Elektrodynamika

1 Elektrické a magnetické veličiny, jednotky SI

Elektrický proud I je v systému SI základní veličina, jednotka je **1 Ampere** (1 A). Definice: Stejné proudy ve 2 rovnoběžných drátech ve vzdalenosti 1 m mají velikost 1 A, když vzájemná přitahovací síla na 1 m drátu je $2 \cdot 10^{-7}$N.

Náboj q: Zdroj elektromagnetických sil, pohybuje se ve vodiči, když teče elektrický proud. Jednotka: **1 Coulomb** (1 C).
Definice: Při elektrickém proudu o 1 A proteče průřezem vodiče 1 C za sekundu.
$1\ \mathrm{C} = 1\ \mathrm{As} \approx 6 \cdot 10^{18}$ elementárních nábojů.

Coulombův zákon Přitažlivá nebo odpudivá síla dvou nábojů q_1 a q_2 v místech $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$

$$\boxed{\vec{F} = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \qquad F = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2},} \tag{1}$$

kde $r_{12} = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ a k je konstanta. Dimenze $[k]$ této konstanty výplyvá z (1).

$$\mathrm{N} = [k]\,\frac{\mathrm{As} \cdot \mathrm{As}}{\mathrm{m}^2} \Rightarrow [k] = \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2}.$$

Definice Amperu byla tak zvolena, aby

$$k = 10^{-7} c^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2},$$

kde c je rychlosti světla. V SI se píše z historických důvodů

$$k =: \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

s tzv. „dielektrickou konstantou vakua“

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N\,m}^2}. \tag{2}$$

Poznámka: Mohli bychom předpokládat $k = 1$. Tím bychom určovali dimenzi náboje, vyjádřenou mechanickými veličinami. V systému cgs dostáváme z Coulombova zákona

$$\mathrm{dyn} = \frac{\mathrm{g\,cm}}{\mathrm{s}^2} = \frac{[q]^2}{\mathrm{cm}^2}, \quad \Rightarrow \quad [q] = \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{cm}^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

To je jednotka náboje v Gaußově systému.
Elektrické pole: Síla souboru nábojů $q_1, \ldots, q_N$ v místech $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N$ na další náboj q v bodě $\vec{x}$ je popsaná působením elektrického pole v bodě $\vec{x}$ na náboj.

Intenzita eletrického pole $\vec{E}(\vec{x})$ je lokální vlastnost prostoru, v němž se nacházejí elektické náboje.

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q\, q_i\, \frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} =: q\,\vec{E}(\vec{x}). \tag{3}$$

Intenzita = síla na jednotkový náboj.
Dimenze:

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mC}}.$$

Nápětí U. Práce = změna potenciální energie při pohybu náboje v elektrickém poli je daná integrálem

$$W = \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}.$$

V prípadě pohybu o vzdalenost l podél homogenního elektrického pole (např. v deskovém kondensátoru) platí jednoduše

$$W = q\,E\,l =: q\,U.$$

Elektrické nápětí je rozdíl potenciální energie jednotkového náboje na dvou bodech.
Dimenze: $[U] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$
Jednotka: **1 Volt** $= 1V = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$.
Volt se používá pro běžné označení jednotky elektrického pole, $[E] = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Magnetické pole. (Stacionární) elektrické proudy vyvolávají síly na pohybující se náboje (Lorentzova síla). Analogicky k zavedení intenzity elektrického pole uvažujeme sílu souboru eletrických proudů v dáném uspořadání vodičů na úsek dl jednoho dalšího drátu s konstantním proudem I. Síla je úměrná I a dl,

$$\mathrm{d}\vec{F}(\vec{x}) = I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}(\vec{x}). \tag{4}$$

Magnetická indukce $\vec{B}(\vec{x})$ zahrnuje působení všech elektických proudů v bodě $\vec{x}$.
Dimenze: Z (3) výplyvá

$$\mathrm{N} = \mathrm{A\,m[B]}, \Rightarrow \mathrm{[B]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Am}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Am^2}} = \frac{\mathrm{Js}}{\mathrm{Cm^2}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}}.$$

Jednotka: **1 Tesla** $= 1\mathrm{T} = 1\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m^2}}$.

Přispěvek elektrického proudu v úseku drátu dl na místě $\vec{x}_2$ k magnetickému poli v bodě $\vec{x}_1$ (analogicky Coulombovu zákonu) je

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{x}_1) = k_m\,I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}. \tag{5}$$

V SI se píše $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ je tzv. „magnetická permeabilita vakua“,

$$\mu_0 = 1,26\cdot 10^{-6}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A^2}}. \tag{6}$$

Síla mezi dvěma infinitesimálními úseky vodiče, umístěnými v bodech x_1 a x_2 s elektrickými proudy I_1 a I_2 (analogon Coulombova zákona):

$$\vec{F}(\vec{x}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \, \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \left(\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right).$$

Hustota náboje:

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{q}{\Delta V}, \qquad [\rho] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3},$$

kde q je naboj v objemu ΔV, který obsahuje bod $\vec{x}$.
Hustota proudu:

$$\vec{\jmath}(\vec{x}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{I}{\Delta A} \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}l}, \qquad [\vec{\jmath}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2},$$

kde ΔA je element průřezu vodiče a $\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}l}$ je jednotkový vektor ve směru elektrického proudu I.

2 Maxwellovy rovnice, statický případ

J. C. Maxwell našel v roce 1864 dvě vektorové a dvě skalární parciální diferenciální rovnice 1. řadu, které spojují elektrické a magnetické pole navzájem a s elektrickým nábojem. Z těch rovnic lze odvodit celá elektrodynamika.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, && \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ &\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\jmath}, && \mathrm{div}\vec{B} = 0. \end{aligned}} \tag{7}$$

Vektorové operátory div a rot lze vyjádřit pomoci operátoru Nabla,

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}. \tag{9}$$

Z Maxwellových rovnic plyne /em rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\jmath} = 0,$$

t. j. zachování náboje.

V případě statických polí, když časové derivace jsou nulové, odpojují se elektrické a magnetické pole.

Elektrostatika

Základní rovnice

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = 0. \tag{10}$$

Elektrostatické pole je bezvírové pole se zřídlem $\frac{\rho}{\epsilon_0}$. Pro takové pole existuje skalární potenciál ϕ tak že

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi = -\vec{\nabla}\phi. \tag{11}$$

Dosazením do Maxwellovy rovnice dostaneme

$$-\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,\phi = -\vec{\nabla}^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Definujeme Laplaceův operátor

$$\triangle := \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{12}$$

pak nabýva rovnice pro potenciál následující tvar,

$$\boxed{\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.} \tag{13}$$

Tato rovnice se nazývá Poissonova rovnice. Oprotí Maxwellově rovnici $\mathrm{div}\vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ má výhodu, že jejím řešením je jedna skalární funkce $\phi(\vec{x})$ místo vektorového pole $\vec{E}(\vec{x})$.

Magnetostatika

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}, \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{14}$$

Magnetostatické pole je bezzřídlové, siločáry jsou uzavřené; existuje vektorový potenciál $\vec{A}$, tak že

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}, \tag{15}$$

protože

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\vec{A} \equiv 0.$$

Dosazení do Maxwellovy rovnice vede k

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\vec{A} \equiv \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\vec{A} - \triangle\vec{A} = \mu_0\vec{\jmath},$$

nebo

$$\triangle\vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{A}) = -\mu_0\vec{\jmath}. \tag{16}$$

Potenciály nejsou jednoznačné určeny svými rovnicemi (13) a (16), ϕ je jednoznačné až na libovolnou konstantu, $\vec{A}$ až na gradient libovolné funkce, poněvadž rot grad$f \equiv 0$. Potenciály lze **kalibrovat**, jsou tzv. **kalibrační veličiny**.

3 Greenova funkce Poissonovy rovnice, δ-distribuce

Poissonova rovnice (13) je eliptická lineární parciální diferenciální rovnice druhého řadu. Pro takové rovnice existuje rozsahlá teorie, my budeme ale zkonstruovat řešení na základě známých fyzikálních skutečností.
Elektrické pole bodového náboje v počátku je

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \tag{17}$$

příslušný potenciál je

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \tag{18}$$

Pro hustotu bodového náboje v počátku platí

$$\rho(\vec{x}) \equiv 0 \qquad \forall \vec{x} \neq 0 \qquad\qquad \text{a} \qquad\qquad \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) = q.$$

Přestože taková funkce v klasickém smyslu neexistuje, existuje matematický objekt, který popisuje idealizaci bodového náboje a pomoci toho můžeme skladat elektrické pole a potenciál libovolného rozložení náboje z výrazů (17) a (18).

Hustota bodového náboje je zkonstruovaná pomocí „Diracovy δ-funkce“, která lze zavést jako limita funkcí s integrálem od minus do plus nekonečna rovným jedné, kterě jsou „více a více soustředěné na jeden bod“, např.

$$\delta(x) := \lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}e^{-\frac{x^2}{\epsilon}}. \tag{19}$$

Takové limity mají vlastnost, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x = f(0), \tag{20}$$

nebo obecněji,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,\mathrm{d}x' = f(x) \tag{21}$$

pro libovolnou spojitou funkci f. Integrál s δ-funkcí tedy vybírá hodnotu funkce v určitém bodě.

„Výběr určité funkční hodnoty“ je exaktní význam δ v rámci distribucí, t.j. jako zobrazení prostoru spojitých funkcí, do reálních nebo komplexních čísel. V jazyce distribucí se píše ekvivalent rovnice (21)

$$\delta_x[f] = f(x). \tag{22}$$

Distribuce δ_x přiřazuje funkci f funkční hodnotu $f(x)$; pro její definici stačí, že f je spojitá funkce.

Hustota bodového náboje v počátku souřadné soustavy se vyjádřuje trojrozměrnou δ-funkcí

$$\rho(\vec{x}) = q\,\delta^3(\vec{x}) = q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z). \tag{23}$$

Dosadíme potenciál a hustotu náboje v bodě $\vec{x}\,'$ do Poissonovy rovnice,

$$\triangle\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\triangle\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = -\frac{q}{\epsilon_0}\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'), \tag{24}$$

odvodíme z toho

$$\triangle\frac{-1}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'). \tag{25}$$

$$G(\vec{x},\vec{x}\,') := \frac{-1}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \tag{26}$$

se nazývá Greenova funkce Laplaceova operátoru (= potenciál jednoho jednotkového bodového náboje.)

Poněvadž Poissonova rovnice je lineární, můžeme zkonstruovat potenciál rozložení náboje $\rho(\vec{x})$ jako superpozici potenciálů bodových nábojů, tedy

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\,\rho(\vec{x}\,')\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}, \tag{27}$$

popřípadě

$$\phi(\vec{x}) = -\int \mathrm{d}^3x'\,G(\vec{x},\vec{x}\,')\,\frac{\rho(\vec{x}\,')}{\epsilon_0}. \tag{28}$$

To je řešení Poissonovy rovnice pro rozložení náboje $\rho(\vec{x})$. Důkaz:

$$-\triangle_x\phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x'\,\triangle_x G(\vec{x},\vec{x}\,')\,\frac{\rho(\vec{x}\,')}{\epsilon_0} = \int \mathrm{d}^3x'\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')\,\frac{\rho(\vec{x}\,')}{\epsilon_0} = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}.$$

Index x zdůrazňuje působení Laplaciánu na nečarkované souřadnice. Pro eletrostatické pole vyplývá z toho

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\,\rho(\vec{x}\,')\,\frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3}. \tag{29}$$

Greenova funkce není jednoznačná. $G(\vec{x},\vec{x}\,')$ plus libovolné řešení homogenné diferenciální rovnice $\triangle\phi = 0$ je také Greenovou funkcí stejného operátoru.

Greenova věta

Odečtením dvou identit,

$$\vec{\nabla}(u\vec{\nabla}v) = u\,\triangle v + \vec{\nabla}u\,\vec{\nabla}v$$

a

$$\vec{\nabla}(v\vec{\nabla}u) = v\,\triangle u + \vec{\nabla}v\,\vec{\nabla}u,$$

dostaneme

$$\vec{\nabla}(u\,\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) = u\,\triangle v - v\,\triangle u.$$

Integrovaním a aplikací Gaußovy věty odvodíme Greenovu větu:

$$\boxed{\int_V (u\,\triangle v - v\,\triangle u)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V}(u\,\vec{\nabla}v - v\,\vec{\nabla}u)\,\vec{n}\,\mathrm{d}S,} \tag{30}$$

kde V je trojrozměrný oblast a $\vec{n}$ je normálový vektor na okraj ∂V.

Podle okrajových podmínek má Greenova věta dvě standardní aplikace.

