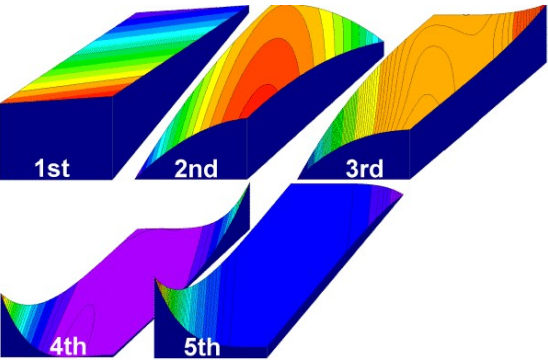
Globální interpolátory využívající analýzu trendu



Střední kvadratická chyba

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z(x_i) - z(x_i))^2}{n}}$$

Interpolace trendové složky polynomy 1 až 5 stupně



Globální interpolátory využívající regresní analýzy

Princip - existuje vazba mezi hodnotami interpolované veličiny a vybranými jinými atributy studovaného prostoru (např. teplota a nadmořská výška, koncentrace znečištění a vzdálenost od zdroje).

Forma - empirický model závislosti interpolované veličiny na hodnotách jedné či několika veličinách nezávislých:

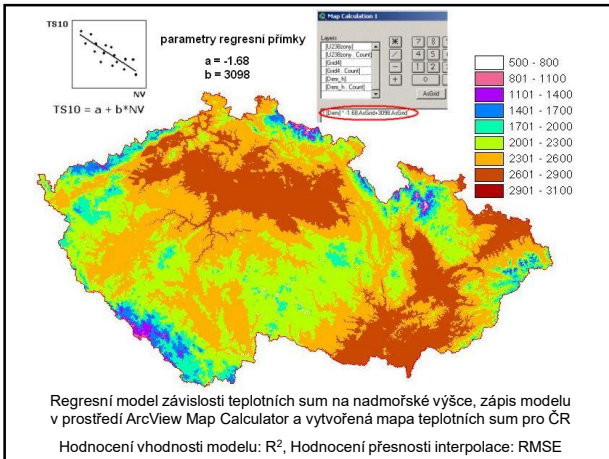
$$z(x) = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \dots + b_nP_n + \varepsilon$$

b_0, \dots, b_n - regresní koeficienty
 P_1, \dots, P_n - nezávislé (vysvětlující) proměnné

Sestavení regresní závislosti je založeno na metodě nejmenších čtverců.

Výsledný model může být lineární i nelineární.

Jako nezávislé proměnné lze kombinovat geografické souřadnice s jinými atributy.

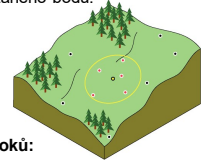


Metody lokální interpolace (lokální interpolátory)

Globální interpolátory - lokální efekty = náhodný šum

Lokální interpolátory - hledaná hodnota je určena z určitého počtu měření z předem definovaného okolí počítaného bodu.

$$\hat{Z}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$$



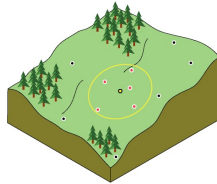
Obecný postup se sestává z následujících kroků:

1. definování velikosti a tvaru zájmového okolí
2. nalezení měřených bodů v tomto okolí
3. nalezení matematické funkce vystihující kolísání hodnot nacházejících se v okolí daného bodu
4. výpočet hodnoty pro uzly regulérní sítě (grid)

Metody lokální interpolace (lokální interpolátory)

Pro lokální interpolace jsou důležité:

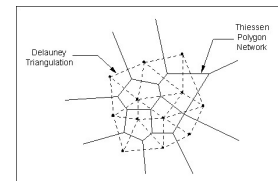
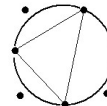
- > druh použité interpolační funkce
- > velikost, tvar a orientace okolí
- > počet bodů v okolí zahrnutých do výpočtu
- > rozložení uvažovaných bodů (regulérní či nepravidelné)
- > možné začlenění externí informace např. o obecném trendu



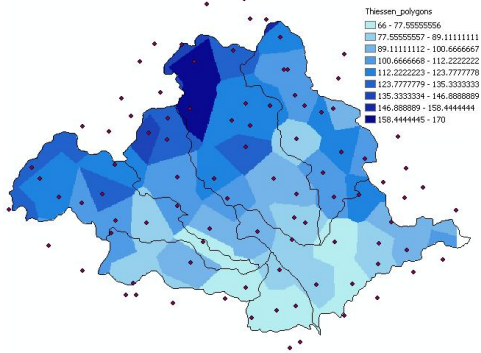
Metoda nejbližšího souseda (thiessenovy polygony)

Princip - hodnoty atributů v neměřených místech jsou určeny z hodnot nejbližšího místa měřeného.

