Příklady konvoluce[1]

Jiří Holčík

Nejdříve zopakování – definiční vztahy a vlastnosti

Poznámka:
V této kapitolce se nebudeme zabývat praktickým využitím konvolučního vztahu, k tomu přistoupíme později. Zde se pokusíme pouze objasnit principy výpočtu, příp. vysvětlíme vlastnosti konvoluční posloupnosti/funkce v závislosti na vlastnostech vstupů.

Na tomto místě rozumíme konvolucí funkční vztah mezi dvěma funkcemi, resp. posloupnostmi téhož argumentu, který nemusí nezbytně vyjadřovat časovou závislost tak, jak předpokládáme zde. (Konvoluční vztah se používá např. i pro modifikaci funkce rozložení pravděpodobnosti.)

Primární obecný definiční integrační vztah pro spojitou nezávislou proměnou má tvar

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \,.\, x_2(t-\tau) . d\tau, \tag{1}$$

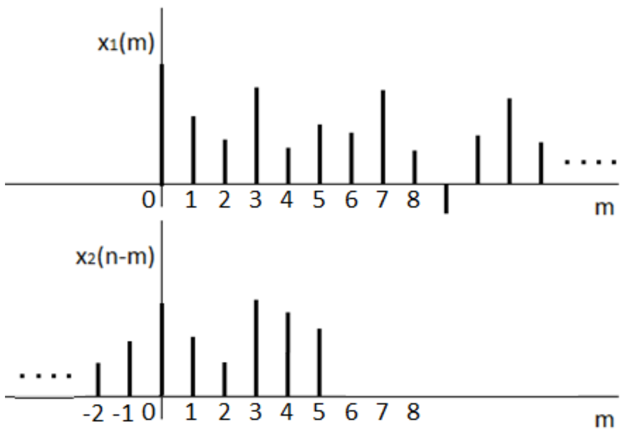
kde funkce $x_2(t)$ se nazývá konvoluční jádro.

Jeho diskrétní varianta, kterou se budeme nadále téměř výhradně zabývat, je

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) . x_2(n-m) \tag{2}$$

Pro kauzální[2] posloupnosti, tj. takové, pro které platí x(n) = 0 pro n < 0 se konvoluční vztah mění na (viz obr.1)

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{n} x_1(m) . x_2(n-m). \tag{3}$$



Obr.1 Interval výpočtu konvoluce dvou kauzálních posloupností

---

[1] ***Konvoluce*** (lat. *convolutus* – stočený, sbalený, ovinutý, namotaný, smotaný; *con-* s, dohromady; *volvere* otáčení, kroužení, motání) ~ usuzování, odvozování výroků z jiných souvislostí. Podle internetového slovníku SCS.ABZ.CZ také „spleť” či „spletení”. Všechny tyto významy souvisí se způsobem výpočtu konvoluční funkce.

[2] ***Kauzální*** je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupní veličiny x(t) pro $t \le t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupní veličiny. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme ***nekauzální***, příp. ***anticipativní***. Zprostředkovaně jako kauzální označujeme takové posloupnosti, pro které platí x(n) = 0 pro n < 0.

V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1\rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1\rangle$. V tom případě je

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=\max(0,\, N_2-n+1)}^{\min(n,\, N_1-1)} x_1(m).x_2(n-m) \tag{4}$$

Posloupnost x(n), jež je výsledkem konvoluce, lze považovat za posloupnost $x_1(n)$ modifikovanou vlastnostmi konvolučního jádra ($x_2(n)$). Jak vyplývá hned z dále uvedeného komutativního zákona, význam obou vstupních posloupností lze zaměnit. Význam konvoluce lze vnímat ještě i jinak – jako váhovaný, tzv. klouzavý průměr posloupnosti $x_1(m)$ v čase n, přičemž váhování je dáno v čase invertovanou jádrovou posloupností $x_2(-m)$ posunutou o čas n.

Pro konvoluci platí následující zákony:

- komutativní zákon

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n); \tag{5}$$

- distributivní zákon

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n); \tag{6}$$

- asociativní zákon

$$x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n); \tag{7}$$

- zákon o posunu v čase

Je-li $x_1(n) * x_2(n) = c(n)$, pak

$$x_1(n) * x_2(n-N) = c(n-N),\ x_1(n-N) * x_2(n) = c(n-N)$$

a

$$x_1(n-N_1) * x_2(n-N_2) = c(n-N_1-N_2). \tag{8}$$

- šířková vlastnost konvoluce

Pokud j sou doby t rvání/šířky (tj. počty vzorků v ne nulové s ekvenci) pos loupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$ konečné, např. N_1 v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 pro $x_2(n)$, je počet vzorků výsledné konvoluční posloupnosti obou originálních pos loupností rovna $N_1 + N_2 - 1$.

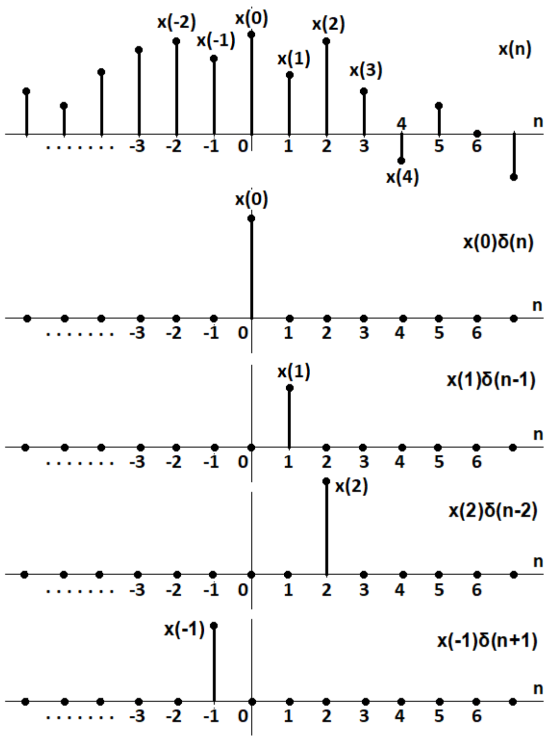
- konvoluce posloupnosti s jednotkovým impulzem

Výsledkem konvol uce pos loupnosti x(n) s jednotkovým impulzem je posloupnost x(n).

