# ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

# VIII. VZORKOVÁNÍ

# DEFINICE

***Vzorkování*** je postup výběru jednotlivých pozorování, na jehož základě získáváme informaci o vlastnostech sledované skutečnosti či jevu. Každé pozorování může obecně zahrnovat více vlastností (věk, diagnóza onemocnění, velikost napětí, …), které mohou být použity k identifikaci daného jevu či jeho části.

***Vzorkováním*** rozumíme postup výběru určité podmnožiny (vzorku) dané množiny (veličiny, populace, dat, materiálu) tak, aby vlastnosti vybraného vzorku (dostatečně) přesně reprezentovaly vlastnosti celé množiny (signálu, populace, dat, materiálu).

***Vzorkování*** je postup selekce jednotlivých pozorování s cílem získat určitou znalost o dané populaci, zejména pro účely statistické inference.

# PŘÍKLADY

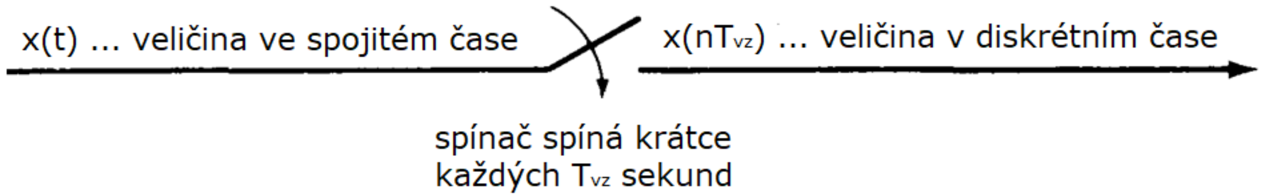
- volba frekvence a místa odběru pro hodnocení úrovně znečištění vodních toků;
- volba parametrů digitalizace obrazu pro jeho přenos či archivaci;
- volba tématu a množiny respondentů při průzkumu veřejného mínění;
- výběr výrobků při výstupní kontrole kvality výroby;
- výběr pacientů pro odhad vývoje daného onemocnění.

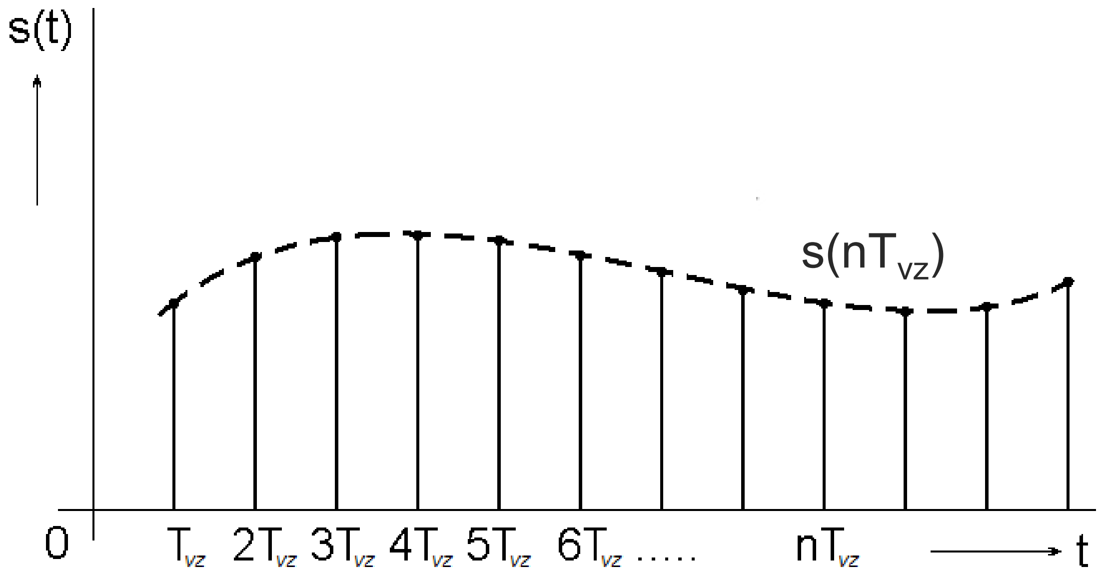
# DEFINICE

***Vzorkováním*** dané časově proměnné veličiny rozumíme činnost, při které z průběhu určité veličiny, která je definovaná na spojitém definičním oboru, vybíráme hodnoty pouze v určitých časových okamžicích.

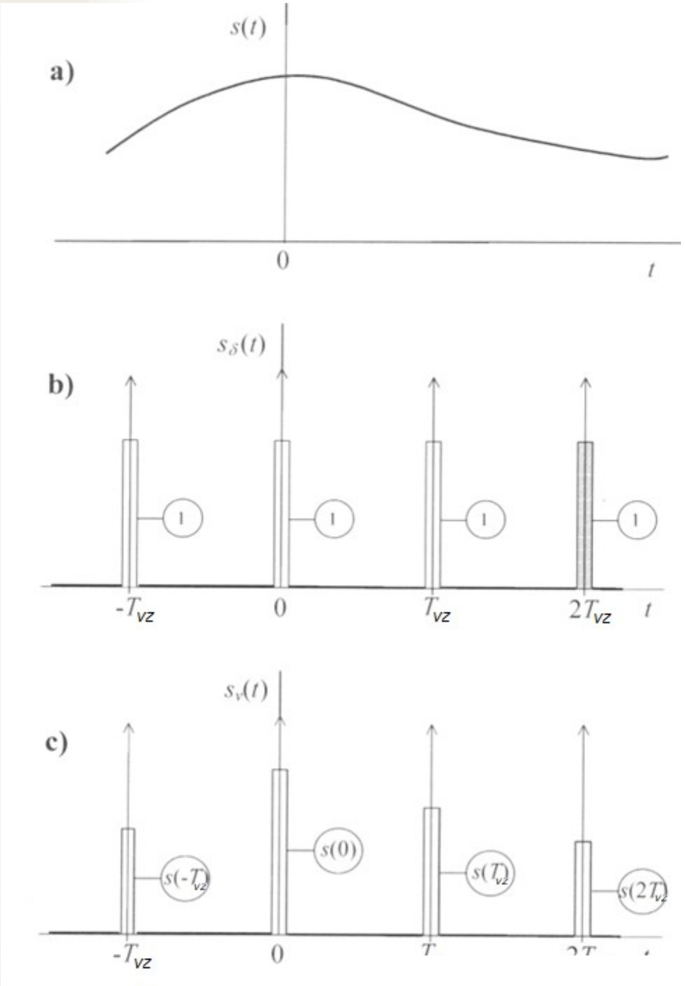
Hodnoty časových či prostorových souřadnic mohou být rozmístěny v definičním prostoru obecně nerovnoměrně, z hlediska práce s daty je ale výhodnější, pokud jsou souřadnice vzorků rozmístěny rovnoměrně (a v tom případě lze i teoreticky dovodit pravidlo pro maximální vzdálenost mezi každými dvěma vzorky).