1. Plocha je rozdělena na nepravidelné trojúhelníky (**Delaunay triangulace**), které by měly být co nejbližší trojúhelníkům rovnostranným
2. Z trojúhelníkové sítě jsou definovány tzv. **thiessenovy polygony**.

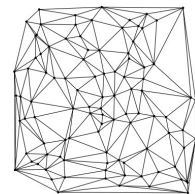


Metoda nejbližšího souseda (thiessenovy polygony)



Metody konstrukce nepravidelných trojúhelníků (TIN)

- > Exaktní metoda vhodná pro nepravidelně rozmístěné body měření.
- > Body jsou spojeny liniemi a vytváří síť nepravidelných trojúhelníků.
- > Metody není možné použít k extrapolaci



> Metoda vhodná pro povrchy vyznačující se náhlými změnami spádu (fluviálně erodované povrchy).

Metody nepravidelných trojúhelníků

Proces vytváření spojitého povrchu metodou TIN zahrnuje:

- > výběr charakteristických bodů (ne z jakékoliv množiny nepravidelně rozmístěných bodů lze vytvořit TIN)
- > způsob propojení bodů do trojúhelníkové sítě
- > způsob modelování povrchu uvnitř trojúhelníků

Výběr bodů a algoritmy pro výběr bodů:

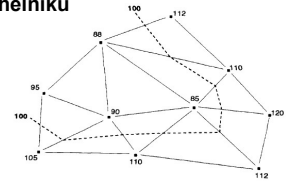
- > algoritmus Fowler and Little – vybírá charakteristické body zlomu (hřbetnice a údolnice na modelu reliéfu)
- > VIP algoritmus (very important points)
- > Drop heuristic (optimalizační) algoritmus



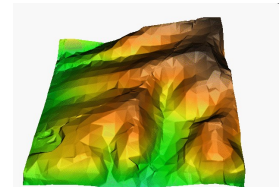
Princip algoritmů:
<http://www.ncgia.ucsb.edu/units/u056/u056.html>

Metody nepravidelných trojúhelníků

- Hodnoty v bodech na počátku a konci linií jsou známy, lze použít jednoduchou lineární závislost k interpolaci bodů mezi dvěma body na linii.
- TIN je model vhodný k následné konstrukci izoliní.

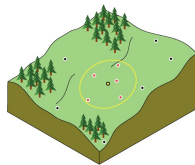


- TIN je metoda interpolace i způsob vizualizace spojitých povrchů.



Metoda inverzní vzdálenosti (IDW)

Princip - hodnota atributu v určitém bodě je váženým aritmetickým průměrem hodnot okolních měřených bodů.



Váhy jsou určeny pro každý bod jako inverzní vzdálenost měřeného bodu od bodu interpolovaného.

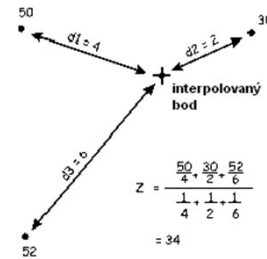
Obecný vzorec pro odhad hodnoty Z:

$$\hat{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i z_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Váhy se určují ze vztahu: $w = \frac{1}{d^k}$ nebo $w = e^{-kd}$

Hodnoty vah w_i představují funkci vzdálenosti d . Hodnota exponentu k se nejčastěji volí 1 či 2.