Z definice konvol uce vy plývá (obr.2), že

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m).\delta(n-m). \tag{9}$$

Jak pl yne i z obr.2 součin jednotkového impulzu s posloupností x(n) je roven hodnotě vzorku posloupnosti x(n) v poloze, do které je



Obr.2 Geometrická reprezentace konvoluce posloupnosti x(n) s jednotkovým impulzem

jednotkový impulz posunutý. Můžeme tedy podle obr.2 psát, že

$$x(n) = \ldots + x(-1).\delta(n+1) + x(0).\delta(n) + x(1).\delta(n-1) + x(2).\delta(n-2) + \ldots = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,\delta(n-m). \qquad (10)$$

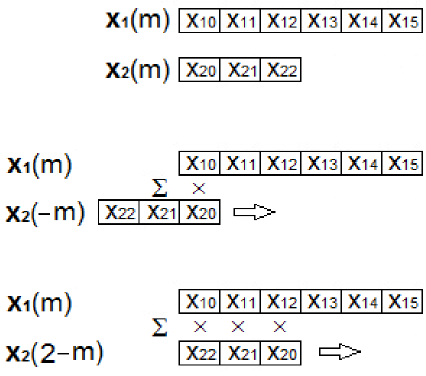
Protože δ(n–m) reprezentuje jednotkový impulz posunutý oproti počátku o m vzorků, je suma ve vztazích (9) i (10) rovna hodnotě x(m) pro m = n, tj. x(n). Tedy

$$x(n) * \delta(n) = x(n). \qquad (11)$$

Jak je vidět, s pravidlem pro konvoluci posloupnosti s jednotkovým impulzem souvisí i to v poznámce uvedené pěkné české slovo „splet“.

Další opakování – algoritmy výpočtu

Základním postupem výpočtu konvoluce je ten, který vyplývá z definice. Spočívá v součtu možných dílčích součinů prvků posloupnosti x_1 a v čase invertované a o n prvků posunuté posloupnosti x_2 (obr.3).



Obr.3 Schéma výpočetního algoritmu konvoluce konečných posloupností

Příklad 1

Podle definičního vztahu spočítejte konvoluci dvou konečných posloupností $x_1(n) = \{1, 2, 3, 2, 1\}$ a $x_2(n) = \{1, 2, -1\}$.

Řešení:

$x_1(n)$			1	2	3	2	1			
$x_2(-m)$	–1	2	1							x(0)= 1
$x_2(1-m)$		–1	2	1						x(1)= 4
$x_2(2-m)$			–1	2	1					x(2)= 6
$x_2(3-m)$				–1	2	1				x(3)= 6
$x_2(4-m)$					–1	2	1			x(4)= 2
$x_2(5-m)$						–1	2	1		x(5)= 0
$x_2(6-m)$							–1	2	1	x(6)= –1

Ve výsledné posloupnosti x(n) = {1, 4, 6, 6, 2, 0, -1} je zřejmá platnost šířkového pravidla – posloupnost $x_1(n)$ má 5 prvků, posloupnost $x_2(n)$ tři prvky a výsledná posloupnost x(n) má 5 + 3 – 1 = 7 prvků. Dále je ze způsobu výpočtu vidět, že na začátku a konci výpočtu nedochází k plnohodnotnému součtu tří součinů, tak jak odpovídá délce posloupnosti $x_2(n)$. Tedy na začátku a konci výsledné posloupnosti x(n) se vyskytuje přechodný děj o délce, která odpovídá délce kratší posloupnosti mínus jedna. □□□

Pro výpočet konvoluce dvou konečných posloupností se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\{x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{1,N1}\} * \{x_{20}, x_{21}, \ldots, x_{2,N2}\} =$$

$$\begin{array}{lllllll}
= (x_{10}.x_{20}) & (x_{10}.x_{21}) & \ldots\ldots\ldots & (x_{10}.x_{2,N2}) & & & \\
 & (x_{11}.x_{20}) & (x_{11}.x_{21}) \ldots\ldots & (x_{11}.x_{2,N2-1}) & (x_{11}.x_{2,N2}) & & \\
 & & (x_{12}.x_{20})\ (x_{12}.x_{21}) \ldots & (x_{12}.x_{2,N2-2}) & (x_{12}.x_{2,N2-1}) & (x_{12}.x_{2,N2}) & \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & & & (x_{1,N1}.x_{2,N2-3}) & (x_{1,N1}.x_{2,N2-2}) & (x_{1,N1}.x_{2,N2-1}) & (x_{1,N1}.x_{2,N2}) \\ \hline
\end{array}$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

Příklad 2

Pro posloupnosti zadané v Příkladu 1 vypočtěte jejich konvoluci pomocí výše uvedeného schématu.