# VZORKOVÁNÍ SPOJITÉ VELIČINY



# IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ




Aby bylo možné zjednodušit analýzu vlivu vzorkování na vlastnosti vzorkované veličiny, je navzorkovaná verze původní spojité veličiny s(t) vyjadřována ve tvaru $s(t).s_\delta(t)$, kde $s_\delta(t)$ je periodický sled jednotkových impulsů definovaný jako

$$s_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz})$$

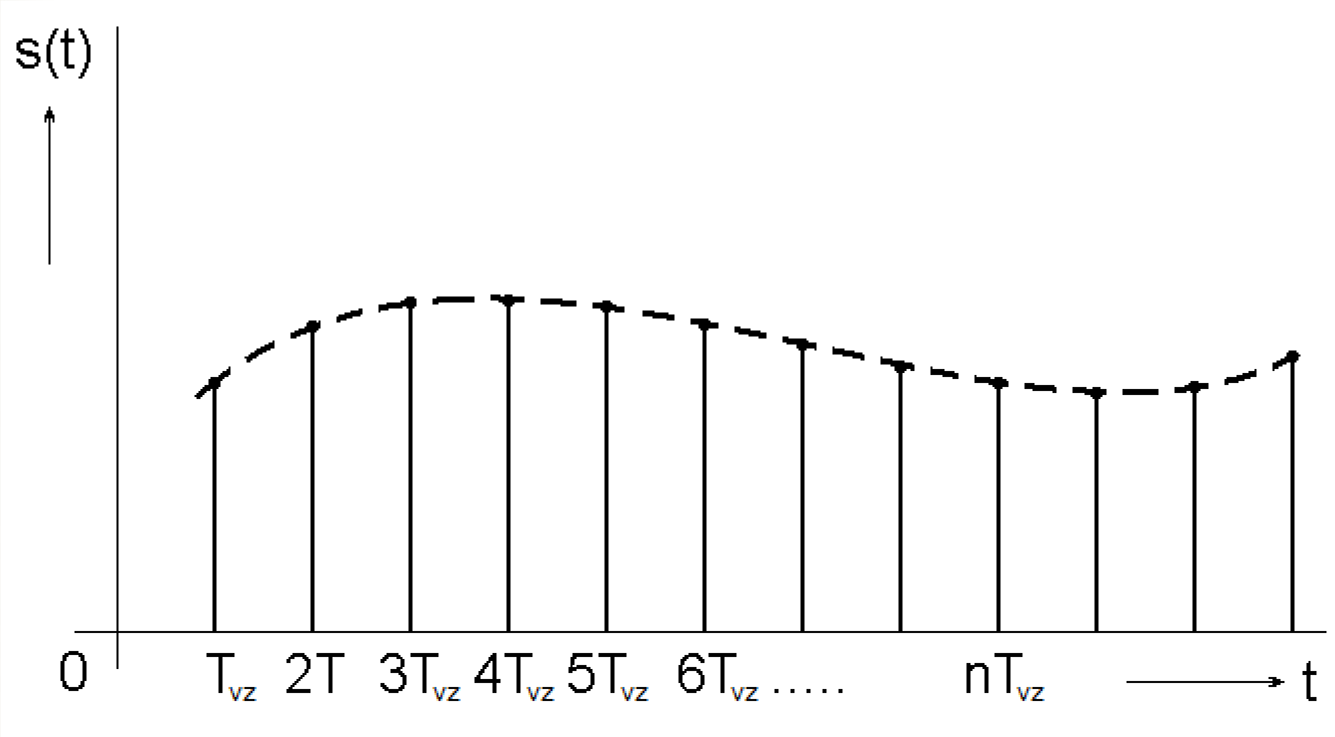
Z toho pro navzorkovanou veličinu platí

$$s_v(t) = s(t).s_\delta(t) = s(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_{vz}).\delta(t - nT_{vz})$$

# VZORKOVACÍ TEORÉM

$$s(t) \rightarrow s(T_1), s(T_2), s(T_3), \ldots, s(T_n), \ldots$$

$$s(t) \rightarrow s(T_{vz}), s(2T_{vz}), s(3T_{vz}), \ldots, s(nT_{vz}), \ldots$$