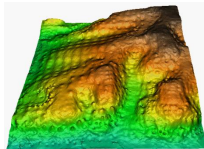
Metoda inverzní vzdálenosti (IDW)



Odhad hodnoty v bodě metodou inverzní vzdálenosti

Metoda inverzní vzdálenosti (IDW)

Efekt „průměrování“ a potlačení lokálních extrémů

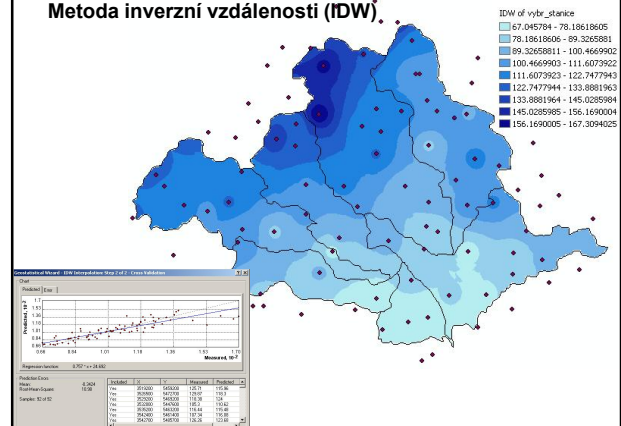


Problém generování koncentrických struktur kolem interpolovaných bodů (tzv. „bull's eyes“)

Způsob definování okolí

- > **izotropní povrch** - kruhové okolí interpolovaného bodu, pro odhad hodnoty bereme všechny body bez ohledu na směr
- > **anizotropie** - body v jistém směru mohou mít na interpolovanou hodnotu jinou váhu než ve směru jiném - okolí tvaru elipsy
- > minimální a maximální počet bodů pro výpočet nové hodnoty
- > rozmístění bodů v rámci definovaného okolí (kvadranty, oktanty)
- > IDW je senzitivní na shluky měřených bodů a také na odlehle hodnoty

Metoda inverzní vzdálenosti (IDW)



Prostorové klouzavé průměry

Modifikace metody IDW

Nová hodnota může být prostým průměrem, váženým průměrem, modální hodnotou.

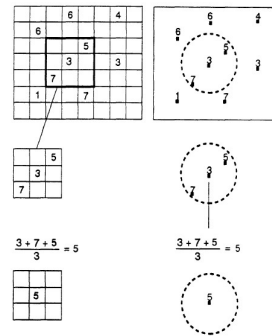
Definování velikosti, tvaru a charakteru okolí.

Počet bodů v okolí (min, max) - 4 až 12 bodů, optimum 6 až 8 bodů.

Metody je vhodné použít za těchto podmínek:

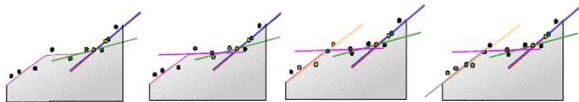
- existuje nejistota s ohledem na reprodukovatelnost výsledků opakovaných měření v daném bodě (vlastní proměnlivost pole hodnot měření)
- samotná technická stránka měření je zatížena jistou chybou
- je známo, že skutečné prostorové pole daného jevu vykazuje kromě obecného trendu také lokální variabilitu.

Prostorové klouzavé průměry



Interpolace metodou prostorových klouzavých průměrů

Interpolace metodou lokálních polynomů



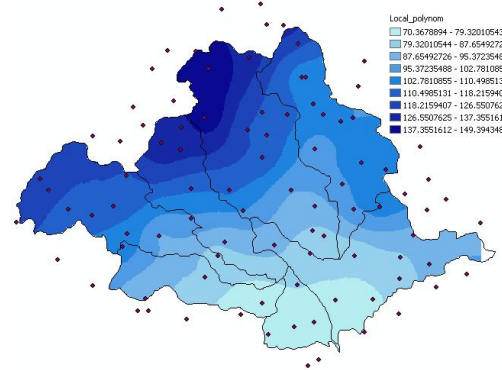
Lokální interpolátory využívající regresní analýzy

Vazba mezi hodnotami interpolované veličiny a jinými vybranými atributy studovaného prostoru je vyjádřena regresní závislostí pouze pro část interpolovaného povrchu.

Tato část povrchu má podobu okolí interpolovaného bodu předem definovaného tvaru a velikosti.

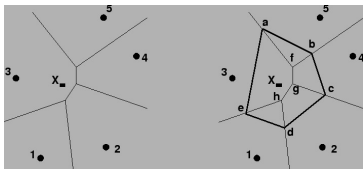
Body jsou interpolovány s pravidelným krokem a okolí se „posouvá“ stejně jako v případě klouzavých průměrů (viz. metoda IDW)

Interpolace metodou lokálních polynomů



Metoda přirozených sousedů (Natural nearest neighbour)

Určení vah okolních bodů nemusí být založeno na principu vzdálenosti, ale na velikosti plochy, kterou s daným bodem sdílejí tzv. přirození sousedé