Dirichletův problém: Známe $\rho(\vec{x})$ uvnitř nějakého objemu V a potenciál ϕ na okraji ∂V. Dosadíme $u = \phi$ a $v = G$ do Greenovy věty.

$$\begin{aligned}\int_V \left[\phi(\vec{x}\,') \bigtriangleup_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}\,') - G(\vec{x}, \vec{x}\,') \bigtriangleup_{x'} \phi(\vec{x}\,')\right] \mathrm{d}^3x' = \\ = \int_{\partial V} \left[\phi(\vec{x}\,') \vec{\nabla}_{x'} G(\vec{x}, \vec{x}\,') - G(\vec{x}, \vec{x}\,') \vec{\nabla}_{x'} \phi(\vec{x}\,')\right] \vec{n} \, \mathrm{d}S'.\end{aligned}$$

Podle předpokladu je první člen na pravé straně znamý, druhý, který obsahuje gradient potenciálu, nikoliv. Tak využíme možnost volby Greenovy funkce a zkonstruujeme takovou, která se rovná nule na okraji ∂V. Greenově funkci s tou vlastností říkáme Dirichletovu Greenovu funkci, G_D. Potenciál ve V je pak dán vzorcem

$$\phi(\vec{x}) = -\int_V G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') \frac{\rho(\vec{x}\,')}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}^3x' + \int_{\partial V} \vec{\nabla} G_D(\vec{x}, \vec{x}\,') \, \phi(\vec{x}\,') \, \vec{n} \, \mathrm{d}S'. \tag{31}$$

Neumannův problém: Známe gradient potenciálu na ∂V. Vybereme Neumannovu Greenovu funkci G_N, jejíž gradient se rovná nule na okraji.

$$\phi(\vec{x}) = -\int_V G_N(\vec{x}, \vec{x}\,') \frac{\rho(\vec{x}\,')}{\epsilon_0} \, \mathrm{d}^3x' - \int_{\partial V} G_N(\vec{x}, \vec{x}\,') \, \vec{\nabla} \phi(\vec{x}\,') \, \vec{n} \, \mathrm{d}S'. \tag{32}$$

4 Multipólový rozklad pole

V následujícím budeme hledat rozvoj elektrického potenciálu ve velké vzdalenosti od zdroje.

4.1 Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích

Laplaceova rovnice

$$\bigtriangleup \phi = 0 \tag{33}$$

platí všude, kde se nenachází náboj. Ve sférických souřadnicích má Laplacián následující tvar:

$$\bigtriangleup \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}. \tag{34}$$

Separace proměnných: Pokoušíme se přeměnit parciální diferenciální rovnici v tří obyčejné diferenciální rovnice pro funkce jednotlivých proměnných, $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$ a $\Phi(\varphi)$. K tomu předpokládáme řešení ve tvaru součinu

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) \tag{35}$$

a dosadíme do Laplaceovy rovnice

$$\bigtriangleup \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} \cdot \Theta \cdot \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \cdot R \cdot \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta} \cdot \Phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} R \cdot \Theta \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0. \tag{36}$$

Násobíme $\frac{r^2 \sin^2\vartheta}{R\Theta\Phi}$ a píšeme část, závisející na φ, na pravou stranu

$$\frac{\sin^2\vartheta}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{\sin\vartheta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}.$$

Levá strana ted' závisí na r a ϑ, pravá strana na φ. Z toho vyplývá, že se obě strany musí rovnat konstantě, kterou nazveme m^2. Z pravé strany dostaneme obyčejnou diferenciálni rovnici,

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0. \tag{37}$$

Rovnici vyplyvající z levé strany můžeme upravit podobným způsobem,

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{1}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right)=\lambda^2,$$

kde se opět obě strany musí rovnat konstantě, označené λ^2. Z toho dostaneme dvě další obyčejné diferenciální rovnice,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda^2R=0 \tag{38}$$

a

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\right)+\left(\lambda^2-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta=0, \tag{39}$$

tak že místo parciální diferenciální rovnice máme rovnice (37), (38) a (39).
Řešení: Rovnice (37) má řešení

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+S_m\sin m\varphi \tag{40}$$

příslušné k parametru m, který musí být celočíselný, aby Φ bylo periodické ve φ. Radiální rovnice (38) má řešení

$$R_l(r)=A_l\,r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}, \tag{41}$$

kde $\lambda^2=l(l+1)$. V rovnici (39) píšeme $\cos\vartheta=x$. Řešení, které obsahuje obě separační konstanty m a l, označíme P_l^m. Takovou úpravou dostaneme Legendreovu rovnici

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_l^m(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x)=0. \tag{42}$$

4.2 Legendreovy polynomy

Ortogonální bází řešení pro $m=0$ jsou Legendreovy polynomy $P_l(x)$, vyhovující jednodušší rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)\,P_l(x)=0 \tag{43}$$

s nezáporným celočíselným parametrem l. (Pro neceločíselné l dostaneme nekonečnou řadu, která diverguje v $x = \pm 1$.) Legendreovy polynomy jsou ortogonální v intervalu $(-1, 1)$

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)\, P_l(x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall\, k \neq l. \tag{44}$$

Legendreovy polynomy se objevují jako koeficienty v rozvoji tzv. vytvařející funkce

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)\, t^l. \tag{45}$$

Použitím Leibnizova pravidla

$$\frac{\mathrm{d}^m[f(x)\, g(x)]}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} \frac{\mathrm{d}^{m-k} f(x)}{\mathrm{d}x^{m-k}} \frac{\mathrm{d}^k g(x)}{\mathrm{d}x^k} \tag{46}$$

dostaneme m-násobným derivováním rovnice (43)

$$(1-x^2) f''(x) - 2x(m+1) f'(x) + (l-m)(l+m+1) f(x) = 0, \tag{47}$$

kde $f(x) = \mathrm{d}^m P_l(x)/\mathrm{d}x^m$. Substituce $f(x) = (1-x^2)^{-m/2} g(x)$ vede k tomu, že funkce $g(x)$ musí splňovat rovnici (42), je tedy konečně

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}. \tag{48}$$

Legendreovy polynomy lze vyjádřit pomocí Rodriguesova vzorce

$$P_l(x) = \frac{1}{l!\, 2^l} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2-1)^l. \tag{49}$$

Využitím tothoto vztahu můžeme rozšířit (48) na oblast záporních m, tedy

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{l!\, 2^l} (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{m+l}}{\mathrm{d}x^{m+l}} (1-x^2)^l, \qquad -l \leq m \leq l. \tag{50}$$

Funkce P_l^m se nazývají přidružené Legendreovy funkce. Námi definované $P_l^m(x)$ nebo $P_l(x)$ nejsou na intervalu (-1,1) normované na jedničku. Ostatně různé drobné i větší odchylky v definicích speciálních funkcí jsou díky historickému vývoji bohužel zcela běžné.

4.3 Kulové funkce

Pomocí přidružených Legendreových funkcí definujeme úplný ortonormální soubor kulových funkcí (t.j. každou spojitou funkci úhlových proměnných ve sférických souřadnicích můžeme napsat pomocí (nekonečné) řady těchto funkcí)

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\vartheta)\, \exp(im\varphi). \tag{51}$$

Platí tedy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, Y_{l_1}^{m_1 *}(\vartheta,\varphi) \, Y_{l_2}^{m_2}(\vartheta,\varphi) = \delta_{l_1 l_2} \, \delta_{m_1 m_2} \tag{52}$$

(ortonormalita) a

$$f(\vartheta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} f_l^m \, Y_l^m(\vartheta,\varphi), \qquad f_l^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \, \sin\vartheta \, f(\vartheta,\varphi) \, Y_l^{m*}(\vartheta,\varphi). \tag{53}$$

(úplnost). Několik prvních kulových funkcí je

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \, e^{-i\varphi} \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta \qquad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta \, e^{i\varphi}$$

$$Y_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta \, e^{-2i\varphi} \qquad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\vartheta \, e^{2i\varphi} \tag{54}$$

$$Y_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-i\varphi} \qquad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\vartheta - 1) \qquad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{i\varphi}.$$

Velmi důležitým speciálním případem rozkladu (53) je vztah pro Legendreův polynom obecného úhlu γ mezi dvěma vektory $\vec{n} = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$ a $\vec{n}' = (\sin\alpha \cos\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha)$, tedy

$$\cos\gamma = \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos\vartheta \cos\alpha + \sin\vartheta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta),$$

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_l^{m*}(\alpha,\beta) \, Y_l^m(\vartheta,\varphi). \tag{55}$$

4.4 Multipólový rozklad rozložení náboje

Uvažujeme rozložení náboje uvnitř koule o poloměru R,

$$\rho(\vec{x}) = \begin{cases} \rho(r,\vartheta,\varphi) & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \tag{56}$$

Potenciál mimo koule je dán vzorcem (27)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{\sqrt{\vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\,|\vec{x}| \cdot |\vec{x}'| \cos\gamma}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{\sqrt{1 - 2 \frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \cos\gamma + \left(\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{57}$$

γ je úhel mezi $\vec{x}$ a $\vec{x}'$. V integrálu se objeví vytvářející funkce Legendreových polynomů, tak

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^l \tag{58}$$

(psali jsme $|\vec{x}| = r$ a $|\vec{x}\,'| = r'$). Použitím (55) dostaneme rozvoj

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x'\, \rho(\vec{x}\,') \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}}\, Y_l^{m*}(\vartheta', \varphi') Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{59}$$

Pomocí multipólových momentů

$$q_{lm} := \int \mathrm{d}^3x'\, \rho(\vec{x}\,')\, r'^l\, Y_l^{m*}(\vartheta', \varphi') \tag{60}$$

můžeme konečně psat potenciál jako superpozici kulových funkcí

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}}\, Y_l^m(\vartheta, \varphi). \tag{61}$$

V případě bodového náboje víme, že pole je dáno Coulombovým potenciálem. Je-li náboj q umístěn mimo počátek souřadnic, např. na ose z (v bodě $z = R$), je potenciál dán vztahem

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta) \left(\frac{r}{R}\right)^l, \qquad & r \leq R, \\ \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta) \left(\frac{R}{r}\right)^l, \qquad & r \geq R. \end{aligned} \tag{62}$$

Pro $r \gg R$ převažuje rotačně souměrná (vzhledem k počátku souřadnic, nikoli poloze náboje) složka $l = 0$. Umístíme-li však na ose z ještě náboj opačné velikosti do $z = -R$, vyruší se identické příspěvky členů s $l = 0$ a pro $r \gg R$ převažuje pak dipólová složka ($l = 1$)

$$\phi_{\mathrm{dip}} = \frac{2qR}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos\vartheta)}{r^2} = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\vartheta}{r^2}, \tag{63}$$

kde $D = 2qR$ označuje kartézský dipólový moment. Podobně, umístíme-li na ose z v $z = \pm R$ náboje q a v počátku náboj $-2q$, vyruší se identické příspěvky členů s $l = 0$ a $l = 1$ a pro $r \gg R$ převažuje pak kvadrupólová složka ($l = 2$)

$$\phi_{\mathrm{quad}} = -\frac{2qR^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - 3\cos^2\vartheta}{r^3}, \tag{64}$$

kde $Q = qR^2$ je kartézský kvadrupólový moment. Obecně jsou multipólové momenty závislé na umístění v souřadném systému, s výjimkou nejnížšího nenulového momentu. Mezi kartézskými momenty a q_{lm} platí vztah $q_{00} = \frac{q}{\sqrt{4\pi}}$, $q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, D$, $q_{11} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, D$, a. t. d.

5 Magnetostatika

5.1 Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou

Zavedli jsme vektorový potenciál

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}. \tag{65}$$

Integrální tvar infinitesimální rovnice (5), vyjádřený pomocí hustoty proudu, je

$$
\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\vec{\jmath}(\vec{x}\,')\times\frac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|^3} &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\vec{\jmath}(\vec{x}\,')\times\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\vec{\jmath}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} =: \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}).
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Vektorový potenciál není jednoznačný, protože můžeme přičíst gradient libovolné funkce, jehož rotace je identicky nulová. Taková transformace,

$$
\vec{A}(\vec{x}) \longrightarrow \vec{A}(\vec{x}) + \mathrm{grad}\,\Lambda(\vec{x})
$$

se nazývá kalibrační transformace. (Stejně je skalární potenciál jednoznačný jenom až na konstantu.) Coulombova kalibrace $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ vede k značnému zjednodušení: Dosazením do Maxwellovy rovnice dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x}) &= \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}(\vec{x}) - \triangle\vec{A}(\vec{x}) = -\triangle\vec{A}(\vec{x}) \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3x'\,\vec{\jmath}(\vec{x}\,')\,\triangle\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = \mu_0\vec{\jmath}(\vec{x}),
\end{aligned}
\tag{67}
$$

tedy vektorovou Poissonovu rovnici pro $\vec{A}$.

Následující tabulka ukazuje analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou.