Řešení:

$$
\begin{array}{r}
\{1, 2, 3, 2, 1\} * \{1, 2, -1\} = \\
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & 1 & 2 & -1 & & & & \\
 & & 2 & 4 & -2 & & & \\
 & & & 3 & 6 & -3 & & \\
 & & & & 2 & 4 & -2 & \\
 & & & & & 1 & 2 & -1 \\ \hline
x(n) = & \{1, & 4, & 6, & 6, & 2, & 0, & -1\}
\end{array}
\end{array}
$$

Zde nelze než konstatovat, že oba způsoby výpočtu vedou k témuž výsledku. □□□

Posledním algoritmem pro konvoluční výpočet je maticová varianta podle následujícího vztahu, vhodná především pro softwarové implementace. Předpokládejme, že posloupnost x_1 má prvky $x_1(n) = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1,N1}\}$ a posloupnost x_2 prvky $x_2(n) = \{x_{20}, x_{21}, \dots, x_{2,N2}\}$. Konvoluční výpočet je realizován násobením řádkového vektoru obsahujícího prvky posloupnosti x_1 diagonální maticí s počtem řádků rovným počtu prvků posloupnosti x_1 a počtem sloupců určeným délkou výsledné konvoluční posloupnosti, tj. N_1+N_2-1. Matice obsahuje prvky posloupnosti x_2 uspořádanými diagonálně s prvním prvkem na hlavní diagonále. Zbylé prvky matice jsou doplněny nulami (obr.4).

$$\{x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1,N1}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2,N2}\} =$$

$$
= [x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1N_1}] \cdot
\begin{bmatrix}
x_{20} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,N_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2,N_2-1} & x_{2,N_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & x_{20} & \dots & x_{2,N_2-2} & x_{2,N_2-1} & x_{2,N_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & x_{20} & \dots & x_{2,N_2-1} & x_{2,N_2}
\end{bmatrix}
$$

Obr.4 Výpočet konvoluce dvou posloupností pomocí maticového počtu

Příklad 3

Pro posloupnosti zadané v Příkladu 1 vypočtěte jejich konvoluci pomocí maticového počtu.

Řešení:

$$
\{1, 2, 3, 2, 1\} * \{1, 2, -1\} = [1, 2, 3, 2, 1] \cdot
\begin{bmatrix}
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1
\end{bmatrix} =
$$

$$= [1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0+2\cdot0+1\cdot0;\ 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot0+2\cdot0+1\cdot0;\ 1\cdot(-1)+2\cdot2+3\cdot1+2\cdot0+1\cdot0;\ 1\cdot0+2\cdot(-1)+3\cdot2+$$
$$+2\cdot1+1\cdot0;\ 1\cdot0+2\cdot0+3\cdot(-1)+2\cdot2+1\cdot1;\ 1\cdot0+2\cdot0+3\cdot0+2\cdot(-1)+1\cdot2;\ 1\cdot0+2\cdot0+3\cdot0+2\cdot0+1\cdot(-1)] =$$

$$= \{1, 4, 6, 6, 2, 0, -1\}.$$ □□□

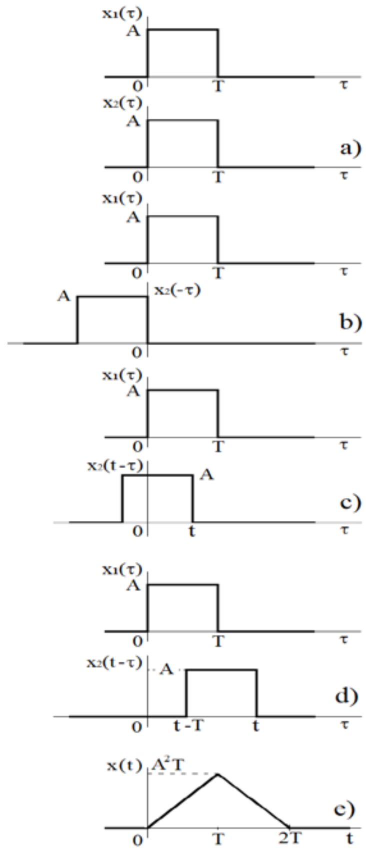
A když už jsme si všechno potřebné zopakovali, tak se dejme do počítání (a taky přemýšlení o tom co počítání přineslo).

Příklad 4

Začněme příkladem výpočtu konvoluce dvou funkcí se spojitým časem (a bude to skoro poslední případ, kdy se v této kapitole budeme zabývat funkcemi spojitými v čase). Určete průběh konvoluce dvou stejných (co do velikosti i doby trvání) obdélníkových funkcí se spojitým časem.

Řešení:

Nejdříve trochu ne příliš matematické úvahy. Tvar zadaných funkcí lze nahlédnout na obr.4a. Předpokládáme, že doba trvání obou obdélníků je T a jejich výška A. Protože oba obdélníky jsou jednorázové, nemá smysl se zabývat úvahami, co předchází a následuje po jejich bezprostřední vzájemné interakci. Lze tedy začít v poloze zobrazené na obr.4b, kdy je funkce $x_2(t)$ právě jen invertovaná v čase. Posun funkce $x_2(t)$ z této iniciační polohy způsobuje, že součin obou funkcí již není nulový a s růstem posunu roste i plocha/integrál vymezená/ý intervalem jejich nenulového součinu (obr.4c). Tento interval začíná na počátku časové osy ($\tau = 0$) a zvětšuje se s hodnotou posunu t. Ta nenulová součinová plocha roste lineárně s velikostí posunu t a maxima nabývá právě když obě obdélníkové funkce tzv. lícují, tj. když se funkce $x_2(t)$ posunula přesně o dobu svého trvání, tedy pro $x_2(T-\tau)$. Od tohoto okamžiku se plocha vymezená nenulovým součinem obou funkcí bude zmenšovat, opět lineárně s časem a časový interval bude definován $\langle t-T, T\rangle$. Hodnota výsledné konvoluční funkce proto klesne k nule v čase 2T, kdy už vzájemný přesah obou obdélníků bude nulový.



Obr.4 Ilustrace výpočtu konvoluce podle zadání Příkladu 4. Je užitečné si uvědomit rozdíl mezi proměnnými t (proměnná výsledné konvoluční funkce a tím i současně proměnná časového posunu) a τ (integrační proměnná).

