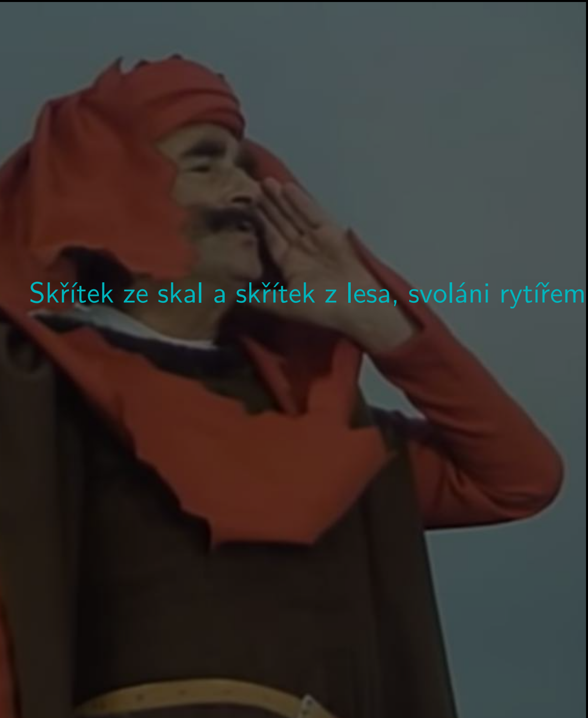
Not so long time ago in a galaxy we live in....



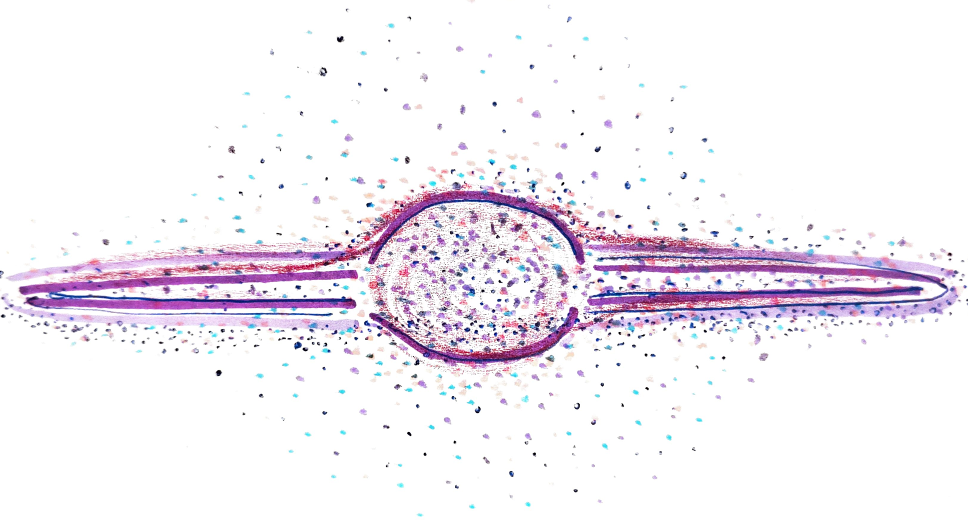
Skřítek ze skal a skřítek z lesa, svoláni rytířem Brtníkem z Brtníku, uvádějí:

Rotační křivka galaxie

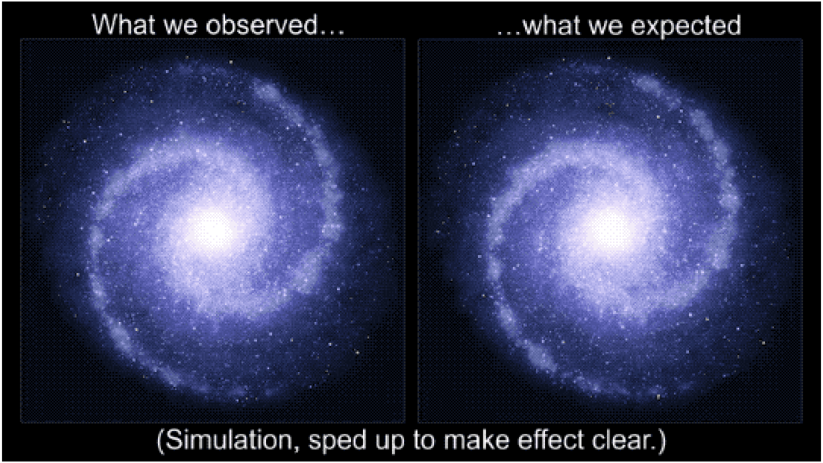
řešením Poissonovy rovnice pro gravitační potenciál pomocí DFT

Bc. Jakub Gazdoš, Bc. Tatiana Rievajová, Bc. Alena Vanžurová
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky
21. 5. 2024

Spirální galaxie zboku



Spirální galaxie shora



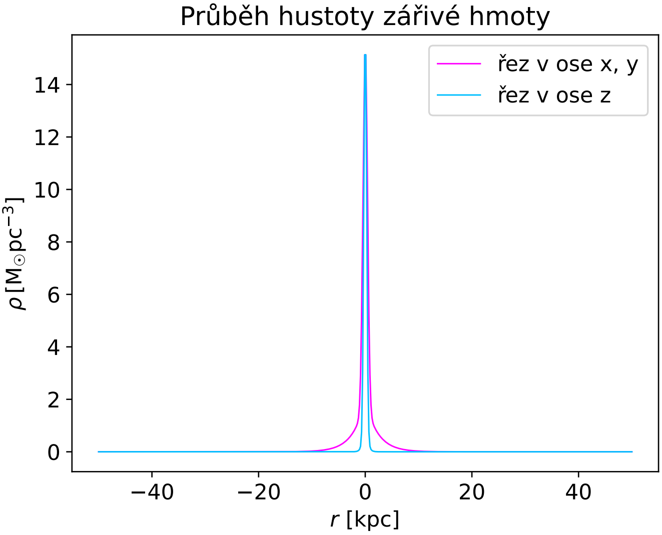
Hustota

- rozložení zářivé hmoty:

$$\rho(x,y,z) = \rho_\mathrm{b} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{r_\mathrm{b}^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{z_\mathrm{b}^2}\right) + \rho_\mathrm{d} \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_\mathrm{d}}\right) \exp\left(-\frac{|z|}{z_\mathrm{d}}\right)$$

- hodnoty parametrů:
  - výduť: $\rho_\mathrm{b} = 15\,\mathrm{M_\odot pc^{-3}}$, $r_\mathrm{b} = 0.6\,\mathrm{kpc}$, $z_\mathrm{b} = 0.37\,\mathrm{kpc}$
  - disk: $\rho_\mathrm{d} = 2.7\,\mathrm{M_\odot pc^{-3}}$, $r_\mathrm{d} = 2.3\,\mathrm{kpc}$, $z_\mathrm{d} = 0.32\,\mathrm{kpc}$

Hustota



Průběh hustoty zářivé hmoty
řez v ose x, y
řez v ose z
ρ [M⊙pc⁻³]
0
2
4
6
8
10
12
14
−40
−20
0
20
40
r [kpc]

Poissonova rovnice – analytický přístup

- v prostorové souřadnici:
  $\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r})$

  $\rightarrow \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{kr}} d\boldsymbol{r}$
  $\rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{kr}} d\boldsymbol{r}$
- v prostorové frekvenci:
  $-\boldsymbol{k}^2 \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = 4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) \rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = -\frac{4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{k}^2}$

  $\rightarrow \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{kr}} d\boldsymbol{k}$

Poissonova rovnice – analytický přístup

- v prostorové souřadnici:
  $\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r})$

  $\rightarrow \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}$
  $\rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}$
- v prostorové frekvenci:
  $-\boldsymbol{k}^2 \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = 4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) \rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = -\frac{4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{k}^2}$