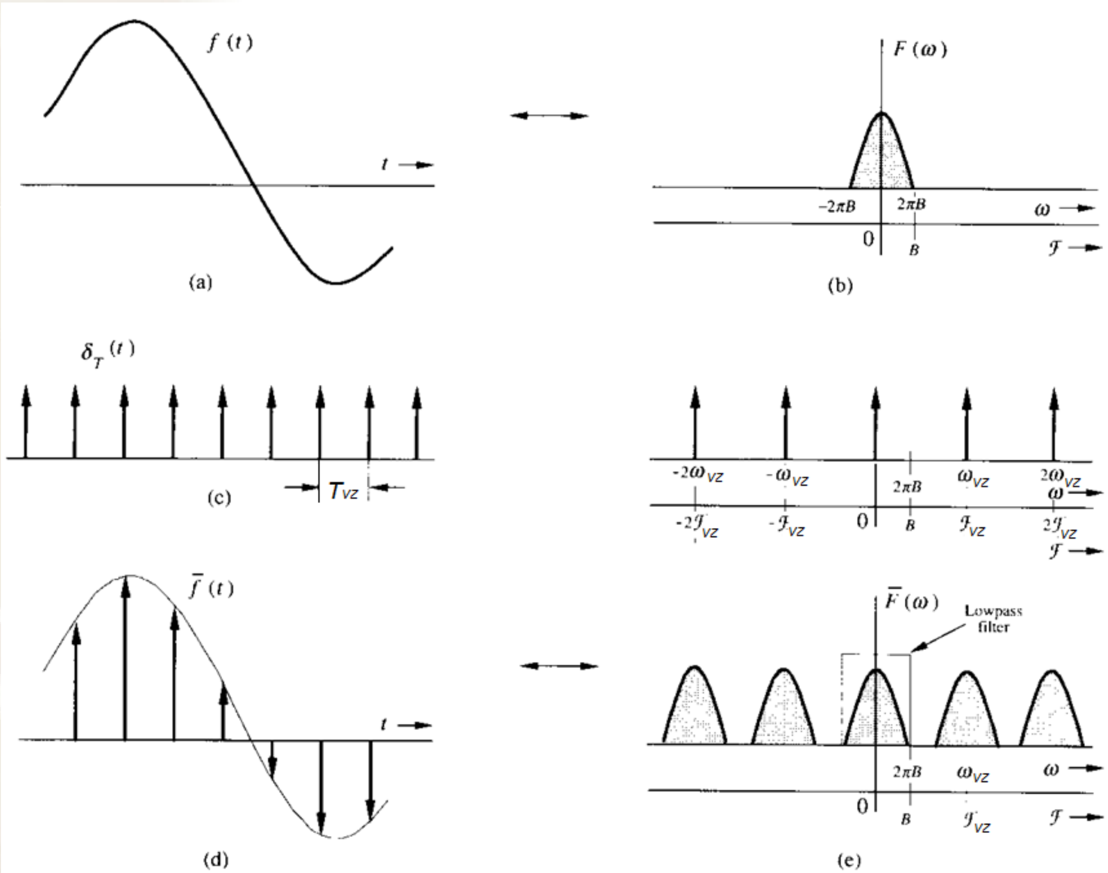


# VZORKOVACÍ TEORÉM

intuitivní (?) zdůvodnění minimální vzorkovací frekvence

Reálné vzorkování

# VZORKOVACÍ TEORÉM




**Vzorkovací frekvence:**

$$f_{vz} > 2B = f_N,$$

kde B je maximální kmitočet ve vzorkované veličině

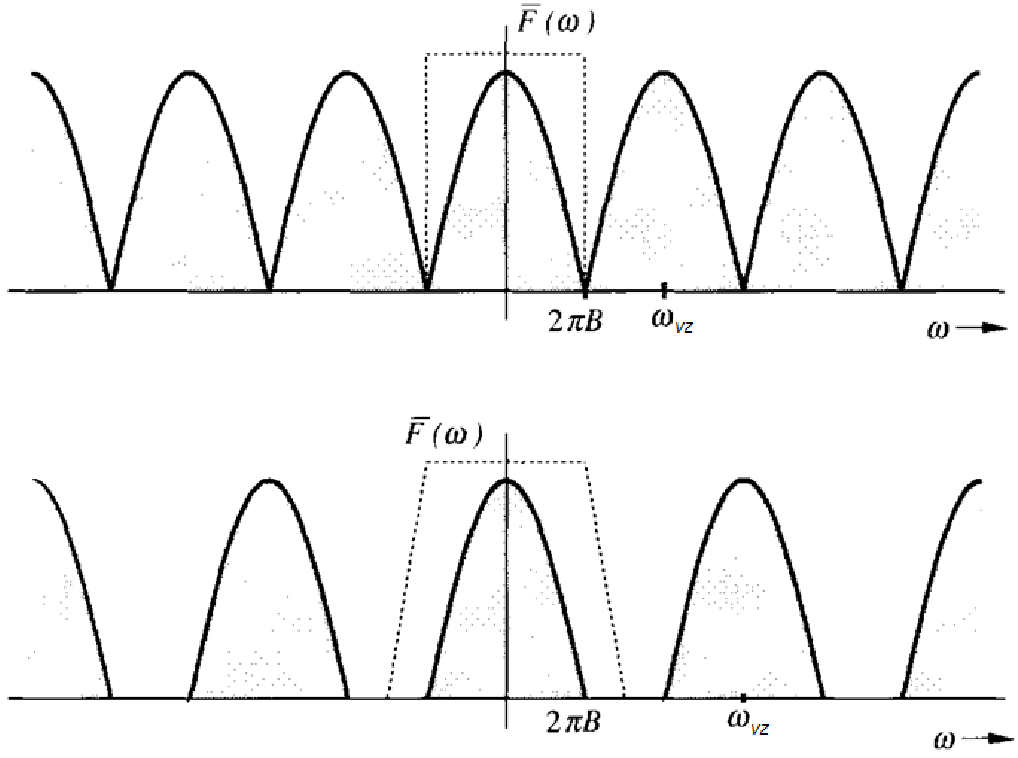
$f_N$ –

Nyquistův, (Shannonův, Kotelnikovův) kmitočet

$T_N = 1/f_N = 1/2B$

Nyquistův interval (perioda), vzorkovací interval (perioda)