Na základě uvedeného rozboru můžeme přikročit k výpočtu. Definiční integrál

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) . x_2(t-\tau) . d\tau,$$

se rozdělí na dva případy: a) pro čas v intervalu $\langle 0, T\rangle$ a b) v intervalu $\langle T, 2T\rangle$.

ad a) $t \in \langle 0, T\rangle$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{0}^{t} x_1(\tau) . x_2(t-\tau) . d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t} A . A . d\tau = A^2 . [\tau]_0^t = A^2 . t.$$

Dosadíme-li obě mezní hodnoty časového intervalu, pak dostáváme pro t = 0 hodnotu konvoluční funkce x(t) = 0 a pro t = T $x(t) = A^2T$. Mezi těmito dvěma mezními hodnotami je konvoluční funkce lineárně rostoucí s časem podle vztahu $x(t) = A^2t$ tak, jak jsme očekávali ve výše uvedeném rozboru.

ad b) $t \in \langle T, 2T\rangle$

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-T}^{T} x_1(\tau) . x_2(t-\tau) . d\tau = \int_{t-T}^{T} A . A . d\tau = A^2 . [\tau]_{t-T}^{T} =$$

$$= A^2 . (T - t + T) = A^2 . (2T - t).$$

Dosadíme-li opět mezní hodnoty časového intervalu, pak pro t = T logicky dostáváme tutéž hodnotu jako ve výše uvedeném případu $x(T) = A^2T$ a pro t = 2T je hodnota konvoluční funkce opět nulová x(2T) = 0. Průběh konvoluční funkce v tomto dílčím intervalu bude s časem lineárně klesající.

Konvoluční funkce je nenulová v intervalu ⟨0, 2T⟩. Lze tedy konstatovat, že pro funkce spojité v čase je šířka (doba trvání) výsledné konvoluční funkce dána součtem dob trvání obou dílčích funkcí.

□□□

Příklad 5

Zde si ověřme, že výsledky získané v přechozím příkladu platí i pro posloupnosti s diskrétním časem. Tedy určeme konvoluci posloupností $x_1(n) = x_2(n) = \{2, 2, 2, 2, 2\}$ pro $n \in \langle 0, 4\rangle$ a rovné nule pro $n \notin \langle 0, 4\rangle$.

Řešení:

Použijme (a bude to tak ve všech následujících příkladech) algoritmus vyplývající z definičního vztahu. Zbylé dva postupy lze použít pro samostatné procvičení a posléze se lze rozhodnout, který z algoritmů se ukáže jako nejlepší z hlediska snadnosti a přehlednosti výpočtu.

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti x(n)		
$x_1(m)$	2 2 2 2 2			
$x_2(-m)$	2 2 2 2 2	n=0	4	= 4
$x_2(1-m)$	2 2 2 2 2	n=1	4+4	= 8
$x_2(2-m)$	2 2 2 2 2	n=2	4+4+4	= 12
$x_2(3-m)$	2 2 2 2 2	n=3	4+4+4+4	= 16
$x_2(4-m)$	2 2 2 2 2	n=4	4+4+4+4+4	= 20
$x_2(5-m)$	2 2 2 2 2	n=5	4+4+4+4	= 16
$x_2(6-m)$	2 2 2 2 2	n=6	4+4+4	= 12
$x_2(7-m)$	2 2 2 2 2	n=7	4+4	= 8
$x_2(8-m)$	2 2 2 2 2	n=8	4	= 4

Výsledná konvoluční posloupnost x(n) = {4, 8, 12, 16, 20, 16, 12, 8, 4 } je opět lineárně rostoucí, resp. klesající před a po okamžiku, kdy nastává úplné překrytí obou posloupností, tj. pro n= 4. První a poslední hodnota posloupnosti x(n) nejsou nulové, což vyplývá z v čase diskrétního charakteru dat. Nulové hodnoty by samozřejmě předcházely a následovaly před první a poslední hodnotou posloupnosti x(n). Maximální hodnota posloupnosti x(4) = 20 je dána součinem odpovídajících si hodnot obou posloupností a počtu jejích prvků ($N_1 = N_2 = 5$). Počet nenulových prvků výsledné posloupnosti N = 9 je $N_1 + N_2 - 1$, šířková vlastnost vskutku platí.

□□□

Co by se stalo, pokud by délky obou vstupních posloupností nebyly stejné?

Příklad 6
Určete konvoluční posloupnost posloupností $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$ a $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$.

Řešení:
Přímo počítejme:

										součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti x(n)		
$x_1(m)$			1	1	1	1	1					
$x_2(-m)$	1	1	1							n=0	1	= 1
$x_2(1-m)$		1	1	1						n=1	1+1	= 2
$x_2(2-m)$			1	1	1					n=2	1+1+1	= 3
$x_2(3-m)$				1	1	1				n=3	1+1+1	= 3
$x_2(4-m)$					1	1	1			n=4	1+1+1	= 3
$x_2(5-m)$						1	1	1		n=5	1+1	= 2
$x_2(6-m)$							1	1	1	n=6	1	= 1

Ve výsledné posloupnosti můžeme vidět tři hodnoty v jejím středu ($x(n) = 3$, pro $n = 2,3,4$), které jsou určeny všemi třemi prvky posloupnosti $x_2(n)$. Této části posloupnosti předcházejí, resp. ji následují sekvence určené nikoliv ze všech prvků, pouze z jednoho, resp. dvou vzorků. O této počáteční, příp. koncové části výsledné konvoluční posloupnosti říkáme, že představují přechodný děj, střední část reprezentuje ustálený děj. Z tohoto pohledu ve výsledné konvoluční posloupnosti z Příkladu 5 ustálený stav reprezentuje pouze jeden jediný vzorek $x(4)$.