  $\rightarrow \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k}$
- přímočarý postup velí:
  $\rho \rightarrow \texttt{scipy.fft.fftn} \rightarrow \rho^{\mathrm{FT}} \rightarrow \phi^{\mathrm{FT}} \rightarrow \texttt{scipy.fft.ifftn} \rightarrow \phi$

Poissonova rovnice – analytický přístup

- v prostorové souřadnici:
  $\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}) = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r})$

  $\rightarrow \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}$
  $\rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r}$
- v prostorové frekvenci:
  $-\boldsymbol{k}^2 \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = 4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) \rightarrow \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = -\frac{4\pi G \rho^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{k}^2}$

  $\rightarrow \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{k}$
- přímočarý postup velí:
  $\rho \rightarrow$ `scipy.fft.fftn` $\rightarrow \rho^{\mathrm{FT}} \rightarrow \phi^{\mathrm{FT}} \rightarrow$ `scipy.fft.ifftn` $\rightarrow \phi$
- ale...

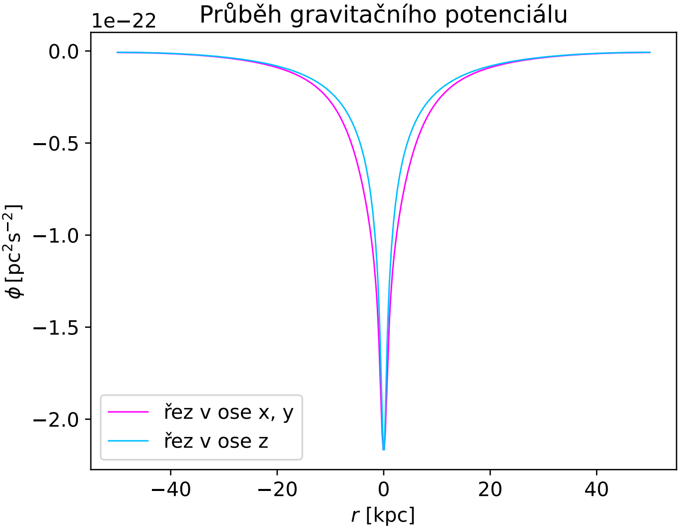
Nástrahy

- dlouhovlnná singularita
  - pro $k = 0$ nelze rovnici $\phi^{\mathrm{FT}}(k)$ řešit
  - funkce 0. koeficientu – posunutí střední hodnoty

Nástrahy

- dlouhovlnná singularita
  - pro $k = 0$ nelze rovnici $\phi^{\mathrm{FT}}(k)$ řešit
  - funkce 0. koeficientu – posunutí střední hodnoty
- vyčerpávající jednotková analýza
  - $\cancel{G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}}$
  - $G = 4.94 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{pc}^3\,\mathrm{M}_\odot{}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$
  - $G = 4.45 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kpc}\,\mathrm{M}_\odot{}^{-1}\,\mathrm{km}^2\,\mathrm{s}^{-2}$

Potenciál



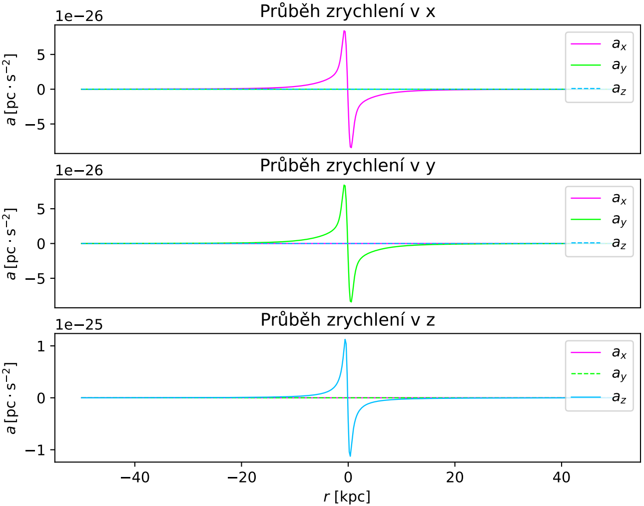
Průběh gravitačního potenciálu
1e−22
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
ϕ [pc²s⁻²]
−40
−20
0
20
40
r [kpc]
řez v ose x, y
řez v ose z