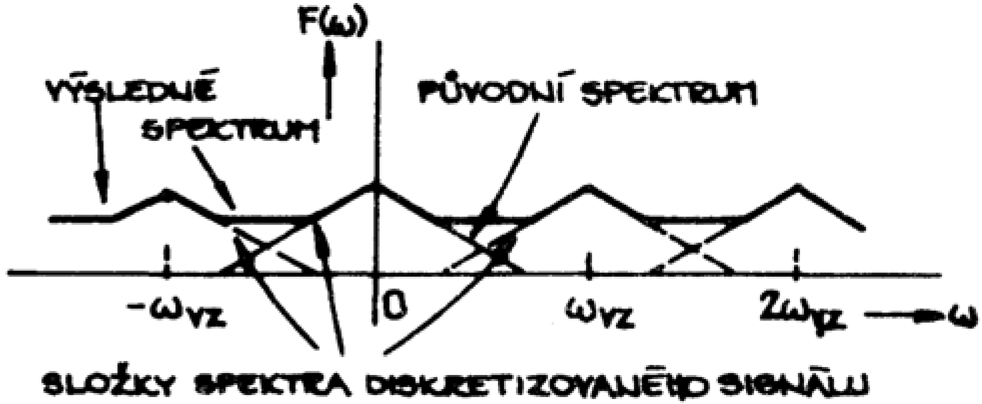
# VZORKOVACÍ TEORÉM

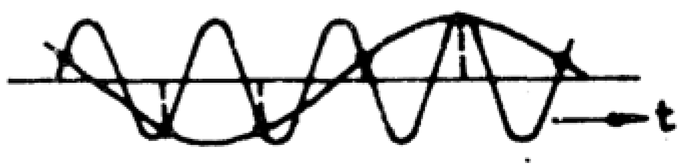



Obvykle

$f_{vzr} = (4 \;\; 5) \cdot f_N$

# VZORKOVACÍ TEORÉM




překrývání spekter - aliasing

# HARMONICKÁ POSLOUPNOST

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

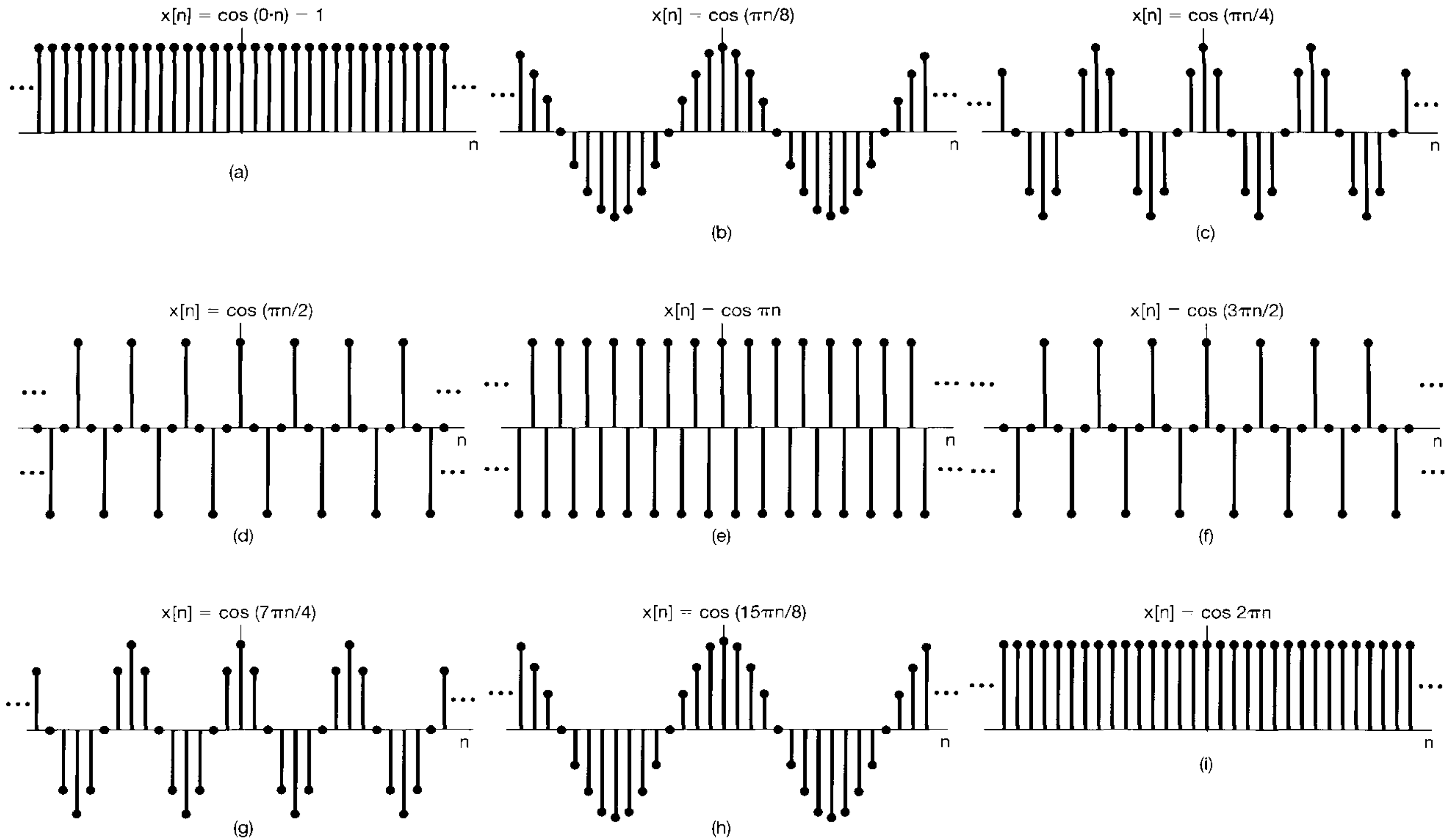
$$x(nT_{vz}) = A.\exp\left(\frac{2\pi i\, n}{N} + \varphi_0\right).$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x\left[(k+N)T_{vz}\right] = \exp\frac{i2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{i2\pi k}{N}.\exp(i2\pi),$$

kdy $\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i.\sin(2\pi) = 1 + i.0 = 1$

# HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



# HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ

# HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ

# REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Předpokládejme, že původní spojitá funkce $x_a(t)$ měla frekvenčně omezené spektrum $X_a(f)$, tj. platí pro ni

$$X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| < f_{vz}/2 \\ 0 & |f| \geq f_{vz}/2 \end{cases}$$

kde je X(f) frekvenční spektrum dané posloupnosti. Protože víme, že spektrum navzorkované posloupnosti je periodické s periodou danou vzorkovací frekvencí, zajímá nás pouze její jedna (první) perioda, pro kterou v rozsahu frekvencí $|f| \leq f_{vz}/2$ platí

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).e^{-i2\pi fnT_{vz}}$$

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{T=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-i2\pi fnT_{vz}}$$

# REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Potom pro původní funkci $x_a(t)$ je

$$x_a(t) = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} X_a(f).e^{i2\pi ft}df = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} \left[ T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).e^{-i2\pi fnT_{vz}} \right] .e^{i2\pi ft}df =$$

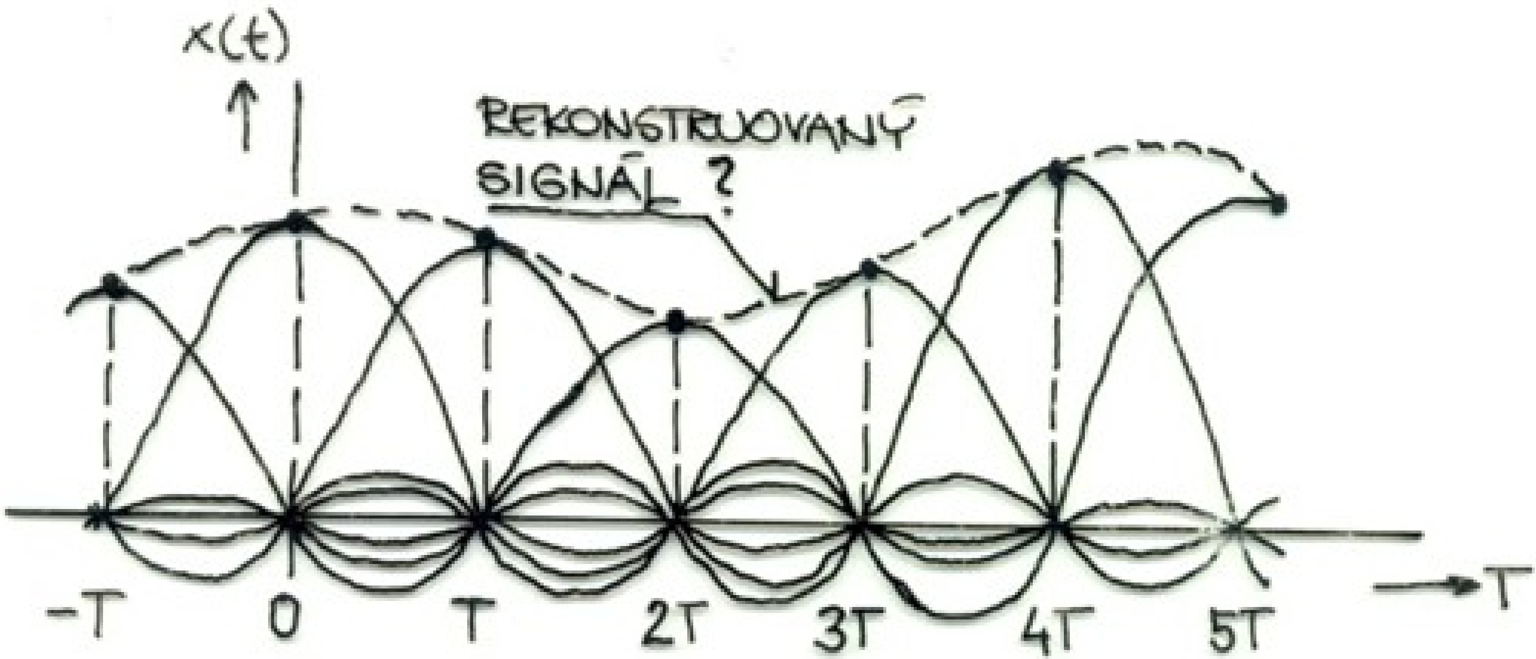
$$= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}). \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} e^{i2\pi f(t-nT_{vz})}df = \left| \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{f_{vz}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}). \frac{e^{i2\pi(t-nT_{vz}).f_{vz}/2} - e^{-i2\pi(t-nT_{vz}).f_{vz}/2}}{i2\pi(t-nT_{vz})} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).Si\left( \pi(t-nT_{vz}).\frac{1}{T_{vz}} \right)$$

tj. původní funkce je dána nekonečným součtem vzorkovacích funkcí, které procházejí každou hodnotou $x_a(t)$ z nekonečného počtu vzorků navzorkované posloupnosti.

# REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI



# IX. FREKVENČNÍ TRANSFORMACE

## ČASOVÉ ŘADY

MU

IBA

# HARMONICKÁ ANALÝZA DISKRÉTNÍCH POSLOUPNOSTÍ

- ☑ diskrétní Fourierova řada
- ☑ Fourierova transformace s diskrétním časem - DTFT
- ☑ diskrétní Fourierova transformace - DFT
- ☑ rychlá Fourierova transformace - FFT

# ROZKLAD PERIODICKÉ ČASOVÉ ŘADY

☑ spojitá veličina – opakování

**Fourierova řada** (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{in\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde $\dot{c}_n$ jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-in\Omega t} dt$$

$\Omega$ – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

# FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ posloupnosti

- ☑ nechť $x(kT_{vz})$ je periodická posloupnost s periodou $NT_{vz}$; pak $x(kT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{c}_n . \exp\frac{i2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}).\exp\left(-\frac{i2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

# FOURIEROVA ŘADA
# PRO DISKRÉTNÍ posloupnosti

- ☑ nechť $x(kT_{vz})$ je periodická posloupnost s periodou $NT_{vz}$; pak $x(kT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \exp \frac{i2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}). \exp\left( - \frac{i2\pi kn}{N} \right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

**ZÁVĚR**

je-li časová řada periodická, je frekvenční spektrum diskrétní; tj. nezáleží na spojitosti či diskrétnosti časových dat, **důležitá je jejich periodičnost.**

# FOURIEROVA ŘADA
## DŮKAZ

- změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu $\dot{c}_n$

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\exp(-2i\pi mn/N)$$

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{c}_n.\exp(2i\pi nk/N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\exp(-2i\pi mn/N)\right).\exp(2i\pi nk/N) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2i\pi n(k-m)/N],$$

# FOURIEROVA ŘADA
## DŮKAZ

potom

$$\text{pro } k = m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2i\pi n(k-m)/N] = N$$

$$\text{pro } k \neq m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2i\pi n(k-m)/N] = \frac{1-\exp[2i\pi N(k-m)/N]}{1-\exp[2i\pi(k-m)/N]} = 0$$

(součet N členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ )

$$\boxed{x(kT_{vz})} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}).\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2i\pi n(k-m)/N] =$$

$$= \frac{1}{N} x(kT_{vz}).N = \boxed{x(kT_{vz}) \qquad \text{c.b.d.}}$$

# FOURIEROVA ŘADA
## PŘÍKLAD

$x(kT_{vz}) = A.\cos(2\pi k/N)$ je periodická posloupnost s periodou N

$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2i\pi k}{N} + \exp\left(-\frac{2i\pi k}{N}\right)\right]$$

Nyní, protože

$$\exp\frac{2i\pi k(N-1)}{N} = \exp\frac{2i\pi kN}{N}.\exp\left(-\frac{2i\pi k}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2i\pi k}{N}\right);$$

proto

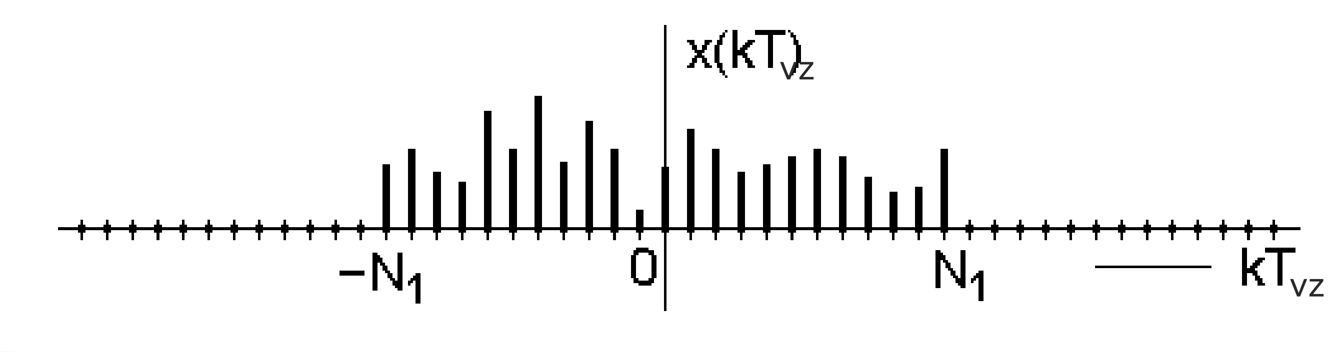
$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2i\pi k}{N} + \exp\left(\frac{2i\pi(N-1)k}{N}\right)\right]$$

$$a_1 = \frac{A}{2}, \quad a_{N-1} = \frac{A}{2}, \quad a_n = 0 \text{ pro všechna jiná n}$$

# FOURIEROVA ŘADA
## PŘÍKLAD

# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

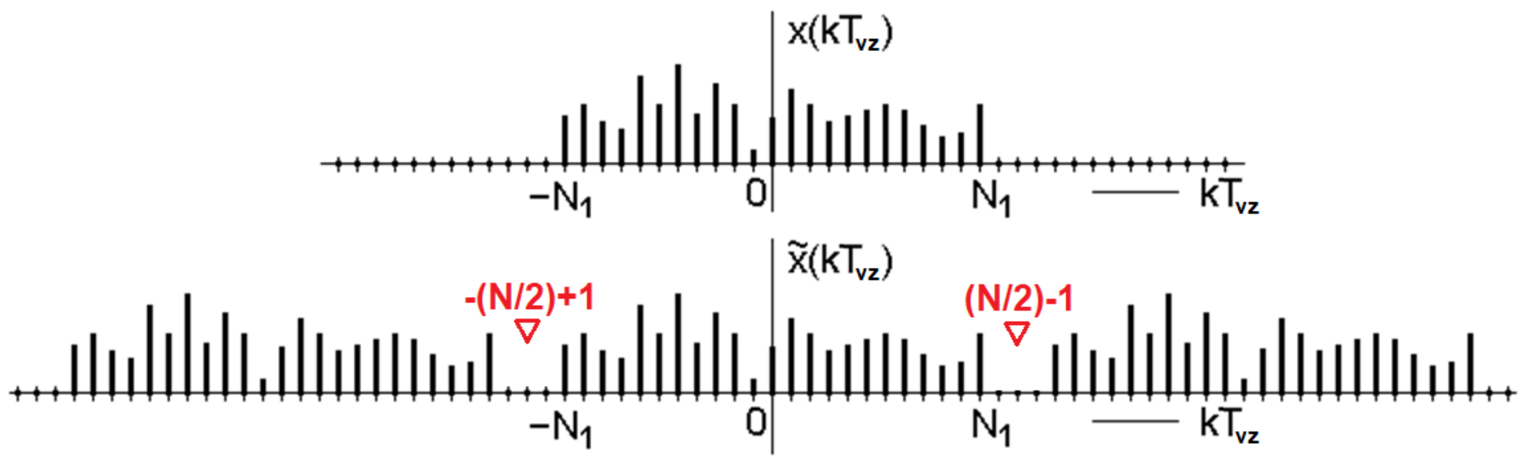
nechť $x(kT_{vz})$ je časově omezená posloupnost s diskrétním časem s $x(kT_{vz})=0$ pro všechna celá $k>N_1$ a $k<-N_1$, kde $N_1$ je celočíselná konstanta



# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

dále, nechť pro kladné sudé celé číslo $N>2N_1$ označíme periodický signál s periodou NT, který je $x(kT_{vz})$ pro k = -N/2, -(N/2)+1, …, -1, 0, 1, …, (N/2)-1.

z definice máme



# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- protože je periodická posloupnost s periodou $NT_{vz}$, má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{c}_n . \exp \frac{2i\pi nk}{N}$$

kde

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT_{vz}) . \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N}\right), \quad n = 0,1,\dots,N-1$$

# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- Z definice vyplývá, že poslední uvedený vztah lze přepsat do tvaru

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp\left(-\frac{2i\pi knT_{vz}}{NT_{vz}}\right), \quad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}).\exp(-ik\omega T_{vz}), \qquad \omega = 2\pi n / NT_{vz}$$

kde ω je pro N→∞ spojitá (nediskrétní) veličina.

# FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

## ZÁVĚR

je-li časová řada neperiodická a nekonečná, je frekvenční spektrum spojité; tj. nezáleží na spojitosti či diskrétnosti časových dat, **důležitá je jejich neperiodičnost a nekonečná doba trvání.**

# DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- předpokládejme, že diskrétní veličina $x(nT_{vz})=0$ pro $n < 0$ a $n \geq N-1$, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-ik\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-ik\frac{2\pi}{NT_{vz}}nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-i2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-i2\pi kn/N}$$

# ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT$^{-1}$

$$x(nT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{inT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{i2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{i2\pi kn/N}$$

# INVERZIBILITA DFT

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x$$

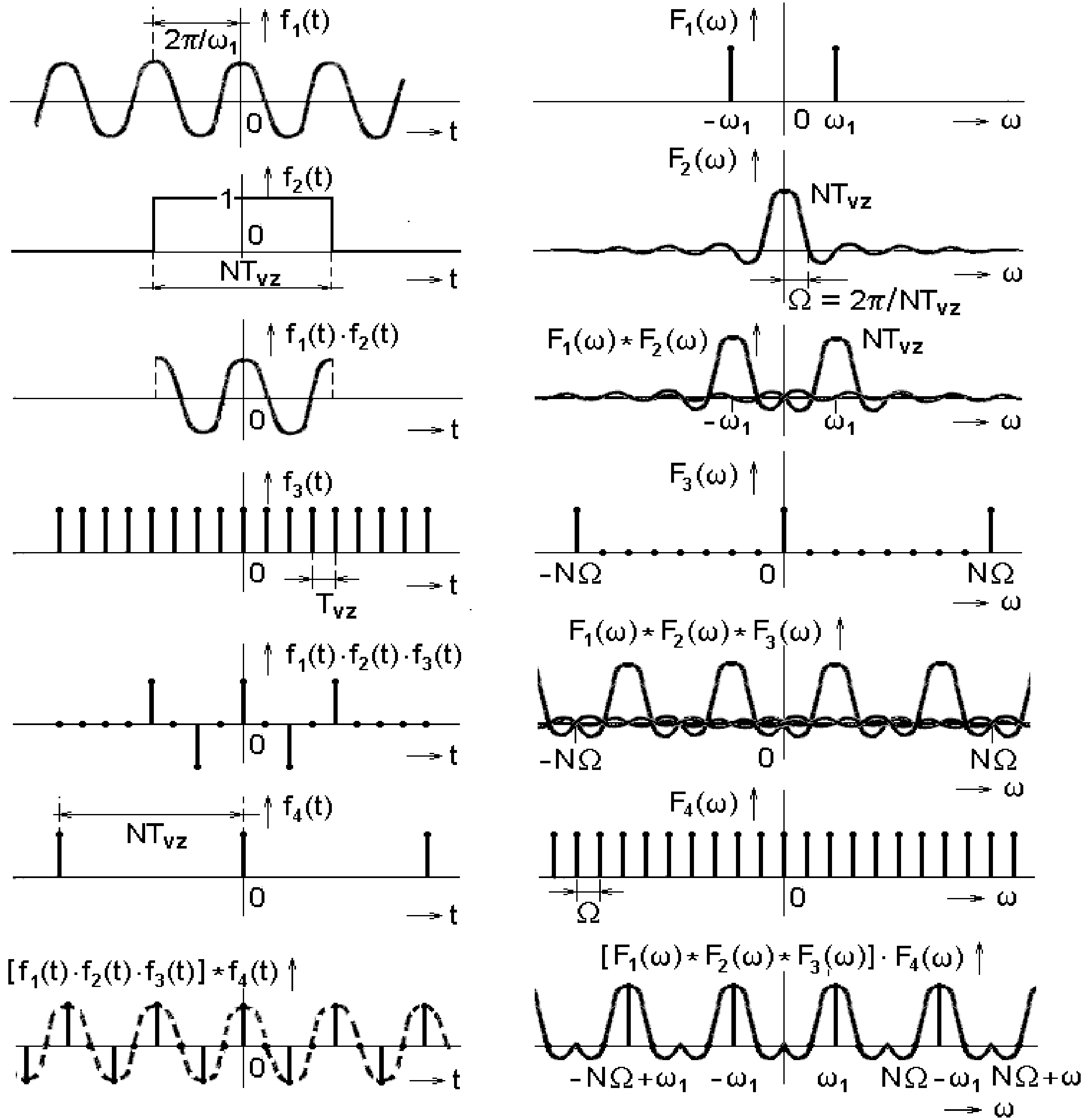
$$x(mT_{vz}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{imT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).e^{-ik\Omega nT_{vz}}\right).e^{imT_{vz}k\Omega} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}).\sum_{k=0}^{N-1}.e^{i(m-n)k\Omega T_{vz}} = \left|\begin{array}{l} \text{pro } m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{i(m-n)k\Omega T_{vz}} = N \\ \text{pro } m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{i(m-n)k\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1-e^{i(m-n)N\Omega T_{vz}}}{1-e^{i(m-n)\Omega T_{vz}}} = 0 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{N}x(mT_{vz}).N = x(mT_{vz}) \qquad \Omega = 2\pi/NT_{vz}$$