Počet vzorků výstupní posloupnosti N=7, což je $N_1 + N_2 - 1$. Šířková vlastnost konvoluce tedy stále platí. □□□

Co by se stalo, pokud bychom posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ zaměnili?

Příklad 7
Určete konvoluční posloupnost posloupností $x_1(n) = \{1, 1, 1\}$ a $x_2(n) = \{1, 1, 1, 1, 1\}$.

Řešení:
Opět přímo počítejme:

												součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti x(n)		
$x_1(m)$					1	1	1							
$x_2(-m)$	1	1	1	1	1							n=0	1	= 1
$x_2(1-m)$		1	1	1	1	1						n=1	1+1	= 2
$x_2(2-m)$			1	1	1	1	1					n=2	1+1+1	= 3
$x_2(3-m)$				1	1	1	1	1				n=3	1+1+1	= 3
$x_2(4-m)$					1	1	1	1	1			n=4	1+1+1	= 3
$x_2(5-m)$						1	1	1	1	1		n=5	1+1	= 2
$x_2(6-m)$							1	1	1	1	1	n=6	1	= 1

Všechno, co bylo uvedeno pro výsledky Příkladu 6 platí i v tomto případě. Znamená to, že si stále můžeme být jistí platností komutativního zákona. □□□

Příklad 8

Určete konvoluční posloupnost dvou jednotkových skoků, tj. posloupností $x_1(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ a $x_2(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$, pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Řešení:

Opět přímo počítejme:

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		x(n)
$x_1(m)$	1 1 1 1 1 1 1 1 1…			
$x_2(-m)$	… 1 1 1	n=0	1	= 1
$x_2(1-m)$	… 1 1 1 1	n=1	1+1	= 2
$x_2(2-m)$	… 1 1 1 1 1	n=2	1+1+1	= 3
$x_2(3-m)$	… 1 1 1 1 1	n=3	1+1+1+1	= 4
$x_2(4-m)$	… 1 1 1 1 1	n=4	1+1+1+1+1	= 5
$x_2(5-m)$	… 1 1 1 1 1 1	n=5	1+1+1+1+1+1	= 6
$x_2(6-m)$	… 1 1 1 1 1 1 1	n=6	1+1+1+1+1+1+1	= 7
$x_2(7-m)$	… 1 1 1 1 1 1 1 1	n=7	1+1+1+1+1+1+1+1	= 8
$x_2(8-m)$	… 1 1 1 1 1 1 1 1 1	n=8	1+1+1+1+1+1+1+1+1	= 9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Výsledkem konvoluce dvou diskrétních jednotkových skoků je nekonečná lineárně rostoucí posloupnost.

V podstatě téhož výsledku bychom dosáhli ve spojitém čase (obr.5). V tom případě je

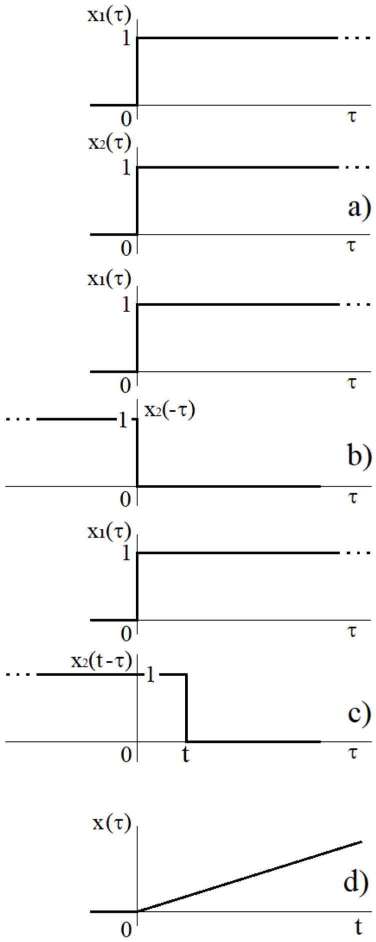
$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\,.\,x_2(t-\tau).\,d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau).\,\sigma(t-\tau).\,d\tau.$$

Protože jednotkový skok náleží do třídy kauzálních funkcí, můžeme pro jejich konvoluci psát

$$x(t) = \int_0^t \sigma(\tau).\,\sigma(t-\tau).\,d\tau = \int_0^t 1.1.\,d\tau = [\tau]_0^t = t.$$

□□□



Obr.5 Konvoluce dvou jednotkových skoků ve spojitém čase

Příklad 9

Určete konvoluční posloupnost diskrétního jednotkového skoku $x_1(n) = \sigma(n) = \{1, 1, 1, \ldots\}$ s konečnou obdélníkovou posloupností, např. $x_2(n) = \{1, 1, 1\}$.

Řešení:

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		x(n)
$x_1(m)$	1 1 1 1 1 1 1 …….			
$x_2(-m)$	1 1 1	n=0	1	= 1
$x_2(1-m)$	1 1 1	n=1	1+1	= 2
$x_2(2-m)$	1 1 1	n=2	1+1+1	= 3
$x_2(3-m)$	1 1 1	n=3	1+1+1	= 3
$x_2(4-m)$	1 1 1	n=4	1+1+1	= 3
$x_2(5-m)$	1 1 1	n=5	1+1+1	= 3
$x_2(6-m)$	1 1 1	n=6	1+1+1	= 3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

V tomto případě je výsledkem nekonečná (díky jednotkovému skoku) konstantní (díky konečné obdélníkové posloupnosti) posloupnost, která následuje přechodný děj, jehož délka je standardně dána počtem vzorků obdélníkové posloupnosti $N_2 - 1$. □□□

Příklad 10 (pro samostatné procvičení)

Vypočtěte konvoluční posloupnost diskrétního jednotkového skoku $x_1(n) = \sigma(n) = \{1, 1, 1, \ldots\}$ s konečnou posloupností $x_2(n) = \{1, -1\}$. Průběh vypočtené konvoluční posloupnosti vysvětlete.