Elektrostatika	Veličina, vztah	Magnetostatika
$\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}q\,\vec{E}$	definice pole	$\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$
$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}^3x$	hustota zřídel	$I\,\mathrm{d}\vec{l} = \vec{\jmath}\mathrm{d}^3x$
$\vec{F} = q\vec{E}$	síla na náboj	$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$
$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$	rovnice pole	$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}$, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$	potenciály	$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$
$\triangle\phi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$	rovnice potenciálu	$\triangle\vec{A} = -\mu_0\vec{\jmath}$
$\phi(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\mathrm{d}^3x'\,\dfrac{\rho(\vec{x}\,')}{\lvert\vec{x}-\vec{x}\,'\rvert}$	potenciál zřídel	$\vec{A}(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\,\dfrac{\vec{\jmath}(\vec{x}\,')}{\lvert\vec{x}-\vec{x}\,'\rvert}$
$\vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\mathrm{d}^3x'\,\rho(\vec{x}\,')\dfrac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{\lvert\vec{x}-\vec{x}\,'\rvert^3}$	pole	$\vec{B}(\vec{x}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{d}^3x'\vec{\jmath}(\vec{x}\,')\times\dfrac{\vec{x}-\vec{x}\,'}{\lvert\vec{x}-\vec{x}\,'\rvert^3}$

Magnetické pole analogické m k elektrickému Coulombovu poli je pole lineárního vodiče. Uvažujme nekonečně dlouhý, rovný drát ve směru osy z s elektrickým proudem I

$$
\vec{\jmath}(\vec{x}) = I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_3. \tag{68}
$$

Podle (66) je magnetické pole

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \, \vec{e}_3 \times \frac{\vec{x} - (0,0,z')}{|\vec{x} - (0,0,z')|^3}. \tag{69}$$

Zavedeme valcové souřadnice $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, z a uvedomíme si, že pole musí být konstantní ve směru z, tak že stačí počítat $\vec{B}$ v rovině (x, y). Výpočet vede k Biotovu-Savartovu zákonu

$$\vec{B}(\rho, \varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho}. \tag{70}$$

5.2 Magnetické pole kruhové smyčky.

Do vztahu pro vektorový potenciál (65) dosadíme hustotu proudu

$$\vec{\jmath}(\vec{x}\,') \, \mathrm{d}^3 x' = I \, \delta(\rho' - a) \, \delta(z') \, \vec{e}_{\varphi'} \, \rho' \, \mathrm{d}\rho' \, \mathrm{d}z' \, \mathrm{d}\varphi',$$

kde $\vec{e}_{\varphi'} = -\sin(\varphi' - \varphi) \, \vec{e}_\rho + \cos(\varphi' - \varphi)\vec{e}_\varphi$, a dostaneme

$$\vec{A}(\rho, z) = A_\varphi(\rho, z) \, \vec{e}_\varphi, \qquad A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \, \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}. \tag{71}$$

Integrál lze vyjádřit úplnými eliptickými integrály E a K,

$$A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right], \tag{72}$$

kde

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi} \, \mathrm{d}\xi. \tag{73}$$

Při výpočtu magnetického pole potřebujeme identity

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \qquad \frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}. \tag{74}$$

Potom máme pro složky indukce ($B_\varphi = 0$)

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right], \tag{75}$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a+\rho)^2 + z^2}} \left[K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a-\rho)^2 + z^2} E(k) \right]. \tag{76}$$

V aproximaci pro velké vzdalenosti od smyčky ($a \ll r := \sqrt{\rho^2 + z^2}$) máme

$$A_\varphi \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \, \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2 - 2a\rho\cos\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r} \int_0^\pi \frac{\cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - 2\,\frac{a\rho}{r^2}\cos\varphi}} \approx$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{r} \int_0^\pi (1 + \frac{a\rho}{r^2} \cos\varphi) \cos\varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{a^2 \rho}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{4} \frac{\sin\vartheta}{r^2},$$

kde $\rho = r\sin\vartheta$. Z toho vyplývají kartézské složky

$$A_x = -A_\varphi \sin\varphi = -\frac{\mu_0 I a^2}{4}\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{r^2}, \qquad A_z = A_\varphi \cos\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{4}\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{r^2}. \quad (77)$$

$\sin\vartheta\sin\varphi$ a $\sin\vartheta\cos\varphi$ jsou kombinacemi funkcí Y_1^1 a Y_1^{-1}, tak A_x a A_y představují složky dipólového potenciálu.

6 Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí

6.1 Polarizace, magnetizace

Když se materiálové prostředí nachází pod vlivem vnějšího elektromagnetického pole, např. mezi deskami kondensátoru nebo v magnetickém poli cívky, rozlišujeme vnější náboje a proudy, ρ_{ext} a $\vec{\jmath}_{\text{ext}}$, a náboje ρ a proudy $\vec{\jmath}$ indukované vnějším polem v materiálu. Náboje a proudy uvnitř atomů, molekul, nebo elementárních buňek krystalů, které vyvolávají mnohem větší pole než jsou makroskopická, můžeme zanedbat, když středujeme přes prostorové oblasti podstatně větší než vzdalenost elementárních jednotek materiálu. Středované Maxwellovy rovnice jsou

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\langle\rho\rangle + \rho_{\text{ext}}}{\epsilon_0} \qquad && \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ &\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{B} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \langle\vec{\jmath}\rangle + \vec{\jmath}_{\text{ext}} \qquad && \mathrm{div}\vec{B} = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

$\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou středovaná pole, $\langle\rangle$ označuje středování zdrojů.

Celkový náboj vázaný na prostředí, které je plně uzavřeno uvnitř oblasti V, je roven nule

$$\int_V \langle\rho\rangle\,\mathrm{d}V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle\rho\rangle = -\mathrm{div}\vec{P}, \quad (79)$$

přičemž $\vec{P} = 0$ vně materiálu. Potom je totiž

$$\int_V \langle\rho\rangle\,\mathrm{d}V = -\int_V \mathrm{div}\vec{P}\,\mathrm{d}V = -\int_S \vec{P}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0,$$

kde $S = \partial V$. Uvažujme dipólový moment

$$\int_V \vec{x}\langle\rho\rangle\,\mathrm{d}V = -\int_V \vec{x}\,\mathrm{div}\vec{P}\,\mathrm{d}V = -\int_S \vec{x}\left(\vec{n}\cdot\vec{P}\right)\,\mathrm{d}S + \int_V \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{x}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{P}\,\mathrm{d}V. \quad (80)$$

Uvažujme nyní uzavřenou plochu S uvnitř materiálu. Celkový proud touto plochou vázaný na prostředí je dán celkovou hodnotou časové změny průmětu vektoru polarizace $\vec{P}$

$$\int_S \langle\vec{\jmath}\rangle\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\int_V \frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{P}\,\mathrm{d}V = \int_S \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow \langle\vec{\jmath}\rangle = \mathrm{rot}\,\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}, \quad (81)$$

přičemž $\vec{M} = 0$ vně materiálu.

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{M} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = 0 \quad \text{protože} \quad \partial S = \emptyset.$$

V statickém případě je $\partial \vec{P}/\partial t = 0$. Uvažujme magnetický moment

$$\frac{1}{2} \int_V \vec{x} \times \langle \vec{\jmath} \rangle \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \vec{x} \times \operatorname{rot} \vec{M} \, \mathrm{d}V = \tag{82}$$

$$\frac{1}{2} \int_S \vec{x} \times \left(\vec{n} \times \vec{M} \right) \mathrm{d}S - \frac{1}{2} \int_V \left(\vec{M} \times \vec{\nabla} \right) \times \vec{x} \, \mathrm{d}V = \int_V \vec{M} \, \mathrm{d}V.$$

Definice vektorů polarizace $\vec{P}$ a magnetizace $\vec{M}$ pomocí momentů je důležitá pro jednoznačnost, jinak by vyhovovaly také $\vec{P} + \operatorname{rot} \vec{f}$ a $\vec{M} + \operatorname{grad} f$. Definice jsou konzistentní s diferenciální (= mikroskopickou) rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \vec{\jmath} \rangle = 0, \tag{83}$$

která vychází z kombinaci rovnic (79) a (81).

6.2 Makroskopické Maxwellovy rovnice

Zavedeme vektory indukce elektrického pole a intenzity magnetického pole jako

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \tag{84}$$

Použitím polarizace (79) a magnetizace (81) dostaneme makroskopické Maxwellovy rovnice,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{\text{ext}}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{\jmath}_{\text{ext}}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0. \end{aligned} \tag{85}$$

Jak Maxwellovy rovnice ve všeobecné formě, tyto rovnice jsou konsistentní s rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho_{\text{ext}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\jmath}_{\text{ext}} = 0. \tag{86}$$

V homogenním isotropním lineárním prostředí bez disperse jsou vztahy mezi $\vec{D}$ a $\vec{E}$ a mezi $\vec{H}$ a $\vec{B}$ obzvlašt jednoduché, pole jsou úměrná,

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B}, \tag{87}$$

kde ϵ_r je dielektrická konstanta a konstanta μ_r je magnetická permeabilita materiálu. („Lineární prostředí“ znamená, že tyto veličiny jsou nezávisly na $\vec{E}$ a $\vec{B}$.)

6.3 Energie a impuls elektromagnetického pole

Mějme spojité rozložení náboje ρ. ε označuje energii náboje obsaženého v objemu ΔV, $\Delta\varepsilon$ změna energie při pohybu v elektromagnetickém poli. ρ a $\vec{\jmath}$ označují teď externí veličiny.

$$\Delta\varepsilon = \vec{F}\cdot\Delta\vec{x}, \qquad \vec{F} = \rho\vec{E}\,\Delta V + \vec{\jmath}\times\vec{B}\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \vec{\jmath}\cdot\vec{E}. \tag{88}$$

S využitím vztahu

$$\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) - \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}\times\vec{E}\right) \tag{89}$$

odvodíme z Maxwellových rovnic výraz

$$\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{E} - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right). \tag{90}$$

Na pravé straně vystupuje vykonaná práce a divergence toku, výraz na levé straně můžeme tedy interpretovat jako časovou změnu hustoty energie. Po zavedení veličin hustoty energie W a Poyntingova vektoru $\vec{S}$

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right), \qquad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \tag{91}$$

můžeme (90) psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W\,\mathrm{d}V + \int_V \vec{\jmath}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial V}\vec{S}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 0. \tag{92}$$

$\vec{S}$ má tedy význam hustoty toku energie. Obdobnou úvahu můžeme provést pro impuls. Při přechodu ke spojitému rozložení náboje je

$$\triangle\vec{p} = \vec{F}\triangle t, \qquad \vec{F} = \rho\vec{E}\,\triangle V + \vec{\jmath}\times\vec{B}\,\triangle V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\triangle V}\frac{\triangle\vec{p}}{\triangle t} = \rho\vec{E} + \vec{\jmath}\times\vec{B}. \tag{93}$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme výraz

$$\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} = \vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) + \vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{\jmath}\times\vec{B} - \rho\vec{E}. \tag{94}$$

Poslední dva členy na pravé straně popisují Lorentzovu sílu, můžeme tedy časovou derivaci na levé straně interpretovat jako časovou změnu hustoty impulsu

$$\vec{G} = \vec{D}\times\vec{B} = \epsilon_r\mu_r\epsilon_0\mu_0\,\vec{E}\times\vec{H} = \frac{n^2}{c^2}\,\vec{S}, \tag{95}$$

pokud první čtyři členy na pravé straně lze psát jako divergence toku impulsu. Zavedli jsme

$$c^2 := \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}, \qquad n^2 := \epsilon_r\,\mu_r. \tag{96}$$

c je rychlost šíření elektromagnetických vln ve vakuu (viz. podkapitola 8.2), tedy rychlost světla, jak budeme brzo vidět, a n je index lomu, jehož význam bude také zřejmý v souvislosti s šíření elektromagnetických vln. Po úpravě, kdy předpokládáme, že permitivita a permeabilita nezávisí na prostorových souřadnicích, můžeme psát

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)-\vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i\,D_j-\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\vec{E}\cdot\vec{D}\right),\\ \left[\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(H_i\,B_j-\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\vec{H}\cdot\vec{B}\right)\end{aligned} \tag{97}$$

a zákon zachování má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V G_i\,\mathrm{d}V+\int_V\left[\rho E_i+\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)_i\right]\,\mathrm{d}V+\int_{\partial V}\sum_{j=1}^{3}T_{ij}\,n^j\,\mathrm{d}\Sigma=0. \tag{98}$$

Definovali jsme Maxwellův tensor nápětí T_{ij} jako

$$T_{ij}=-(E_i\,D_j+H_i\,B_j)+\frac{1}{2}\,\delta_{ij}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}). \tag{99}$$

Takto definovaný Maxwellův tensor určuje tok impulsu z uvažovaného objemu. Jeho stopa je rovna hustotě energie

$$W-\sum_{i=1}^{3}T_{ii}=0. \tag{100}$$

Pro volné elektromagnetické pole ve vakuu platí analogicky

$$W=\frac{1}{2}\left(\epsilon_0\vec{E}^{\,2}+\frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^{\,2}\right),\qquad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B}, \tag{101}$$

$$\vec{G}=\varepsilon_0\,\vec{E}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\,\vec{S} \tag{102}$$

a

$$T_{ij}=-\left(\epsilon_0 E_iE_j+\frac{1}{\mu_0}\,B_iB_j\right)+\frac{1}{2}\,\delta_{ij}\left(\epsilon_0\vec{E}^{\,2}+\frac{1}{\mu_0}\,\vec{B}^{\,2}\right). \tag{103}$$