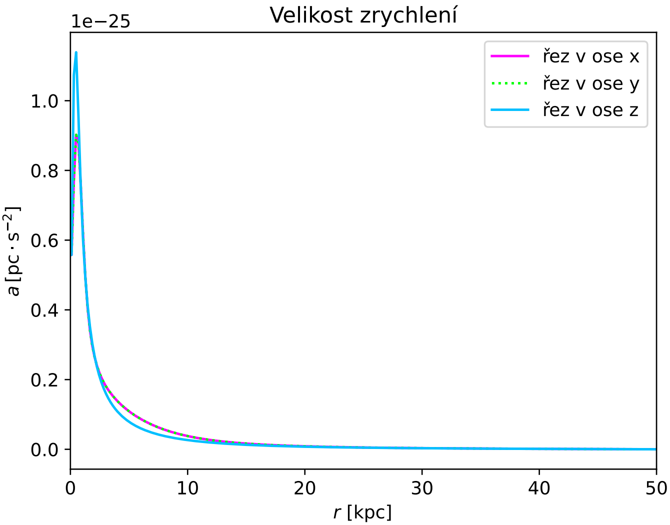
Rotační křivka

- v prostorové souřadnici:
  - $a(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$
- v prostorové frekvenci:
  - $a^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k}) = i\boldsymbol{k}\phi^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k})$

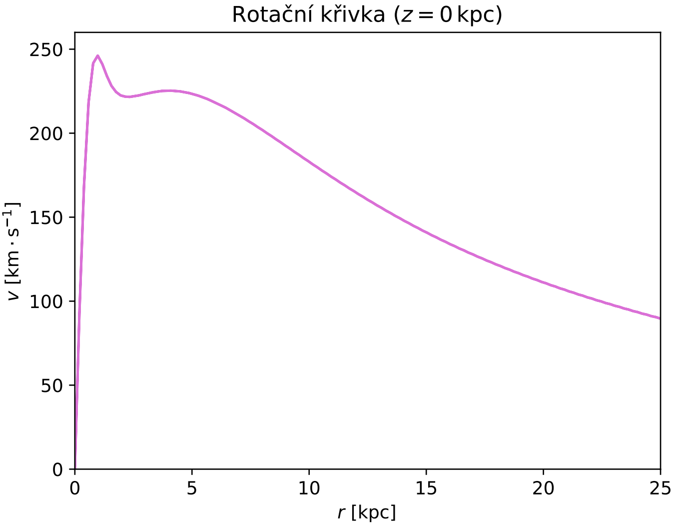
    $\rightarrow a(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a^{\mathrm{FT}}(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}d\boldsymbol{k}$
- oběžná rychlost:
  $a(\boldsymbol{r}) = \frac{v(\boldsymbol{r})^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{r \cdot a}$
- přímočarý postup:
  $\phi^{\mathrm{FT}} \rightarrow a^{\mathrm{FT}} \rightarrow$ `scipy.fft.ifftn` $\rightarrow a \rightarrow v$

Rotační křivka




Velikost zrychlení
1e−25
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
a [pc · s^{-2}]
0
10
20
30
40
50
r [kpc]
řez v ose x
řez v ose y
řez v ose z