Řešení:

$x(n) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\}$. □□□

Příklad 11

Určete konvoluční posloupnost nekonečné posloupnosti $x_1(n) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$ s posloupností $x_2(n) = \{1, 0, 0, 0, 1\}$.

Řešení:

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		x(n)
$x_1(m)$	1 0 –1 0 1 0 –1 0 1 0 –1 0			
$x_2(-m)$	1 0 0 0 1	n=0	1	= 1
$x_2(1-m)$	1 0 0 0 1	n=1	0+0	= 0
$x_2(2-m)$	1 0 0 0 1	n=2	0+0-1	= –1
$x_2(3-m)$	1 0 0 0 1	n=3	0+0+0+0	= 0
$x_2(4-m)$	1 0 0 0 1	n=4	1+0+0+0+1	= 2
$x_2(5-m)$	1 0 0 0 1	n=5	0+0+0+0+0	= 0
$x_2(6-m)$	1 0 0 0 1	n=6	-1+0+0+0-1	= –2
$x_2(7-m)$	1 0 0 0 1	n=7	0+0+0+0+0	= 0
$x_2(8-m)$	1 0 0 0 1	n=8	1+0+0+0+1	= 2
$x_2(9-m)$	1 0 0 0 1	n=9	0+0+0+0+0	= 0
$x_2(10-m)$	1 0 0 0 1	n=10	-1+0+0+0-1	= –2
$x_2(11-m)$	1 0 0 0 1	n=11	0+0+0+0+0	= 0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Posloupnost $x_1(n)$ je periodická s periodou T = 4 vzorky, pátý vzorek začíná novou periodu. Této periodicitě odpovídá počet vzorků posloupnosti $x_2(n)$, přičemž první a poslední vzorek představuje váhový koeficient, který vzhledem ke své poloze zdůrazňuje právě periodicitu posloupnosti $x_1(n)$. Proto je výsledná konvoluční posloupnost v ustáleném stavu (pro $n \geq 4$) rovněž periodická s toutéž periodou jako $x_1(n)$. Ustálený stav následuje za přechodným dějem o délce $N_2 – 1$, tj. 4 vzorky. □□□

Příklad 12

Určete konvoluční posloupnost nekonečné posloupnosti $x_1(n)$ = {1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, …} s posloupností $x_2(n)$ = {1, 0, 0, 0, –1}.

Řešení:

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti x(n)
$x_1(m)$	1 0 –1 0 1 0 –1 0 1 0 –1 0	
$x_2(–m)$	–1 0 0 0 1	n=0 1 = 1
$x_2(1–m)$	–1 0 0 0 1	n=1 0+0 = 0
$x_2(2–m)$	–1 0 0 0 1	n=2 0+0–1 = –1
$x_2(3–m)$	–1 0 0 0 1	n=3 0+0+0+0 = 0
$x_2(4–m)$	–1 0 0 0 1	n=4 –1+0+0+0+1 = 0
$x_2(5–m)$	–1 0 0 0 1	n=5 0+0+0+0+0 = 0
$x_2(6–m)$	–1 0 0 0 1	n=6 1+0+0+0–1 = 0
$x_2(7–m)$	–1 0 0 0 1	n=7 0+0+0+0+0 = 0
$x_2(8–m)$	–1 0 0 0 1	n=8 –1+0+0+0+1 = 0
$x_2(9–m)$	–1 0 0 0 1	n=9 0+0+0+0+0 = 0
$x_2(10–m)$	–1 0 0 0 1	n=10 1+0+0+0–1 = 0
$x_2(11–m)$	–1 0 0 0 1	n=11 0+0+0+0+0 = 0
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮

Na rozdíl od Příkladu 11 mají v tomto případě nenulové prvky (první a pátý) posloupnosti $x_2(n)$ opačné znaménko, tzn. že periodicita posloupnosti $x_1(n)$ je potlačována, což je z výsledné konvoluční posloupnosti naprosto zřejmé; po krátkém přechodném zakmitnutí na jejím začátku. □□□

Příklad 13 (zase jen pro samostatné procvičení)

Vypočtěte konvoluční posloupnost nekonečné posloupnosti $x_1(n)$ = {1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, …} s posloupnostmi a) $x_{2a}(n)$ = {1, 0, 1} a b). $x_{2b}(n)$ = {1, 0, –1}, c) $x_{2c}(n)$ = {–1, 0, 1}; d) $x_{2d}(n)$ = {0, 1, 0, –1}. Průběh výsledných posloupností vysvětlete.

Řešení:

a) $x_a(n)$ = {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, …};
b) $x_b(n)$ = {1, 0, –2, 0, 2, 0, –2, 0, 2, …};
c) $x_c(n)$ = {–1, 0, 2, 0, –2, 0, 2, 0, –2, …};
d) $x_c(n)$ = {0, 1, 0, –2, 0, 2, 0, –2, 0, 2, …}. □□□

Příklad 14

Určete konvoluční posloupnost nekonečné lineárně rostoucí posloupnosti $x_1(n) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ s posloupnostmi a) $x_{2a}(n) = \{1, 1\}$; b) $x_{2b}(n) = \{1, 1, 1\}$ a c) $x_{2c}(n) = \{1, -1\}$.