7 Integrální formy Maxwellových rovnic, indukce

7.1 Integrované rovnice

Uvažujeme prostorovou oblast V s okrajem ∂V a plochu S s okrajem ∂S. $\vec{n}$ označuje jednotkový normálový vektor na plochu ∂V, popř. S, $\vec{t}$ tečný vektor na ∂S. Integrujeme rovnici $\mathrm{div}\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$ přes objem V, dostaneme podle Gaußovy věty Gaußův zákon elektrostatiky.

$$\boxed{\int_{\partial V}\vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\frac{Q}{\epsilon_0}.} \tag{104}$$

Když integrujeme rotaci elektrického pole přes plochu S, můžeme uplatňovat Stokesovu větu ($\vec{t}$ je tečny vektor okraje ∂S):

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}s = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{E} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S. \tag{105}$$

Integral $\int \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S$ definuje magnetický tok Φ_m plochou S. Odvodili jsme tedy Faradayův indukční zákon: Elektrické nápětí v uzavřené drátěné smyčce se rovná minus časové derivaci magnetického toku,

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}s = -\frac{\partial}{\partial t}\, \Phi_m.} \tag{106}$$

Analogicky dostaneme v statickém případě $\dot{\vec{E}} = 0$

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}s = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \vec{\jmath} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S. \tag{107}$$

Integral na pravé straně představuje celkový elektrický proud I, z toho vyplývá Ampèreův zákon

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{t}\, \mathrm{d}s = \mu_0\, I.} \tag{108}$$

7.2 Aplikace – vzájemná indukce a vlastní indukce

Uvažujeme dvě geometricky pevné smyčky s proměnným proudem ve smyčce 2. Indukované nápětí ve smyčce 1 vyvolané změnou pole buzeného smyčkou 2 je

$$U_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1\, \mathrm{d}S_1, \qquad \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1\, \mathrm{d}S_1 = \oint_{(1)} \vec{A}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_1, \qquad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_2}{r_{12}}. \tag{109}$$

Po dosazení dostáváme

$$U_1 = M_{12}\, \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \qquad M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \tag{110}$$

Pokud by tekl proměnný proud smyčkou 1, bylo by indukované nápětí ve smyčce 2

$$U_2 = M_{21} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \qquad M_{12} = M_{21} = M. \tag{111}$$

Ale také změna magnetického toku smyčkou 1 vytvoří indukované nápětí v této smyčce, stejně platí pro smyčku 2. Obecně tedy můžeme psát

$$U_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \qquad U_2 = M \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}. \tag{112}$$

Časová změna energie magnetického pole je rovna záporně vzaté práci

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -U_1\, I_1 - U_2\, I_2 = L_1\, I_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_2\, I_2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M \left(I_1 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + I_2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \right), \tag{113}$$

takže pro energii magnetického pole je

$$W = \frac{1}{2}\,L_1\,I_1^2 + \frac{1}{2}\,L_2\,I_2^2 - M\,I_1\,I_2, \qquad L_1\,L_2 \geq M^2. \tag{114}$$

Energii magnetického pole máme ovšem také vyjádřenou jako

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{B}^{\,2}\mathrm{d}V. \tag{115}$$

Vztahu pro energii využijeme pro výpočet vlastní indukčnosti

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2}\int_V B^2\,\mathrm{d}V. \tag{116}$$

Uvažujme solenoidální cívku o N závitech. Průřez je S a délka ℓ. Pole je tedy přibližně (Ampèreův zákon)

$$B \approx \frac{\mu_0 N I}{\ell} \tag{117}$$

a pro indukčnosti máme

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}. \tag{118}$$

Pro energii magnetického pole pak

$$W = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\ell}\,I^2. \tag{119}$$

8 Časově proměnná elektromagnetická pole

8.1 Dynamické potenciály, kalibrace

Předpokládáme dynamické potenciály $\phi(\vec{x},t)$ a $\vec{A}(\vec{x},t)$ a $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$. Pak vyplývá z Maxwellovy rovnice $\mathrm{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, že i časová derivace vektorového potenciálu přispívá k elektrickému poli

$$\vec{B} = \mathrm{rot}A, \qquad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}. \tag{120}$$

Dosazení do dalších Maxwellových rovnic vede k

$$\begin{aligned} \triangle\phi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \triangle\vec{A} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0\vec{\jmath}. \end{aligned} \tag{121}$$

S využitím kalibrační transformace

$$\vec{A} \to \vec{A} + \mathrm{grad}\,\psi, \qquad \phi \to \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{122}$$

můžeme mít Lorenzovu kalibraci (Ludwig Valentin Lorenz $\neq$ Hendrik Antoon Lorentz)

$$\mathrm{div}\vec{A} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{123}$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní rovnice

$$\boxed{\triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \triangle\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{\jmath}.} \tag{124}$$

Označili jsme rychlost světla ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Rovnice (124) jsou Maxwellovy rovnice pro potenciály, spolu s kalibrací (123) jsou ekvivalentní (7).

8.2 Rovinná a kulová vlna

V případě volného elektromagnetického pole popisují homogenní rovnice odpovídající (124) šíření vln. Vlnová rovnice v jednorozměrném případě popisuje rovinnou vlnu (ve směru x)

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{125}$$

Obecné řešení je

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right). \tag{126}$$

Vezmeme jako príklad Gaußovu funkci $f = \exp[-(t - \frac{x}{c})^2]$. Maximum se nachází při $t - \frac{x}{c} = 0$, pohybuje se tedy rychlostí c ve směru rostoucího x.

Dalším jednorozměrném příkladem je sféricky symetrická vlnová rovnice,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\psi(r,t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{127}$$

s obecným řešením

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c}\right). \tag{128}$$

Na toto řešení se můžeme divat jako na rozbíhavou nebo sbíhavou kulovou vlnu. Tvar řešení také ukazuje, že rychlost šíření je c.

V (lineárním) materiálovém prostředí se nahrazuje $\epsilon_0 \to \epsilon_r\epsilon_0$ a $\mu_0 \to \mu_r\mu_0$. Pak dostaneme z rovnice (124) rychlost šíření c/n, když zavedeme index lomu

$$n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}.$$

8.3 Obecné řešení nehomogenní rovnice pro potenciály.

Pro obecné řešení rovnice (124) ještě chybí partikulární řešení nehomogenní rovnice. Zavedeme Fourierovu transformaci časové závislosti potenciálu a hustoty náboje

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \tilde{\phi}(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t}, \tag{129}$$

$$\rho(\vec{x},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \tilde{\rho}(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t} \tag{130}$$

a dosadíme do rovnice (124),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\phi}(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \tilde{\rho}(\vec{x},\omega)\, e^{-i\omega t}. \tag{131}$$

Exponenciální funkce s různými ω jsou nezávislé, proto platí

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\phi}(\vec{x},\omega) = -\frac{\tilde{\rho}(\vec{x},\omega)}{\epsilon_0}. \tag{132}$$

Hledáme Greenovu funkci diferenciálního operatoru na levé straně, definovanou vztahem

$$(\triangle + k^2)\, G(\vec{x},\vec{x}\,',k) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'), \qquad k = \frac{\omega}{c}. \tag{133}$$

Řešení této rovnice závisí jen na absolutní hodnotu $r = |\vec{x}-\vec{x}\,'|$:

$$G(\vec{x},\vec{x}\,',k) = G(r,k) = -\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}. \tag{134}$$

Důkaz:
1)

$$(\triangle + k^2)\frac{e^{\pm ikr}}{r} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + k^2\right)\frac{e^{\pm ikr}}{r} = 0 \tag{135}$$

platí pro $r \neq 0$.
2) Násobíme levou stranu testovací funkcí $f(\vec{x})$ a integrujeme přes celý prostor. Díky (135) stačí integral přes infinitesimální kouli o poloměru ϵ kolem počátku,

$$\int \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x})\,(\triangle + k^2)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r} = \int_{r\leq\epsilon} \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x})\,(\triangle + k^2)\,\frac{e^{\pm ikr}}{r}. \tag{136}$$

Rozvíjeme exponenciální funkci a využijeme $\triangle\, 1/r = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,')$

$$\int_{r\leq\epsilon} \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x})\,(\triangle + k^2)\left(\frac{1}{r} \pm ik - \frac{1}{2}k^2 r \pm \ldots\right) = \int_{r\leq\epsilon} \mathrm{d}^3x\, f(\vec{x})\left(\triangle\frac{1}{r} + k^2\frac{1}{r} \pm \ldots\right)$$

$$= -4\pi f(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{137}$$

V limitě $\epsilon \to 0$ tak získáme

$$(\triangle + k^2)\,\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}\,'). \tag{138}$$

Rovnici (138) můžeme také dokazat přímo: Rozkládáme e^{ikr}/r ve tvaru

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!}\, r^{n-1}$$

a použíjeme

$$\triangle r^{n-1} = n(n-1)\, r^{n-3}.$$

Pak uvidíme, že se všechno kromě $\triangle \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}\,')$ ruší.

Řešením rovnice (132) je tedy

$$\tilde{\phi}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x'\, \tilde{\rho}(\vec{x}\,', \omega)\, \frac{e^{\pm i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}. \tag{139}$$

Zpětná Fourierova transformace pro kladné znaménko vede k

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{\tilde{\rho}(\vec{x}\,', \omega)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}\, e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\right)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\rho(\vec{x}\,', t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}, \tag{140}$$

kde retardovaný čas byl definovan jako

$$t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}{c}. \tag{141}$$

Z rovnice (138) lze přímo vypočítat Greenovu funkci v prostoru a čase:

$$G(\vec{x} - \vec{x}\,', t - t') = -\frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\right)}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}\,'|} = -\frac{\delta(t' - t_{\mathrm{ret}})}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}\,'|}. \tag{142}$$

Potenciál časově závislého rozložení náboje vypapdá formálně jako statický potenciál, s rozdílem, že časový argument závisí na vzdalenost $|\vec{x} - \vec{x}\,'|$, t. j. potenciál a elektrické pole se šíří konečnou rychlostí. Takto získaný potenciál se nazývá retardovaný potenciál, analogicky to platí pro vektorový potenciál.

$$\phi_{\mathrm{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\rho\left(\vec{x}\,', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}, \tag{143}$$

$$\vec{A}_{\mathrm{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x'\, \frac{\vec{j}\left(\vec{x}\,', t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}{c}\right)}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|}. \tag{144}$$

8.4 Pole časově proměnného dipólu

Uvažujme bodové náboje, soustředené všechny kolem počátku souřadnic. Pak můžeme pro vektorový potenciál psát

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}\left(\vec{x}\,', t - \frac{r}{c}\right) \mathrm{d}^3x' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{\alpha} e_\alpha\, \vec{v}_\alpha \left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{145}$$

neboli pomocí dipólového momentu

$$\vec{A}(\vec{x},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right), \qquad \vec{p}(t) = \sum_\alpha e_\alpha\,\vec{x}_\alpha(t). \tag{146}$$

Skalární potenciál spočteme integrací vztahu (Lorenzova kalibrace)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \mathrm{div}\vec{A}. \tag{147}$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{x}\cdot\left[\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\,\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right], \\ \mathrm{rot}\,\vec{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\,\vec{x}\times\left[\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\,\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]. \end{aligned} \tag{148}$$

Skalární potenciál je tedy

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{x}}{r^3}\cdot\left[\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]. \tag{149}$$

Pro intenzity dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left\{\frac{3}{r^2}\left[\vec{\tilde{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\vec{x}\right]\vec{x}-\vec{\tilde{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{c^2}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{x}\right]\times\vec{x}\right\}, \\ \vec{B}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\dot{\vec{\tilde{p}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{x}, \qquad \vec{\tilde{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\,\dot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right). \end{aligned} \tag{150}$$

Dostatečně daleko od dipólu máme

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\,\vec{D}\left(\vec{x},t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{n}, \qquad \vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\,\vec{D}\left(\vec{x},t-\frac{r}{c}\right), \tag{151}$$

kde jsme označili

$$\vec{D}\left(\vec{x},t-\frac{r}{c}\right) = \ddot{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{n}, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{r}. \tag{152}$$

Pro hustotu energie a Poyntingův vektor platí

$$W = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) = \frac{1}{16\pi^2 c^4\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,D^2, \qquad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{16\pi^2 c^3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,D^2\vec{n}. \tag{153}$$

Je přirozeně

$$\frac{\vec{S}}{W} = c\,\vec{n}. \tag{154}$$

Příklad: Vezměme rozložení proudu ve tvaru

$$\vec{j}(\vec{x},t) = I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)\,\vec{e}_z, \qquad 0 \le z \le L. \tag{155}$$

Podle (145) a (146) spočteme snadno

$$\vec{p}(t) = \frac{2LI}{\pi\omega} \sin(\omega t)\,\vec{e}_z \tag{156}$$

a podle (152)

$$\vec{D}\left(\vec{x}, t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{2LI\omega}{\pi} \sin\vartheta\, \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\vec{e}_\varphi. \tag{157}$$

Příklad: Rotující náboj v rovině (x, y) v dipólové aproximaci:

$$\vec{p} = qr_0(\cos\omega t, \sin\omega t, 0), \tag{158}$$

$$\vec{D} = -\frac{qr_0\omega^2}{r}(z\sin\omega t, -z\cos\omega t, y\cos\omega t - x\sin\omega t). \tag{159}$$

Časově středovaný Poyntingův vektor popisuje výkon záření do elementu prostorového úhlu,

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{q^2 r_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \frac{(x, y, z)}{r}. \tag{160}$$

Celková vyzařovaná energie za sekundu je pak

$$P = \int \langle\vec{S}\rangle \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{q^2 r_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \tag{161}$$

kde a označuje zrychlení $r_0\omega^2$ na kruhové dráze. Tato ztráta energie by vedla k rychlému kolapsu atomů v klasické elektrodynamice.