Plocha příslušející bodu P

$$A_p = \sum_{j=1}^k A_{jp}$$

Váhy definované jako podíly ploch přirozených sousedů

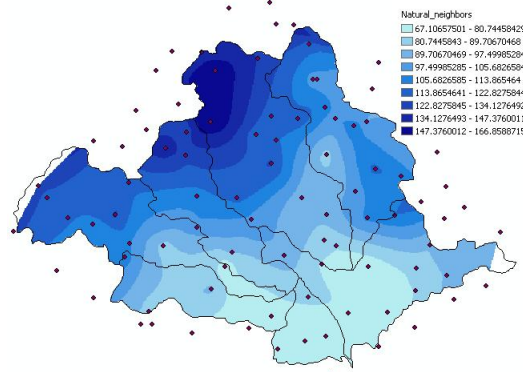
$$\lambda_j = \frac{A_{jp}}{\sum_{j=1}^k A_{jp}}$$

Odhad hodnoty v bodě P

$$z_p = \sum_{j=1}^k \lambda_j z_j$$

(průměr vážený plochami, které si daný bod „půjčil“ z původních bodů měření)

Natural nearest neighbour



Splínové funkce

Matematicky definované křivky, které po částech a **exaktně** interpolují jednotlivé body povrchu, jsou lokálním interpolátorem. Zajišťují kontinuální spojení jednotlivých částí interpolovaného povrchu. Lze modifikovat část povrchu bez přepočtu celého povrchu (toto neumožňují trendy).

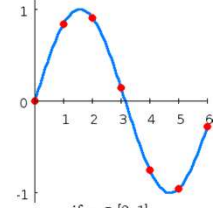
Pro interpolování linií se používá tzv. **kubických splínů**, pro interpolování povrchů se využívá jejich 2D analogie označované jako „**thin plate splines**“

Nahrazují části povrchů interpolované přesným splínem lokálně shladenou průměrnou hodnotou.

Povrch je interpolován tak, aby procházel co nejlíže měřeným bodům a také aby zachoval **podmínku minimální křivosti**.

Interpolované povrchy jsou často značně shladené, jsou vhodné pro interpolaci jevů, které se mění spojitě.

Splínové funkce

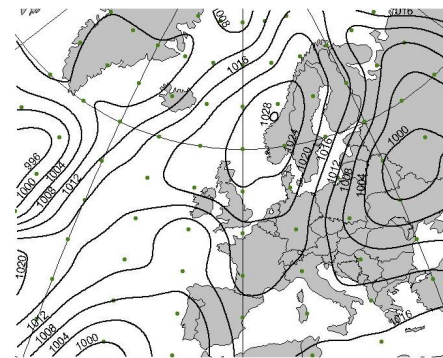
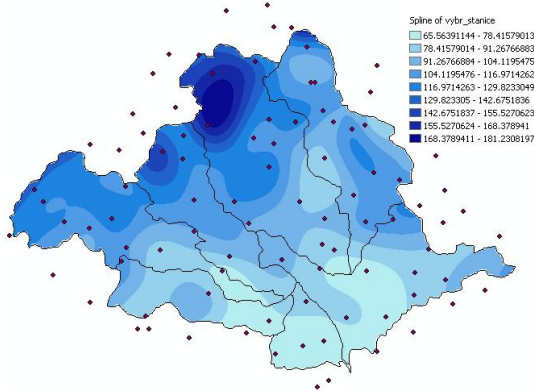


$$f(x) = \begin{cases} -0.1522x^3 + 0.9937x, & \text{if } x \in [0, 1], \\ -0.01258x^3 - 0.4189x^2 + 1.4126x - 0.1396, & \text{if } x \in [1, 2], \\ 0.1403x^3 - 1.3359x^2 + 3.2467x - 1.3623, & \text{if } x \in [2, 3], \\ 0.1579x^3 - 1.4945x^2 + 3.7225x - 1.8381, & \text{if } x \in [3, 4], \\ 0.05375x^3 - 0.2450x^2 - 1.2756x + 4.8259, & \text{if } x \in [4, 5], \\ -0.1871x^3 + 3.3673x^2 - 19.3370x + 34.9282, & \text{if } x \in [5, 6]. \end{cases}$$



„terracing effect“

Splínové funkce

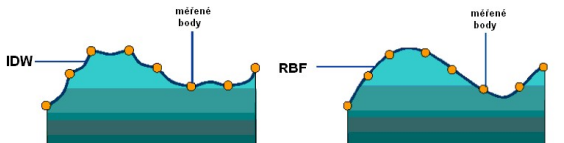


Izolinie vytvořené interpolací gridových hodnot přizemního pole tlaku vzduchu splínovými funkcemi

Radiální bazové funkce (Radial basis functions)

Exaktní interpolátory využívající splínové funkce, způsob interpolace má blízko ke geostatistickým metodám krigingu

Analogie „přetažení“ gumové membrány přes body v prostoru.