Řešení:

a)

												součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		$x_a(n)$	$x_a(n)/2$
$x_1(m)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…				
$x_{2a}(-m)$	1	1										n=0	1	= 1	= 0,5
$x_{2a}(1-m)$		1	1									n=1	2+1	= 3	= 1,5
$x_{2a}(2-m)$			1	1								n=2	3+2	= 5	= 2,5
$x_{2a}(3-m)$				1	1							n=3	4+3	= 7	= 3,5
$x_{2a}(4-m)$					1	1						n=4	5+4	= 9	= 4,5
$x_{2a}(5-m)$						1	1					n=5	6+5	= 11	= 5,5
$x_{2a}(6-m)$							1	1				n=6	7+6	= 13	= 6,5
$x_{2a}(7-m)$								1	1			n=7	8+7	= 15	= 7,5
$x_{2a}(8-m)$									1	1		n=8	9+8	= 17	= 8,5
⋮									⋮			⋮	⋮	⋮	⋮

b)

													součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		$x_b(n)$	$x_b(n)/3$
$x_1(m)$			1	2	3	4	5	6	7	8	9	…				
$x_{2b}(-m)$	1	1	1										n=0	1	= 1	= 0,33
$x_{2b}(1-m)$		1	1	1									n=1	2+1	= 3	= 1,0
$x_{2b}(2-m)$			1	1	1								n=2	3+2+1	= 6	= 2,0
$x_{2b}(3-m)$				1	1	1							n=3	4+3+2	= 9	= 3,0
$x_{2b}(4-m)$					1	1	1						n=4	5+4+3	= 12	= 4,0
$x_{2b}(5-m)$						1	1	1					n=5	6+5+4	= 15	= 5,0
$x_{2b}(6-m)$							1	1	1				n=6	7+6+5	= 18	= 6,0
$x_{2b}(7-m)$								1	1	1			n=7	8+7+6	= 21	= 7,0
$x_{2b}(8-m)$									1	1	1		n=8	9+8+7	= 24	= 8,0
⋮										⋮			⋮	⋮	⋮	⋮

c)

												součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti		$x_c(n)$
$x_1(m)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…			
$x_{2c}(-m)$	–1	1										n=0	1	= 1
$x_{2c}(1-m)$		–1	1									n=1	2 – 1	= 1
$x_{2c}(2-m)$			–1	1								n=2	3 – 2	= 1
$x_{2c}(3-m)$				–1	1							n=3	4 – 3	= 1
$x_{2c}(4-m)$					–1	1						n=4	5 – 4	= 1
$x_{2c}(5-m)$						–1	1					n=5	6 – 5	= 1
$x_{2c}(6-m)$							–1	1				n=6	7 – 6	= 1
$x_{2c}(7-m)$								–1	1			n=7	8 – 7	= 1
$x_{2c}(8-m)$									–1	1		n=8	9 – 8	= 1
⋮									⋮			⋮	⋮	⋮

Pokud jsou hodnoty všech prvků posloupnosti $x_2(n)$ kladné, reprezentuje výpočet každého prvku výsledné konvoluční posloupnosti součet, resp. průměr (pokud výsledek součtu podělíme počtem vzorků posloupnosti $x_2(n)$) prvků posloupnosti $x_1(n)$. Protože se poloha posloupnosti $x_2(n)$ posouvá, nazýváme tento způsob výpočtu konvoluční posloupnosti klouzavý průměr (angl. *Moving Average*, zkr. *MA*).

Vzhledem k tomu, že hodnoty posloupnosti $x_1(n)$ rostou lineárně s diferencí jedna, tak hodnoty prvků výsledné posloupnosti také lineárně porostou, přičemž diference mezi sousedními prvky bude v případě kumulačního výpočtu rovna délce posloupnosti $x_2(n)$, v případě výpočtu průměru jsou výsledné hodnoty vztaženy k délce posloupnosti $x_2(n)$ a proto rovny jedné. (Vše uvedené samozřejmě neplatí pro přechodné děje na začátku výsledné posloupnosti.)

V případě c) představuje konvoluční výpočet klouzavou diferenci mezi sousedními vzorky posloupnosti $x_1(n)$ a ta je zcela jasně jednotková. □□□

Příklad 15

Mějme posloupnost $x_1(n) = \{1, 0, 1, –2, 1, 0, 1, –2, 1, 0, \ldots\}$ (obr.6a) danou součtem dvou dílčích posloupností $x_{11}(n) = \{0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, \ldots\}$ (obr.6b) a $x_{12}(n) = \{1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, 1, –1, \ldots\}$ (obr.6c).

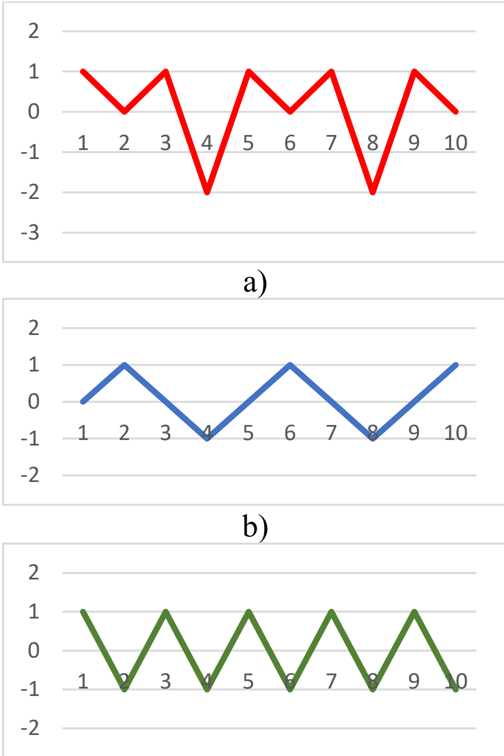
Určete konvoluční posloupnost posloupnosti $x_1(n)$ s posloupnostmi a) $x_{2a}(n) = \{1, 0, –1, 0\}$; b) $x_{2b}(n) = \{1, –1\}$.

Řešení:

Posloupnost $x_1(n)$ vytvořená součtem obou dílčích periodických posloupností je opět periodická s periodou odpovídající delší z obou period (4 vzorky) dílčích posloupností, nicméně je v ní patrný i významný příspěvek posloupnosti $x_{12}(n)$ s vyšší frekvencí.