8.5 Liénardův - Wiechertův potenciál

Ať se nabitá částice pohybuje po zadané trajektorii $\vec{x} = \vec{x}_0(t)$. Hustota náboje je pak

$$\rho(\vec{x}, t) = e\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0(t)). \tag{162}$$

Vzorec pro skalární potenciál přepíšeme jako

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}\,', t')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0(t')|}{c}\right) \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3x' = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) \mathrm{d}t', \end{aligned} \tag{163}$$

kde jsme označili $\vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{x}_0(t')$, $R(t') = |\vec{R}(t')|$. S pomocí vztahu

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \frac{\vec{R}(t_r)\cdot\vec{v}(t_r)}{c\,R(t_r)}}, \qquad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}, \tag{164}$$

napíšeme výraz pro skalární potenciál jako

$$\boxed{\phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r)\cdot\vec{v}(t_r)}{c}}.} \tag{165}$$

Výraz pro vektorový potenciál je pak obdobně

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{v}(t_r)}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r)\cdot\vec{v}(t_r)}{c}}.} \tag{166}$$

Vezměme ted' jednoduchý případ pohybu s konstantní rychlostí podél osy x. Podmínku pro nalezení časového zpoždění přepíšeme na

$$c^2(t-t_r)^2 = (x - vt_r)^2 + y^2 + z^2, \tag{167}$$

odkud

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_r = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\left[(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{168}$$

Jmenovatel výrazů (165) a (166) pro potenciály můžeme psát jako

$$c(t-t_r) - \frac{v(x-vt_r)}{c} = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_r\right]. \tag{169}$$

Dosadíme $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t_r$ z rovnice (168), dostáváme

$$\begin{aligned} c(t-t_r) - \frac{v(x-vt_r)}{c} &= \left[(x-vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}} =: \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, r^* \end{aligned} \tag{170}$$

Z toho vyplývá

$$\phi(\vec{x},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{r^*} \tag{171}$$

pro skalární potenciál a

$$\vec{A}(\vec{x},t) = (A_x(\vec{x},t), 0, 0), \qquad A_x(\vec{x},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{v}{r^*} \tag{172}$$

pro vektorový potenciál.Ekvipotenciální plochy jsou dané rovností $r^* = \text{konst.}$ Vektor intenzity elektrického pole je

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{r^{*3}}\,(x-vt, y, z) \tag{173}$$

a vektor indukce magnetického pole je

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{e\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{v}{r^{*3}}\,(0, -z, y). \tag{174}$$

Pro vektor hustoty impulsu pole $\vec{G} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ dostáváme

$$\vec{G}(\vec{x}, t) = \frac{e^2 \mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v}{r^{*6}} \Big(y^2 + z^2, -y(x - vt), -z(x - vt) \Big) \tag{175}$$

a pro hustotu energie $W = \left(\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0\right)/2$ výraz

$$W(\vec{x}, t) = \frac{e^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{(x - vt)^2 + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}{r^{*6}}. \tag{176}$$

9 Základy teorie relativity

9.1 Principy

Princip relativity: všechny přírodní zákony jsou stejné ve všech inerciálních souřadných soustavách. Inerciální soustavy jsou takové, kde se pohyb děje s konstantní rychlostí.

Interakce částic se v nerelativistcké mechanice popisuje pomocí interakční potenciální energie, která je funkcí polohy interagujících částic. Tento způsob popisu v sobě obsahuje předpoklad o okamžitém působení.

Princip konečné rychlosti šíření signalu: Rychlost šíření interakce je konečná. Z principu relativity je tato rychlost ve všech inerciálních soustavách stejná. Z Maxwellových rovnic je vidět, že jde o rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{ms}^{-1}. \tag{177}$$

Toto je exaktní hodnota, určující tak délkovou jednotku jednotkou času.

Sjednocení principu relativity s principem konečné rychlosti šíření signalu je nazýváno **Einsteinovým principem relativity.**

9.2 Interval, vlastní čas.

Uvažujme dvě události: emisi a absorpci fotonu. V soustavě K je

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0, \tag{178}$$

v soustavě K' pak

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0. \tag{179}$$

Zavedeme obecně kvadrat intervalu mezi dvěma událostmi jako

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2, \tag{180}$$

popřípadě pro infinitesimálně blízké události

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2.} \tag{181}$$

Je-li interval roven nule v nějaké inerciální souřadné soustavě K, je roven nule i v libovolné jiné soustavě K'. Potom tedy musí být

$$\mathrm{d}s^2 = k(v)\,\mathrm{d}s'^2. \tag{182}$$

Vzhledem k homogenitě prostoru a času nemůže faktor úměrnosti záviset na souřadnicích, vzhledem k isotropii prostoru může pak tento faktor záviset pouze na velikosti relativní rychlosti uvažovaných inerciálních soustav. Uvažujeme-li tři soustavy K, K_1 a K_2, dostáváme

$$\mathrm{d}s^2 = k(v_1)\,\mathrm{d}s_1^2, \qquad \mathrm{d}s^2 = k(v_2)\,\mathrm{d}s_2^2, \qquad \mathrm{d}s_1^2 = k(v_{12})\,\mathrm{d}s_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k(v_2)}{k(v_1)} = k(v_{12}), \tag{183}$$

a protože levá strana poslední rovnice nezávisí na úhlu mezi vektory rychlostí $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, zatímco pravá strana může, musí být

$$k(v) = 1. \tag{184}$$

Kvadrát intervalu mezi dvěma událostmi (180) nebo mezi dvěma infinitesimálně blízkými událostmi (181) je stejný ve všech inerciálních soustavách.

V předešlých uvahách se připojuje čas přírozeným způsobem k prostoru, proto je výhodně definovat čtyřrozměrný **prostoročas** či **Minkowskiho prostor**, v němž se počítá kvadrat prostorového intervalu záporně a kvadrat časového intervalu kladně (nebo opačně). Oznamení **událost** má význam bodu v čtyřrozměrném prostoručase.

Označme si v soustavě K

$$t_{12} = t_2 - t_1, \qquad \ell_{12}^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \quad \Rightarrow \quad s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - \ell_{12}^2. \tag{185}$$

Zkoumejme, existuje-li taková soustava K', kde by se obě události odehraly v jednom bodě prostoru, tedy že platí $\ell'_{12} = 0$. Máme tak podmínku $s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} > 0$,; takový interval se nazývá **časupodobný**. Naopak požadavek na to, aby existovala soustava, ve které obě události nastanou současně ($t'_{12} = 0$), vede k podmínce $s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = -\ell'^2_{12} < 0$,; interval se pak nazývá **prostorupodobný**. V soustavě, která se pohybuje s daným hmotným bodem ($\ell'_{12} = 0$), můžeme tedy definovat **vlastní čas** jako

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{c}\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t. \tag{186}$$

V případě konstantní rychlosti v dostaneme jednoduchý vztah mezi parametrem s trajektorie tělesa a časovou souřadnicí t,

$$s_2 - s_1 = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1). \tag{187}$$

9.3 Lorentzova transformace

Soustava K se pohybuje vůči inerciální soustavě K' rychlostí v podél osy x. Z elementárních úvah je zřejmé, že čtverec intervalu $s^2 = c^2t^2 - x^2$ se nezmění při transformaci

$$ct = x'\sinh\psi + ct'\cosh\psi, \qquad x = x'\cosh\psi + ct'\sinh\psi, \tag{188}$$

podobně jako se nezmění čtverec vzdalenosti $l^2 = x^2 + y^2$ při transformaci

$$x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi, \qquad y = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \tag{189}$$

Pro počátek soustavy K' (bod $x' = 0$) máme v soustavě K z definice $x/t = v$, jednak z (188) $x/t = c \tanh\psi$, máme tedy $\tanh\psi = v/c$ a vztah (188) můžeme zapsat jako **Lorentzovu transformaci**

$$\boxed{ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}\,x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'.} \tag{190}$$

Vždy jsou uváděny dva klasické příklady na použití vztahu (190).

(a) V soustavě K je podél osy x v klidu měřítko, jehož dvě rysky mají v této soustavě souřadnice x_1, x_2. Vzdalenost (klidová) rysek je tedy $\Delta x_0 = x_2 - x_1$. Vzdalenost v soustavě K' (souřadnice jsou určovány ve stejném čase $t'_1 = t'_2$) je $\Delta x = x'_2 - x'_1 = \Delta x_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Mluvíme o **kontrakci délky**.

(b) V soustavě K' se v časech t'_1 a t'_2 odehrají dvě události v jediném místě $x'_1 = x'_2$, $y'_1 = y'_2$, $z'_1 = z'_2$ (interval mezi událostmi je tedy $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$). V soustavě K je interval mezi těmito událostmi $\Delta t = t_2 - t_1 = \Delta t_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Mluvíme pak o **dilataci času**.

Vztah (190) můžeme zapsat i v diferenciálním tvaru

$$c\,\mathrm{d}t = \frac{c\,\mathrm{d}t' + \frac{v}{c}\,\mathrm{d}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + v\,\mathrm{d}t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y', \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z'. \tag{191}$$

Pro transformaci složek vektoru rychlosti ($\vec{w} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$, $\vec{w}\,' = \mathrm{d}\vec{x}\,'/\mathrm{d}t'$) dostaneme z (191) vztah

$$w_x = \frac{w'_x + v}{1 + \frac{w'_x v}{c^2}}, \qquad w_y = \frac{w'_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{w'_x v}{c^2}}, \qquad w_z = \frac{w'_z \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{w'_x v}{c^2}}. \tag{192}$$

Sledujeme-li šíření světelného paprsku v rovině ($w_x = c\cos\vartheta$, $w_y = c\sin\vartheta$, $w_z = 0$ resp. $w'_x = c\cos\vartheta'$, $w'_y = c\sin\vartheta'$, $w'_z = 0$), dostaneme vztah (aberace světla)

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}\cos\vartheta'}\,\sin\vartheta'. \tag{193}$$

Pro $v/c \ll 1$ položíme $\vartheta = \vartheta' - \Delta\vartheta$ a porovnáním nejnižšího členu Taylorova rozvoje dostaneme obvykle uváděný vztah

$$\Delta\vartheta = \frac{v}{c}\,\sin\vartheta'. \tag{194}$$

9.4 Čtyřvektory, čtyřtenzory

Nejprve definujeme podstatné tenzory. Metrický tenzor v Minkowskiho prostoru a jednotkový tenzor jsou

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{195}$$

g_{ik} se nazývá kovariantní metrika, inverzní metrika g^{ik} se nazývá kontravariantní. Kontravariantní a kovariantní úplně antisymetrický tenzor 4. řádu jsou definovány pomocí vztahů

$$\epsilon^{iklm} \quad (\epsilon^{0123} = 1), \qquad \epsilon_{iklm} \quad (\epsilon_{0123} = -1). \tag{196}$$

Čtyřvektor souřadnic události (kontravariantní a kovariantní) zapisujeme jako

$$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}), \qquad x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{x}). \tag{197}$$

Metrika nám udává invariantní prostoročasovou „délku“ vektoru x^i

$$s^2 = g_{ik}\, x^i\, x^k = g^{ik}\, x_i\, x_k = x^i\, x_i = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \tag{198}$$

Přitom platí

$$x_i = g_{ik}\, x^k, \qquad x^i = g^{ik}\, x_k \tag{199}$$

(zvednutí a spustění indexů = transformace mezi kontravariantními a kovariantními indexy).