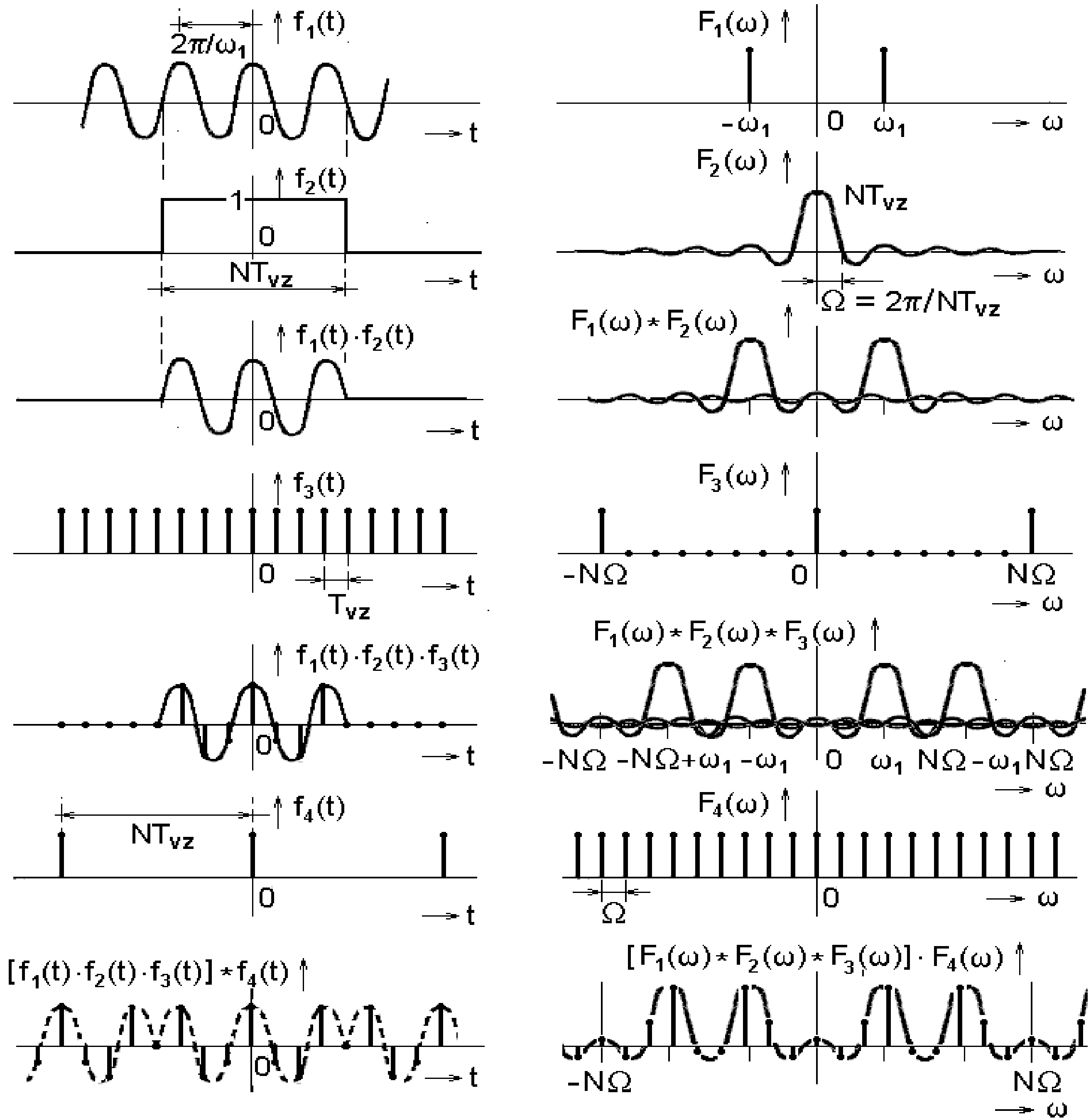
# DFT

$$\omega_1 = 2\Omega = 4\pi/NT_{vz}$$



# DFT

$\omega_1 = 2{,}5\Omega = 5\pi/NT_{vz}$



# DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

## ZÁVĚR

je-li časová řada konečná a frekvenční spektrum diskrétní, pak její frekvenční spektrum je rovno spektru diskrétní Fourierovy řady s periodou rovnou době trvání časové řady