Poznámka:

Vyzkoušejte, jaký tvar by měla posloupnost $x_1(n)$, pokud by posloupnost $x_{11}(n)$ začínala až jedničkou, tj. byla by $\{1, 0, –1, 0, 1, 0, –1, 0, 1, 0, \ldots\}$. To, abyste si ověřili jak se může do výsledné směsi harmonických složek promítnout změna jejich počátečních fází.



c)

Obr.6 Zadaná posloupnost a) $x_1(n)$ a její dílčí b) složky $x_{11}(n)$ a c) $x_{12}(n)$

Posloupnost $x_{2a}(n)$ obsahuje hodnoty (doplnění nulou na konci má pouze formální důvod, výsledek konvoluce by byl v podstatě týž, i kdyby byla posloupnost pouze tříprvková, tj. $x'_{2a}(n) = \{1, 0, –1\}$), které odpovídají právě jedné periodě posloupnosti $x_{11}(n)$, zatímco posloupnost $x_{2b}(n)$ hodnoty, odpovídající jedné periodě posloupnosti $x_{12}(n)$. Jak lze vysledovat z číselných výsledků i z jejich grafického zobrazení na obr.7, charakteru posloupností $x_{2a}(n)$ i $x_{2b}(n)$ odpovídají v obou případech i výsledky konvolučních výpočtů.

V případě konvoluce s posloupností $x_{2a}(n)$ je naprosto zřejmé, že výsledná posloupnost tvarově kopíruje tvar složky $x_{11}(n)$ – kromě přechodného děje na začátku (teoreticky bychom mohli spekulovat, zda přechodný děj trvá dva či tři vzorky, vzhledem k nule na konci posloupnosti $x_{2a}(n)$). Maximální a minimální hodnoty ve výsledné posloupnosti $x_a(n)$ (2, –2) jsou ve srovnání s extrémními hodnotami posloupnosti $x_{2a}(n)$ dvojnásobné, což je v tomto případě způsobeno dvěma nenulovými jednotkovými prvky posloupnosti $x_{2a}(n)$.

Tvar výsledné posloupnosti $x_b(n)$ konvoluce $x_1(n)$ a $x_{2b}(n)$ není ve srovnání s předchozím případem tak ideální, nicméně i zde je patrné zvýraznění složky s vyšší frekvencí

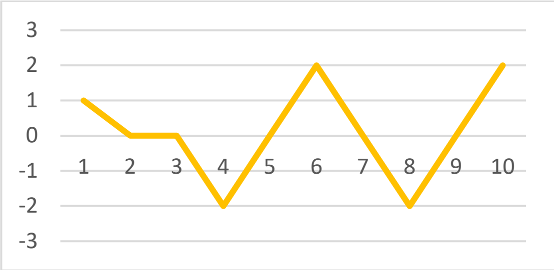
a)

		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti $x_a(n)$
$x_1(m)$	1 0 1 –2 1 0 1 –2 1 0	
$x_{2a}(-m)$	0 –1 0 1	n=0 1 = 1
$x_{2a}(1-m)$	0 –1 0 1	n=1 0+ 0 = 0
$x_{2a}(2-m)$	0 –1 0 1	n=2 1+ 0 – 1 = 0
$x_{2a}(3-m)$	0 –1 0 1	n=3 –2+ 0 + 0+ 0 = –2
$x_{2a}(4-m)$	0 –1 0 1	n=4 1+ 0 – 1+ 0 = 0
$x_{2a}(5-m)$	0 –1 0 1	n=5 0+ 0 + 2+ 0 = 2
$x_{2a}(6-m)$	0 –1 0 1	n=6 1+ 0 – 1+ 0 = 0
$x_{2a}(7-m)$	0 –1 0 1	n=7 –2+ 0 + 0+ 0 = –2
$x_{2a}(8-m)$	0 –1 0 1	n=8 1+ 0 – 1+ 0 = 0
$x_{2a}(9-m)$	0 –1 0 1	n=9 0+ 0 + 2+ 0 = 2
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮

b)

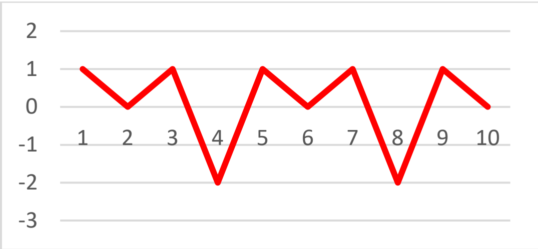
		součet realizovatelných součinů vzorků posloupnosti, tj. hodnoty výsledné konvoluční posloupnosti $x_b(n)$
$x_1(m)$	1 0 1 –2 1 0 1 –2 1 0 …	
$x_{2b}(-m)$	–1 1	n=0 1 = 1
$x_{2b}(1-m)$	–1 1	n=1 0 – 1 = –1
$x_{2b}(2-m)$	–1 1	n=2 1 + 0 = 1
$x_{2b}(3-m)$	–1 1	n=3 –2 – 1 = –3
$x_{2b}(4-m)$	–1 1	n=4 1 + 2 = 3
$x_{2b}(5-m)$	–1 1	n=5 0 – 1 = –1
$x_{2b}(6-m)$	–1 1	n=6 1 + 0 = 1
$x_{2b}(7-m)$	–1 1	n=7 –2 – 1 = –3
$x_{2b}(8-m)$	–1 1	n=8 1 + 2 = 3
$x_{2b}(9-m)$	–1 1	n=9 0 – 1 = –1
⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮

□□□



a)

b)



c)

Obr.7 Výsledky konvoluce s posloupnostmi a) $x_a(n)$ a b) $x_b(n)$ v porovnání se vstupní posloupností c) $x_1(n)$ (také obr.6a)