V čtyřrozměrném zápisu můžeme Lorentzovu transformaci (ve směru x) (190) psát ve tvaru

$$x^i = \Lambda^i{}_k\, x'^k \tag{200}$$

s Lorentzovou maticí

$$\Lambda^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{201}$$

kde γ je běžné zkrácení

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{202}$$

9.5 Čtyřrychlost a čtyřzrychlení

Definujeme čtyřvektor rychlosti přirozeným způsobem jako derivaci čtyřvektoru událostí, ze kterých se skládá **světočára** (čtyřrozměrná trajektorie) tělesa, podle parametru s (= c krát vlastní čas)

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right), \qquad u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \qquad u^i\, u_i = 1. \tag{203}$$

u^i je tedy tečným vektorem světočáry. Obdobně čtyřvektor zrychlení

$$a^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2}, \qquad u^i\, a_i = 0. \tag{204}$$

Podivejme se na relativistický popis pohybu s konstantním zrychlením. V souřadné soustavě, kde rychlost částice je momentálně nulová ($v = 0$), máme

$$u^i_K = (1, 0, 0, 0), \qquad a^i_K = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right), \tag{205}$$

kde a je obyčejné zrychlení. V souřadné soustavě pohybující se rychlostí v ve směru x je rychlost a zrychlení

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right), \qquad a^i = \left(\frac{\frac{v}{c^3}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, 0, 0\right). \tag{206}$$

Po malé úpravě (z rovnosti $a^i\, a_i = a^i_K\, a_{Ki}$) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = a. \tag{207}$$

S počátečními podmínkami $v_0 = 0$, $x_0 = 0$ dostáváme řešení pro konstantní zrychlení a

$$v = \frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}, \qquad x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1\right). \tag{208}$$

9.6 Relativistický impuls

Jak v nerelativistické mechanice, tak existuje i ve speciální teorii relativity princip nejmenšího účinku. Jako invariantní a jednoduchý účinek bodové částice se nabízí integrál délky podél světočáry. Z důvodu dimenze a abychom v nerelativistické limitě dostali pro účinek známý nerelativistický výraz, musíme konstantu úměrnost zvolit rovnu $-mc$, tedy

$$S = -mc\int_a^b \mathrm{d}s = -mc^2\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t. \tag{209}$$

Lagrangeova funkce a impuls jsou

$$L = -m\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{210}$$

S volbou faktoru $-mc$ dostaneme v přiblížení $v \ll c$

$$L \approx -mc^2\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{mv^2}{2} - mc^2, \tag{211}$$

tedy nerelativistickou Lagrangovu funkci volné částice minus konstantu mc^2, která je bez významu pro pohybové rovnice klasické mechaniky.

Hamiltonova funkce je pak

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}; \tag{212}$$

v prípadě $v \ll c$ dostaneme

$$H \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \tag{213}$$

t. j. klidová energie hmoty + nerelativistická kinetická energie.

Z hamiltoniánu a impulsu skládáme čtyřimpuls

$$p^i = \left(\frac{H}{c}, \vec{p}\right) = mcu^i, \qquad\qquad p^i p_i = m^2c^2 \tag{214}$$

a zavedeme čtyřvektor sily

$$f^i = \frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \qquad f^i\,p_i = 0. \tag{215}$$

10 Náboj v elektromagnetickém poli

10.1 Pohybové rovnice

Účinek nabité částice v elektromagnetickém poli je dán vzorcem

$$S = -mc \int_a^b \mathrm{d}s - q \int_a^b A_i \,\mathrm{d}x^i, \tag{216}$$

kde jsme zavedli **čtyřpotenciál**

$$\boxed{A^i = \left(\tfrac{\phi}{c}, \vec{A}\right).} \tag{217}$$

Lagrangeova funkce a zobecněný impuls jsou

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\vec{A} \cdot \vec{v} - q\phi, \qquad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\vec{A} = \vec{p} + q\vec{A}, \tag{218}$$

hamiltonova funkce je

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v} - L = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{P} - q\vec{A})^2} + q\phi. \tag{219}$$

Z vektorové analýzy budeme potřebovat identitu

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{b} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}\right) + \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{b}\right). \tag{220}$$

Je pak

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} L = q\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) - q\vec{\nabla}\phi = q\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + q\,\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - q\vec{\nabla}\phi,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}+q\vec{A}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} + q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + q\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}.\end{aligned} \tag{221}$$

Lagrangeova rovnice je tedy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right), \tag{222}$$

kde jsme označili

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{223}$$

Ve čtyřrozměrné notaci je

$$\delta S = -mc\int_a^b \delta\mathrm{d}s - q\,\delta\int_a^b A_i\,\mathrm{d}x^i. \tag{224}$$

Variace elementu délky je

$$\delta\mathrm{d}s = \delta\sqrt{g_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k} = \frac{g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\delta\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = u_k\,\delta\mathrm{d}x^k, \tag{225}$$

variace vektorového potenciálu

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\delta x^k. \tag{226}$$

Použitím toho a integrací per partes dostaneme

$$\delta S = \int_a^b \left(mc\,\delta x^i\,\mathrm{d}u_i + q\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\delta x^i\,\mathrm{d}x^k - q\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\,\delta x^k\,\mathrm{d}x^i\right) - \left(mcu_i + qA_i\right)\,\delta x^i\Big|_a^b. \tag{227}$$

Z toho vyplývají pohybové rovnice

$$\boxed{mc\,\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s} = q\,F_{ik}\,u^k} \tag{228}$$

s definicí tenzoru F_{ik}

$$\boxed{F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.} \tag{229}$$

Prostorové složky pohybových rovnic popisují Lorentzovu sílu (222).

10.2 Tenzor elektromagnetického pole

V minulém podkapitoli jsme zavedli tenzor elektromagnetického pole

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_z}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{230}$$

Při Lorentzově transformaci se tenzor elektromagnetického pole transformuje podle vztahu

$$F^{ik} = \Lambda^i_m \, \Lambda^k_n \, F'^{mn}. \tag{231}$$

Při Lorentzově transformaci ve směru x s maticí Λ^i_k (201) dostaneme následující transformační vztah tenzoru elektromagnetického pole

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & F'^{01} & \gamma\left(F'^{02} + \frac{v}{c}\,F'^{12}\right) & \gamma\left(F'^{03} + \frac{v}{c}\,F'^{13}\right) \\ F'^{10} & 0 & \gamma\left(F'^{12} + \frac{v}{c}\,F'^{02}\right) & \gamma\left(F'^{13} + \frac{v}{c}\,F'^{03}\right) \\ \gamma\left(F'^{20} + \frac{v}{c}\,F'^{21}\right) & \gamma\left(F'^{21} + \frac{v}{c}\,F'^{20}\right) & 0 & F'^{23} \\ \gamma\left(F'^{30} + \frac{v}{c}\,F'^{31}\right) & \gamma\left(F'^{31} + \frac{v}{c}\,F'^{30}\right) & F'^{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{232}$$

Převedeno do vektorů intenzity a indukce platí

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, \quad E_y = \gamma(E'_y + vB'_z), \quad E_z = \gamma(E'_z - vB'_y), \\ B_x &= B'_x, \quad B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_z\right), \quad B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2}E'_y\right). \end{aligned} \tag{233}$$

V nerelativistickém přiblížení ($v/c \to 0$) přechází (233) na

$$\vec{E} \doteq \vec{E}' - \vec{v} \times \vec{B}', \qquad \vec{B} \doteq \vec{B}'. \tag{234}$$

Invarianty pole můžeme zkonstruovat z tenzoru pole. Poněvadž je antisymetrický, zúžení nedává nic a máme až kvadratické výrazy

$$g^{im}\,g^{kn}\,F_{ik}\,F_{mn} = F_{ik}\,F^{ik} = \mathrm{inv}, \qquad \frac{1}{2}\epsilon^{ikmn}\,F_{ik}\,F_{mn} = F_{ik}\,\star F^{ik} = \mathrm{inv}. \tag{235}$$

Duální tenzor vyjádřený pomocí intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole má tvar

$$\star F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -\dfrac{E_z}{c} & \dfrac{E_y}{c} \\ B_y & \dfrac{E_z}{c} & 0 & -\dfrac{E_x}{c} \\ B_z & -\dfrac{E_y}{c} & \dfrac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{236}$$

Invarianty mají pak vyjádření

$$F_{ik}\,F^{ik} = -2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right), \qquad F_{ik}\,\star F^{ik} = 4\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}. \tag{237}$$

$F_{ik}F^{ik}$ je Lagrangeova funkce volného elektromagnetického pole.

11 Synchrotronové záření

11.1 Liénardův-Wiechertův potenciál

Počítáme potenciál pole, vytvařeného jedním nábojem, který se pohybuje po trajektorii $\vec{x} = \vec{x}_0(t)$, v čase t v bodě $P(x, y, z)$. Potenciál je dán stavem pohybu částice v čase t', pro který platí (doba potřebná pro šíření světelného signalu)

$$c(t - t') = R(t') = |\vec{x} - \vec{x}_0(t')|. \tag{238}$$

V souřadné soustavě, ve které je částice v čase t' v klidu, máme právě Coulombův zákon

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R(t')}, \qquad \vec{A}(\vec{x}, t) = 0. \tag{239}$$

Podmínku (238) zapíšeme ve čtyřrozměrném (kovariantním) tvaru jako podmínku toho, že interval mezi událostmi „emise fotonu“ $(ct', \vec{x}_0(t'))$ a „absorpce fotonu“ $(ct, \vec{x})$ leží na světelném kuželu, tedy pro rozdíl čtyřvektorů událostí $R^k = (c(t - t'), \vec{x} - \vec{x}_0(t'))$ platí

$$R^k\,R_k = 0. \tag{240}$$

Pomocí tohoto nulového čtyřvektoru a jednotkového čtyřvektoru rychlosti částice

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right), \qquad \vec{v} = \vec{v}(t') = \frac{\mathrm{d}\vec{x}_0(t')}{\mathrm{d}t'}, \qquad u^i\,u_i = 1 \tag{241}$$

se pokusíme zapsat čtyřvektor potenciálu pole tak, aby pro $\vec{v} = \vec{0}$ (tj. pro čtyřvektor $u^i = (1, \vec{0})$) přešel do tvaru (239). Z možných kombinací snadno nalezeme výsledek

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{u^i}{u_k\,R^k}. \tag{242}$$

Pokud nevypisujeme explicitně argumenty, musíme mít na pamětí, že levé strany vztahů jsou uvažovány v čase t, pravé strany v čase t'. V trojrozměrném značení pak má (242) tvar

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c\,R}\right)}, \qquad \vec{A} = \frac{e\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}}{R\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{c\,R}\right)}\,. \tag{243}$$

Výsledek (243) je přirozeně stejný jako (165) a (166). Při výpočtu polí

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{244}$$

budeme potřebovat následující triky pro výpočet parciálních derivací: Derivováním vztahu (238) podle t dostáváme

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR}} \,. \tag{245}$$

Obdobně derivováním vztahu (238) podle $\vec{x}$ dostáváme

$$-c\vec{\nabla}t' = \vec{\nabla}R(t') = \frac{\partial R}{\partial t'}\vec{\nabla}t' + \frac{\vec{R}}{R} \Rightarrow \vec{\nabla}t' = -\frac{\vec{R}}{cR\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{R}}{cR}\right)} \,. \tag{246}$$

Výraz pro potenciály ve (244) pak budeme chápat jako funkce $f(\vec{x},t')$, a budeme počítat parciální derivace podle $\vec{x}$ při konstantním t' a podle t' při konstantním $\vec{x}$. Porovnaváním diferenciálů

$$\mathrm{d}f = \vec{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \vec{\nabla}f\cdot\mathrm{d}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t'}\,\mathrm{d}t' = \left(\vec{\nabla}f + \frac{\partial f}{\partial t'}\vec{\nabla}t'\right)\cdot\mathrm{d}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\,\mathrm{d}t \tag{247}$$

přepíšeme (244) jako

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi(\vec{x},t') - \frac{\partial\phi(\vec{x},t')}{\partial t'}\vec{\nabla}t' - \frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\,,\\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x},t') + \vec{\nabla}t'\times\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t')}{\partial t'}\,.\end{aligned} \tag{248}$$

Pro intenzitu elektrického pole dostáváme pak

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^3} + \frac{\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\vec{w}\right)}{c^2R\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^3}\right], \tag{249}$$

zatímco pro indukci magnetického pole

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E} = \frac{e\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{v}\times\vec{n})}{R^2\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^3} + \vec{n}\times\frac{\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\vec{w}\right)}{cR\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^3}\right]. \tag{250}$$

Označili jsme jednotkový vektor $\vec{n} = \vec{R}/R$ a zrychlení $\vec{w} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t'$. Limitní případy pro $v/c \to 0$ jsou

$$\vec{E} \approx \frac{e\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,, \qquad \vec{B} \approx \frac{e\mu_0(\vec{v}\times\vec{n})}{4\pi R^2}\,. \tag{251}$$

11.2 Intenzita záření

Poyntingův vektor (energie, procházející jednotkovou plochou za jednotku času, dimenze $[\mathrm{Jm^{-2}s^{-1}}]$) je

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \epsilon_0 cE^2\vec{n} \tag{252}$$

a intenzitu záření (tj. energie, vyzařovanou za sekundu do elementu prostorového úhlu, [Watt]) spočteme tedy jako

$$\mathrm{d}I = \lim_{R\to\infty} \vec{S}\cdot\vec{n}\, R^2\, \mathrm{d}\Omega. \tag{253}$$