Rotační křivka



Poissonova rovnice – numerický přístup

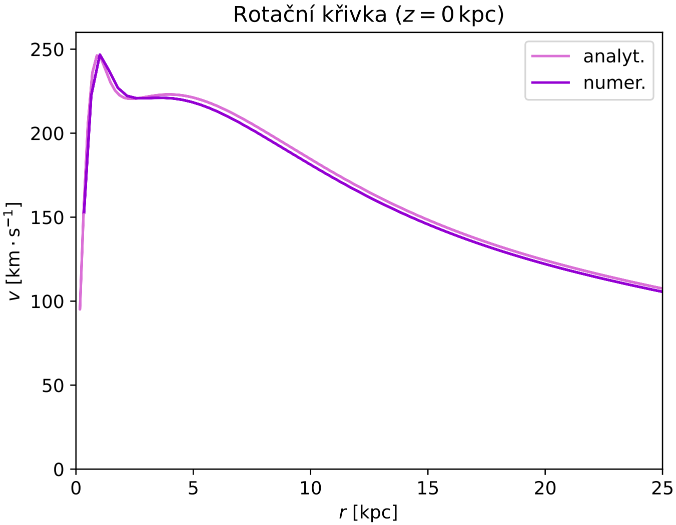
- $\partial^2\phi_j = \frac{\phi_{j-1}-2\phi_j+\phi_{j+1}}{\Delta^2} = \mathrm{D}^2\phi_j$
- $\partial\phi_j = \frac{\phi_{j+1}-\phi_{j-1}}{2\Delta} = \mathrm{D}\phi_j$
- $\mathrm{DFT}: \phi_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}kj}$

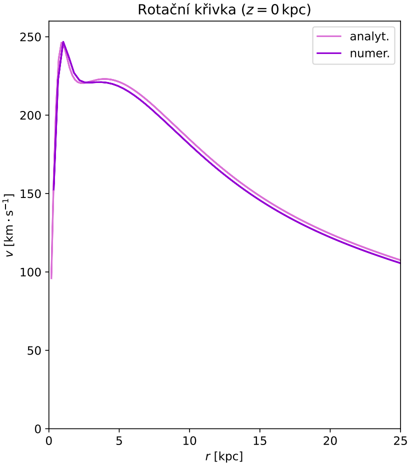
$$\rightarrow \mathrm{D}^2\phi_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}kj}\left(-\frac{2}{\Delta^2}+\frac{1}{\Delta^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}k}+\frac{1}{\Delta^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}k}\right) =$$

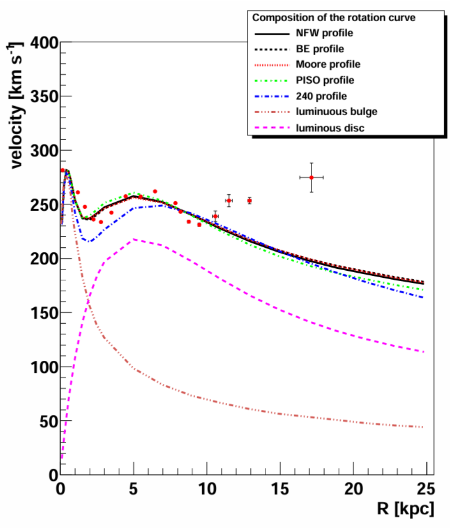
$$= -\frac{2}{\Delta^2}\left(1-\cos\frac{2\pi k}{N}\right)\phi_j = -\frac{4}{\Delta^2}\left(\sin\frac{\pi k}{N}\right)^2\phi_j$$

$$\rightarrow \mathrm{D}\phi_j = \frac{1}{2\Delta N}\sum_{k=0}^{N-1} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}kj}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}k}\right) = \frac{\mathrm{i}}{\Delta}\left(\sin\frac{2\pi k}{N}\right)\phi_j$$

Rotační křivka




Rotační křivka ($z = 0$ kpc)
analyt.
numer.
v [km·s^{-1}]
r [kpc]
0
50
100
150
200
250
0
5
10
15
20
25


Composition of the rotation curve
NFW profile
BE profile
Moore profile
PISO profile
240 profile
luminous bulge
luminous disc
velocity [km s^{-1}]
R [kpc]
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
5
10
15
20
25