Porovnání výsledků interpolace metodou inverzní vzdálenosti (IDW) a metodou splínových funkcí (RBF)

Princip:

Interpolovaná plocha vznikne jako lineární kombinace funkcí vzdálenosti mezi datovými body. Datový bod ovlivňuje interpolaci v okolí ve všech směrech stejným způsobem.

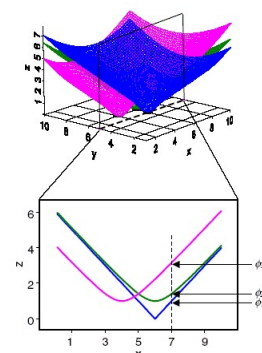
Radiální bazové funkce

Hodnotu každé RBF v predikovaném bodě můžeme odečíst z grafu jako ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .

Prediktor má podobu váženého průměru, tedy neznámou hodnotu z v bodě p najdeme jako :

$$z(p) = w_1\phi_1 + w_2\phi_2 + w_3\phi_3 + \dots$$

Váhy w_1, w_2, w_3 jsou vypočteny z hodnot interpolované veličiny v bodech měření a jsou nalezeny na základě podmínky, že pokud je odhadován bod v bodě měření, je interpolován přesně.



Princip interpolace metodou multiquadric RBF

Multiquadric RBF

Multikvadrík – kvadratická plocha

$$B_i(x, y) = \sqrt{d_i(x, y)^2 + R^2}$$

$B_i(x, y)$ – radiální funkce vzdálenosti $d_i(x, y)$

$d_i(x, y)$ – relativní vzdálenost měřeného bodu v místě x, y , od místa odhadu x, y

R^2 – vyhlazovací parametr

- $R=0$ po částech lineární interpolace
- $R>0$ interpolovaný povrch se datových bodech zaoblí

Pro funkce $B_i(x, y)$ jsou během výpočtu v každém interpolovaném bodě stanovovány váhy řešením soustavy lineárních rovnic.

Čím větší je hodnota R , tím více je shlázený je výsledný interpolovaný povrch.

„Radial basis functions“

Parametry konkrétní interpolující funkce jsou optimalizovány výpočtem chyby RMSE.

RBF jsou exaktní metodou a jsou vhodné pro hladké povrchy generované z velkého počtu bodů (např. modely terénu).

Neohodí se pro interpolaci jevů, které se výrazně mění v prostoru a dále pro interpolaci jevů, u nichž existuje jistá míra nejistoty ohledně přesnosti měřených bodů.

Metody prostorové interpolace ploch

Mnoho jevů se vztahuje k plošným jednotkám spíše než k bodům (hustota obyvatelstva, kvalita pitné vody...).

Metody řeší způsob, jakým lze odhadnout hodnoty jistého jevu na základě hodnot jiného jevu vázaných na plošné jednotky.

- plošné jednotky se shodují
- zdrojové jednotky jsou podmnožinou jednotek výstupních

- metody zachovávající objem studovaného jevu (volume preserving)
- metody nezachovávající objem studovaného jevu (non-volume preserving)

Metody nezachovávající objem studovaného jevu

Jaký je počet obyvatelstva uvnitř záplavové zóny?

1. výpočet hustoty obyvatelstva pro každou plochu
2. určení centroidu každé plochy
3. interpolace hustoty obyvatelstva výše popsanými metodami
4. Suma počtu obyvatelstva za všechny plochy v dané zóně

Metody zachovávající objem studovaného jevu

„pncnophylactic method“

1. Proveďte se překrytí cílových zón (oblastí) přes oblasti zdrojové.
2. Určí se poměrná část cílové zóny, která spadá do zóny zdrojové.
3. Celková hodnota atributu v cílové zóně je určena v závislosti na plošném zastoupení zón zdrojových.

- metoda zachovává sumu studovaného prvku
- dovoluje kontinuální změnu směrem k hranicím každé třídy.
- výrazně mění min a max hodnoty