Po dosazení z (252) a (249)

$$\mathrm{d}I = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\left[\frac{2(\vec{n}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{w})}{c\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^5} + \frac{\vec{w}^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{n}\cdot\vec{w})^2}{\left(1-\frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{c}\right)^6}\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{254}$$

Pro $v/c \to 0$ dostáváme s označením $\vec{n}\cdot\vec{w} = w\cos\xi$ pro celkovou vyzařovanou intenzitu

$$I = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\eta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\xi\,\sin\xi(1-\cos^2\xi) = \frac{e^2\,w^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{255}$$

V klidové soustavě částice je tedy (s označením $I = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$)

$$\mathrm{d}E = \frac{e^2 w^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\mathrm{d}t, \quad u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = (1,\vec{0}), \quad w^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \left(0,\frac{\vec{w}}{c^2}\right). \tag{256}$$

Relativisticky invariantní výraz (tj. diferenciál čtyřvektoru impulzu) vytvořený z čtyřvektorů rychlosti a zrychlení, který v klidové soustavě přejde na výrazy ze vztahu (256), je pak

$$p^i = \left(\frac{E}{c},\vec{p}\right), \qquad \mathrm{d}p^i = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}x^i = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c}\frac{\mathrm{d}u^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}s}\,u^i\,\mathrm{d}s. \tag{257}$$

V laboratorní soustavě tedy máme pro celkovou vyzařovanou intenzitu výraz

$$I = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{w^2 - \left(\vec{w}\times\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}. \tag{258}$$

Zde jsme potřebovali vyjádření čtyřvektoru rychlosti i zrychlení v laboratorní soustavě. Abychom nemuseli při výpočtu čtyřvektoru zrychlení užit obecné Lorentzovy transformace, vypočteme w^i derivováním známého tvaru $u^i = \left(1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \vec{v}/\left(c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\right)$, potom

$$w^i = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{c^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}, \frac{\vec{w}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\vec{v}\,(\vec{v}\cdot\vec{w})}{c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right). \tag{259}$$

V homogenním magnetickém poli se nabitá částice pohybuje rychlostí v po kružnici poloměru R, její zrychlení $w = v^2/R$ je kolmé k rychlosti. Dosazením do vztahu (258)

$$I = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{v^4}{R^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{p}{mc}\right)^4 \approx \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{T}{mc^2}\right)^4. \tag{260}$$

V posledním výrazu ve (260) jsme použili aproximace vysokých energií, kde pro kinetickou energii platí $T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2 \approx pc$. Z tohoto výrazu je také zřejmé, že synchrotronové záření je omezujícím faktorem při urychlování lehkých částic (elektronů a positronů). Pro normovací hodnotu $R_0 \approx 0,5$ km můžeme psát $I \approx (R_0/R)^2 (T/mc^2)^4\,\mathrm{eV\,s^{-1}}$.

Jsou-li rychlost a zrychlení v určitém okamžiku rovnoběžné, dostáváme ($\vec{n}\cdot\vec{v} = v\cos\vartheta$, rychlost podél osy z) pro úhlové rozložení záření výraz

$$\mathrm{d}I = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\vartheta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^6}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{261}$$

Pro hodnoty $v/c \to 1$ má úhlové rozložení velmi úzké, ale „dvouhrbé“ maximum kolem $\vartheta = 0$. Jsou-li rychlost a zrychlení v určitém okamžiku navzájem kolmé, dostáváme ($\vec{n}\cdot\vec{v} = v\cos\vartheta$, $\vec{n}\cdot\vec{w} = w\cos\varphi\sin\vartheta$, rychlost podél osy z a zrychlení podél osy x) pro úhlové rozložení

$$\mathrm{d}I = \frac{e^2 w^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\vartheta\ \cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)^6}\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{262}$$

12 Maxwellovy rovnice v čtyřrozměrné formulaci

12.1 Čtyřrozměrný vektor proudu, rovnice kontinuity

Definujeme čtyřvektor proudu (pro částici: náboj krát čtyřrychlost)

$$j^i = \rho\,\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{\jmath}). \tag{263}$$

Náboj, který ubude v nějakém objemu, můžeme zapsat dvojím způsobem

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\,\mathrm{d}V = \oint \vec{\jmath}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{264}$$

S pomocí Gaußovy věty pak z (264) plyne

$$\int \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = 0, \tag{265}$$

tedy (objem je libovolný) rovnice kontinuity

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0.} \tag{266}$$

12.2 Homogenní Maxwellovy rovnice

Z vyjádření tensoru elektromagnetického pole pomocí potenciálu snadno odvodíme platnost vztahu

$$\boxed{\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0.} \tag{267}$$

Na levé straně je úplně antisymetrický tensor třetího řádu, představuje pouze čtyři různé rovnice. Zřetelněji je to vidět, užijeme-li zápis duálního (pseudo)vektoru

$$\boxed{\frac{1}{2}\epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial \star F^{ik}}{\partial x^k} = 0.} \tag{268}$$

Nultá komponenta dává tvrzení o nezřídlovém charakteru magnetického pole, další tři komponenty Faradayův indukční zákon

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{269}$$

12.3 Nehomogenní Maxwellovy rovnice

Čtyřrozměrný zápis nehomogenních Maxwellových rovnic, obsahujících hustotu náboje a proudu, je

$$\boxed{\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i.} \tag{270}$$

Nultá komponenta je rovnice pro divergenci intenzity elektrického pole (Gaußova věta elektrostatiky), zbývající tři pro rotaci magnetického pole (Ampèreův zákon)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{j}. \tag{271}$$

12.4 Tensor energie-impulzu

Z hustoty energie

$$W = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right), \tag{272}$$

z Poyntingova vektoru

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \tag{273}$$

a z Maxwellova tensoru napětí (hustota impulzu elektomagnetického pole)

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0}B_\alpha B_\beta - W\delta_{\alpha\beta} \tag{274}$$

elektromagnetického pole (ve vakuu) můžeme sestavit čtyřrozměrný tensor energie-impulsu,

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c}S_\beta \\ \frac{1}{c}S_\alpha & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{275}$$

Pomocí tensoru elektromagnetického pole dostáváme jednoduchý výraz

$$\boxed{T^{ik} = \frac{1}{\mu_0}\left(-g_{lm}F^{il}F^{km} + \frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right).} \tag{276}$$

Tensor energie-impulsu soustavy částic zapíšeme pomocí analogie s tensorem energie-impulsu elektromagnetického pole. Hustotu impulsu soustavy částic napíšeme jako

$$\pi^\alpha = \mu c u^\alpha, \qquad \mu = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a). \tag{277}$$

Hustota impulsu je u elektromagnetického pole rovna hustotě toku energie dělené c^2. Výraz (277) bude tedy analogicky roven $T^{0\alpha}/c$. Veličina μc je nultou komponentou (stejně jako hustota náboje u čtyřvektoru proudu) čtyřvektoru toku hmoty $\mu\, \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$. Tensor energie-impulsu tak můžeme konečně psát jako

$$T_{\mathrm{P}}^{ik} = \mu c \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \mu c\, u^i u^k \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \qquad T_{\mathrm{P}}^{ik} = T_{\mathrm{P}}^{ki}. \tag{278}$$

Pro tensor energie-impulsu elektromagnetického pole dostaneme s využitím Maxwellových rovnic

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0\, j^i, \qquad \epsilon^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0 \tag{279}$$

výraz

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_F^{ik} = -F^{ik}\, j_k. \tag{280}$$

Pro tensor energie-impulsu soustavy částic dostaneme s využitím pohybových rovnic

$$\mu c\,\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \rho\, F^{ik}\, u_k \Leftrightarrow \mu c\,\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = F^{ik}\, j_k \tag{281}$$

a rovnice zachování hmotnosti (rovnice kontinuity pro čtyřvektor toku hmotnosti, podobně jako pro čtyřvektor proudu)

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\right) = 0 \tag{282}$$

výraz

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, T_P^{ik} = F^{ik}\, j_k. \tag{283}$$

Spojením (280) a (283) dostáváme zákon zachování

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T_F^{ik} + T_P^{ik}\right) = 0. \tag{284}$$

Pro tensor energie-impulsu platí (rovnost právě pro elektromagnetické pole)

$$T_i^i \geq 0. \tag{285}$$

13 Elektromagnetické vlny

13.1 Vlnová rovnice

Vezmeme nehomogenní Maxwellovy rovnic ve vakuu ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) a dosadíme vyjádření pole pomocí potenciálů

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0, \qquad F^{ik} = g^{ij}\, g^{kl} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^l} \right), \tag{286}$$
$$g^{ij}\, \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^j\, \partial x^k} - g^{kl}\, \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\, \partial x^l} = 0.$$

Lorenzova kalibrační podmínka (123) nabývá formu čtyřdivergence

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 \tag{287}$$

a zjednoduší (286) na vlnovou rovnici

$$-g^{kl}\, \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\, \partial x^l} = 0. \tag{288}$$

Pomocí d'Alembertova operátoru

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{289}$$

máme pak ve třirozměrném zápisu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \qquad \Box\, \phi = 0, \qquad \Box\, \vec{A} = 0. \tag{290}$$

Vlnové rovnice, spolu s Lorenzovou kalibrační podmínkou, jsou ekvivalentní Maxwellovým rovnicím pro volné elektromagnetické pole. Konsistence kalibračních podmínek s rovnicemi pole se dokáže takto:
1) Zvolíme Lorenzovu kalibraci $\partial_k A^k = 0$ na počáteční nadploše $t = 0$.
2) Řešíme rovnici $\Box\, A^k = 0$.
3) Protože A^k je řešení vlnové rovnice, platí

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \partial_k A^k = \ddot{A}_0 + \vec{\nabla} \dot{\vec{A}} = \triangle A_0 + \vec{\nabla} \dot{\vec{A}} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} A_0 + \dot{\vec{A}} \right) = -\vec{\nabla} \vec{E} = 0.$$

$$\Rightarrow \partial_k A^k = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, \partial_k A^k = 0$$

pro $t = 0$.
4) Když A^k je řešení vlnové rovnice, pak je $\partial_k A^k$ také řešení:

$$\Box\, \partial_k A^k = \partial_k \Box\, A^k = 0.$$

5) Z toho vyplývá, že $\partial_k A^k = 0$ všude.

13.2 Rovinná monochromatická vlna

Řešení hledáme ve tvaru rovinné vlny, tedy konstantní čtyřvektor násobený komplexním fázovým faktorem

$$A^i = \mathrm{Re}\{a^i \exp(ik_j x^j)\}, \qquad k_i\, k^i = 0, \qquad k_i\, a^i = 0. \tag{291}$$

Poslední vztah ve (291) je dán Lorenzovou kalibrační podmínkou. Vlnový čtyřvektor zapisujeme jako

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right), \qquad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\,\vec{n}, \qquad \vec{n}^{\,2} = 1. \tag{292}$$

Velmi jednoduše popíšeme pomocí charakteristik rovinné monochromatické vlny Dopplerův jev. Mějme zdroj světla, který je v klidu v soustavě K_0. Soustava K_0 se pohybuje vzhledem k laboratorní soustavě K rychlostí v. Ať' je úhel mezi směrem pohybu zdroje a směrem šíření světla α. Potom platí

$$\begin{aligned}
k^0_{(0)} &= \frac{k^0 - \frac{v}{c}\,k^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad k^0_{(0)} = \frac{\omega_{(0)}}{c}, \qquad\qquad k^0 = \frac{\omega}{c}, \\
k^1_{(0)} &= \frac{k^1 - \frac{v}{c}\,k^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad k^1_{(0)} = \frac{\omega_{(0)}}{c}\,\cos\alpha_{(0)}, \quad k^1 = \frac{\omega}{c}\,\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{293}$$

a odtud

$$\omega = \omega_{(0)}\,\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\,\cos\alpha}. \tag{294}$$

Pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla máme

$$\omega \approx \omega_{(0)}\left(1 + \frac{v}{c}\,\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\,\cos 2\alpha\right). \tag{295}$$

Tensor energie-impulsu je

$$T^{ik} = \frac{c^2}{\omega^2}\,W\,k^i k^k, \qquad W = \frac{1}{2\mu_0}\left[a^i a^*_i + \mathrm{Re}\left\{a^i a_i \exp\left(2ik_j\,x^j\right)\right\}\right]. \tag{296}$$

Ve střední hodnotě podle času je druhý člen ve výrazu pro hustotu energie roven nule. Oba invarianty (237) jsou rovny nule.

Se speciální volbou kalibrace (spojené ovšem s jednou určitou inerciální souřadnou soustavou) máme pro rovinnou vlnu ve směru x

$$\begin{aligned}
A^i = (0, \vec{A}), \quad \vec{A} &= a_y \cos(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_y + a_z \sin(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_z, \\
\vec{E} &= \omega a_y \sin(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_y - \omega a_z \cos(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_z, \\
\vec{B} &= k a_z \cos(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_y + k a_y \sin(\omega t - kx + \alpha)\vec{e}_z.
\end{aligned} \tag{297}$$

Eliptická polarizace takové vlny je vidět ze vztahu

$$\frac{E_y^2}{\omega^2 a_y^2} + \frac{E_z^2}{\omega^2 a_z^2} = 1, \qquad \frac{B_y^2}{k^2 a_z^2} + \frac{B_z^2}{k^2 a_y^2} = 1. \tag{298}$$

13.3 Rozklad elektrostatického pole bodového náboje

Potenciál bodového náboje (Coulombův potenciál) vyhovuje rovnici

$$\triangle\phi(\vec{x}) = -\frac{q}{\epsilon_0}\,\delta^{(3)}(\vec{x}). \tag{299}$$

Uvažujme Fourierovu transformaci

$$\phi(\vec{x}) = \int \phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})\,\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}, \qquad \phi_{\vec{k}} = \int \phi(\vec{x}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x})\,\mathrm{d}^3x. \tag{300}$$

Máme dvě vyjádření pro Fourierovu transformaci působení Laplaceova operátoru

$$\begin{aligned} \triangle\phi(\vec{x}) &= \int -k^2\phi_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \quad \Rightarrow \quad (\triangle\phi)_{\vec{k}} = -k^2\phi_{\vec{k}}, \\ \triangle\phi(\vec{x}) &= -\frac{q}{\epsilon_0}\int \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \quad \Rightarrow \quad (\triangle\phi)_{\vec{k}} = -\frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \tag{301}$$

Porovnáním obou vyjádření dostáváme

$$\phi_{\vec{k}} = \frac{q}{\epsilon_0 k^2}. \tag{302}$$

13.4 Vlastní kmity pole

Uvažujme objem V uzavřený v hranole o hranách délky A, B, C a kalibraci $\phi = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$. Máme

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}), \qquad \vec{k}\cdot\vec{A}_{\vec{k}} = 0, \qquad \vec{A}_{-\vec{k}} = \vec{A}^*_{\vec{k}}, \tag{303}$$

přitom

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \qquad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \qquad k_z = \frac{2\pi n_z}{C}, \tag{304}$$

kde n_x, n_y, n_z jsou celá čísla. Fourierovy složky vyhovují rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{A}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\vec{A}_{\vec{k}} = 0. \tag{305}$$

Jsou-li rozměry A, B, C zvoleného objemu dostatečně velké, jsou sousední hodnoty k_x, k_y, k_z velmi blízké a můžeme uvažovat o počtu možných stavů v intervalu hodnot vlnového vektoru

$$\begin{gathered} \Delta n_x = \frac{A}{2\pi}\,\Delta k_x, \qquad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi}\,\Delta k_y, \qquad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi}\,\Delta k_z, \\ \Delta n = \Delta n_x\,\Delta n_y\,\Delta n_z = V\,\frac{\Delta k_x\,\Delta k_y\,\Delta k_z}{(2\pi)^3}. \end{gathered} \tag{306}$$

Pro pole dostaneme s potenciálem (303)

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sum_{\vec{k}} \frac{\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}), \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i\sum_{\vec{k}} \vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}). \tag{307}$$

Celková energie pole je

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int\left(\epsilon_0 \vec{E}^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2}\right)\mathrm{d}V = \frac{V}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\epsilon_0 \frac{\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}^*_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}\right)\cdot\left(\vec{k}\times\vec{A}^*_{\vec{k}}\right)\right). \tag{308}$$

Jednoduchou úpravou (využití kalibrační podmínky) přepíšeme výraz (308) na

$$\mathcal{E} = \frac{V\epsilon_0}{2}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{A}^*_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t} + \omega_k^2\,\vec{A}_{\vec{k}}\cdot\vec{A}^*_{\vec{k}}\right), \qquad \omega_k = c\,|\vec{k}|. \tag{309}$$

V rozkladu potenciálu (303) je časová závislost obsažená v $\vec{A}_{\vec{k}}$. Vhodnější pro interpretaci je explicitní zápis časového chováni pro každé $\vec{k}$

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}}\left[\vec{a}_{\vec{k}}\exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t\right)\right) + \vec{a}^*_{\vec{k}}\exp\left(-i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_k t\right)\right)\right]. \tag{310}$$

Porovnáním (310) a (303) dostáváme

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{a}_{\vec{k}}\exp(-i\omega_k t) + \vec{a}^{\,*}_{-\vec{k}}\exp(i\omega_k t). \tag{311}$$

Dosazení (311) do (309) umožňuje ted' napsat energii pole jako

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}}\mathcal{E}_{\vec{k}}, \qquad \mathcal{E}_{\vec{k}} = 2V\epsilon_0\,\omega_k^2\,\vec{a}_{\vec{k}}\cdot\vec{a}^*_{\vec{k}}. \tag{312}$$

Obdobně dostaneme pro impuls

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{\mu_0}\int\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}V = \sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}}{k}\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{c}. \tag{313}$$

Nakonec zavedeme kanonické proměnné

$$\begin{aligned}\vec{Q}_{\vec{k}} &= \sqrt{\epsilon_0 V}\left(\vec{a}_{\vec{k}}\exp(-i\omega_k t) + \vec{a}^*_{\vec{k}}\exp(i\omega_k t)\right),\\ \vec{P}_{\vec{k}} &= -i\omega_{\vec{k}}\sqrt{\epsilon_0 V}\left(\vec{a}_{\vec{k}}\exp(-i\omega_k t) - \vec{a}^*_{\vec{k}}\exp(i\omega_k t)\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{Q}_{\vec{k}}}{\mathrm{d}t}.\end{aligned} \tag{314}$$

V těchto proměnných máme energii vyjádřenou jako energii souboru harmonických oscilátorů

$$\mathcal{E} = \sum_{\vec{k}}\mathcal{E}_{\vec{k}}, \qquad \mathcal{E}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(\vec{P}^2_{\vec{k}} + \omega_k^2\vec{Q}^2_{\vec{k}}\right). \tag{315}$$

14 Rozptyl záření volnými náboji

14.1 Thomsonův vzorec

Zavedeme pojem účinného průřezu. Ať' $\mathrm{d}I$ značí intenzitu záření, tj. střední hodnotu energie vyzařované soustavou za jednotku času do elementu prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$ a $\overline{S}$ je střední hodnota Poyntingova vektoru (střední hodnota toku energie) dopadajícího záření. Potom je diferenciální účinný průřez (účinný průřez rozptylu do elementu prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$) veličina rozměru elementu plochy

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}I}{\overline{S}}. \tag{316}$$

Uvažujme ted' rozptyl elektromagnetické vlny jedním jednotkovým volným nábojem. Budeme předpokládat, že rychlost získaná nábojem bude malá a že vlnová délka je mnohem větší než amplituda vyvolaných kmitů náboje okolo původní polohy (kam umístíme počátek souřadnic), tedy můžeme psát

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = e\vec{E}_0 \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \alpha\right) \approx e\vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha). \tag{317}$$

Pro intenzitu dipólového záření kmitajícího náboje máme podle (153) ve směru $\vec{n}$

$$\mathrm{d}I = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0 m^2 c^3}\,|\vec{E}_0\times\vec{n}|^2\,\overline{\cos^2(\omega t-\alpha)}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{e^4}{32\pi^2\epsilon_0 m^2 c^3}\,E_0^2\,\sin^2\!\vartheta\,\mathrm{d}\Omega \tag{318}$$

a pro střední hodnotu Poyntingova vektoru dopadající vlny

$$\overline{S} = c\,\epsilon_0\,E_0^2\,\overline{\cos^2(\omega t-\alpha)} = \frac{1}{2}\,c\,\epsilon_0\,E_0^2, \tag{319}$$

takže pro diferenciální účinný průřez je

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, mc^2}\right)^2 \sin^2\!\vartheta\,\mathrm{d}\Omega. \tag{320}$$

Celkový účinný průřez je pak dán Thomsonovým vzorcem

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}\right)^2 = \frac{8}{3}\,\pi\, r_e^2, \tag{321}$$

kde r_e je klasický poloměr elektronu.

14.2 Modifikace Thomsonova vzorce

Uvažujme nyní nikoliv volný náboj, ale tlumený oscilátor, tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\vec{x} = \frac{e}{m}\,\vec{E}_0\cos\omega t. \tag{322}$$

Pro dipólový moment $\vec{p} = e\vec{x}$ odsud dostáváme

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\,\vec{E}_0. \tag{323}$$

Celkový účinný průřez je v tomto případě

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\,r_e^2\,\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \tag{324}$$

15 Index lomu

Definujeme polarizovatelnost $\alpha(\omega)$ jako konstantu úměrnosti ve vztahu mezi (lokálním) elektrickým polem $\vec{E}_{\mathrm{loc}}$ a dipólovým momentem $\vec{p}$. Vyjdeme z komplexního zápisu (322)

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\vec{x} = \frac{e}{m}\,\vec{E}_{\mathrm{loc}} = \frac{e}{m}\,\vec{E}_0\exp(-i\omega t). \tag{325}$$

Potom

$$\vec{p} = \epsilon_0\,\alpha(\omega)\,\vec{E}_{\mathrm{loc}}, \qquad \alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \tag{326}$$

Polarizace je pak $\vec{P} = N\vec{p}$. Musíme ovšem uvážit, jaké pole působí na náboj. Připomeňme z elektrostatiky, že je-li v dielektriku s homogenním polem dutina, je lokální pole rovno

$$\vec{E}_{\mathrm{loc}} = \vec{E}, \qquad \vec{E}_{\mathrm{loc}} = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0}\,\vec{P}, \qquad \vec{E}_{\mathrm{loc}} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\,\vec{P}, \tag{327}$$

podle toho, jde-li o štěrbinu podél nebo napříč pole nebo o kulovou dutinu. (V případě štěrbiny napříč pole máme $\vec{E}_{\mathrm{loc}} = \frac{1}{\epsilon_0}\vec{D}$.) Pro úplnost poznamenejme, že pro magnetické pole máme v podobné situaci

$$\vec{B}_{\mathrm{loc}} = \vec{B} - \vec{M}, \qquad \vec{B}_{\mathrm{loc}} = \vec{B}, \qquad \vec{B}_{\mathrm{loc}} = \vec{B} - \frac{2}{3}\,\vec{M}. \tag{328}$$

Pro dielektrika uvažujeme o vázaných nábojích uvnitř kulové dutiny, můžeme tedy psát

$$\vec{P} = \epsilon_0\,N\alpha\vec{E}_{\mathrm{loc}} = \epsilon_0\,N\alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\,\vec{P}\right), \tag{329}$$

tak že

$$\vec{P} = \frac{N\,\alpha}{1 - \frac{1}{3}\,N\alpha}\,\epsilon_0\,\vec{E}. \tag{330}$$

Index lomu dostaneme z relace

$$n^2 = \epsilon_r = \frac{D}{\epsilon_0 E} = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E} \tag{331}$$

(za velmi častého předpokladu $\mu(\omega) = \mu_0$):

$$n^2 = 1 + \frac{N\,\alpha}{1 - \frac{1}{3}\,N\alpha}. \tag{332}$$

Obvyklá forma tohoto vztahu je (Clausius - Mosotti)

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2}=N\alpha. \tag{333}$$

Ve vodiči uvažujeme o téměř volných elektronech (nevázaných k atomu, tedy $\omega_0 = 0$) a dále máme pro konstantu γ (ze dvou různých vyjádření proudu a zápisu změny impulsu za dobu mezi srážkami)

$$j=\sigma\,E, \qquad j=N\,e\,v_{\mathrm{d}}, \qquad m\,v_{\mathrm{d}}\,\gamma=e\,E \quad\Rightarrow\quad \gamma=\frac{N\,e^2}{m\,\sigma}. \tag{334}$$

(v_{d} je zprůměrovaná rychlost elektronů - drift.) Také lokální pole je rovno vnějšímu, opět díky neustálému pohybu téměř volných elektronů. Odtud máme pro index lomu

$$n^2=1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2+i\omega\,\omega_{\mathrm{p}}^2\,\frac{\epsilon_0}{\sigma}}, \qquad \omega_{\mathrm{p}}^2=\frac{N\,e^2}{m\,\epsilon_0}. \tag{335}$$

ω_{p} je tzv. plasmová frekvence.

V plasmatu je γ zanedbatelné, t. zn. $\epsilon_0/\sigma \to 0$, a kvadrat indexu lomu je

$$n^2=1-\frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}. \tag{336}$$

Když $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$, je n realné a plasma propustí e.m. vlny, když $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$, je n imaginárni, což znamená, že plasma odrazuje vlny. Krátké a dlouhé radiové vlny se odrazují od ionosféry a vratí se k zemi, ultrakrátké propagují do prostoru. Kovy jsou průhledné pro ultrafialové světlo. Při vstupu vesmírních lodí do atmosféry se zahřívá vyduch, tím se zvýšuje počet iontů, t. j. plasmová frekvence v okolí, a komunikace je přechodně přerušena.