

# Historie astronomie VIII.

**Byl objev Neptunu náhodný?**

**Vladimír Štefl**

**Ústav teoretické fyziky a astrofyziky**

# Objev Uranu

březen 1781: anglický astronom **W. Herschel (1738 - 1822)**

- objev Uranu pro  $k = 6$

T. B. pravidlo  $a = 19,6$  au,

reálná velká poloosa  $a = 19,2$  au



Ceres, Pallas, Juno, Vesta  
považovány za planety ~ 1850

# Urbain Jean Le Verrier 1811 - 1877

## stabilita Sluneční soustavy 1839 - 1841



**Le Verrier:**

**chemik, astronom, matematik**

A large, stylized handwritten signature of Urbain Jean Le Verrier in black ink. The signature is written in a cursive style, with the first letters of the first and last names being prominent.

220

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

SUR LES

VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS ELLIPTIQUES

DES SEPT PLANÈTES PRINCIPALES :

MERCURE, VÉNUS, LA TERRE, MARS, JUPITER, SATURNE ET URANUS;

PAR M. LE VERRIER [\*].

1. L'orbite d'une planète qui circulerait seule autour du Soleil serait une ellipse ayant l'un de ses foyers au centre d'attraction. Cette orbite aurait une forme, une position invariables; et elle serait complètement déterminée par son grand axe, son excentricité, la longitude du périhélie, l'inclinaison de son plan sur un plan de position donnée, et la longitude de son nœud.

La présence de plusieurs planètes autour du Soleil rend la détermination de leurs mouvements beaucoup moins simple. Elles agissent les unes sur les autres, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse des carrés de leurs distances respectives; et par là elles sont sans cesse entraînées hors de l'ellipse qu'elles décriraient si elles n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil. On parvient toutefois à représenter facilement leur marche par les considérations suivantes. Admettons qu'à une époque donnée l'action perturbatrice des planètes vienne à cesser sur l'une d'elles; à l'instant elle se mettra en mouvement sur une ellipse dont les éléments différeront en général de ceux de l'ellipse primitive. Il

[\*] Cet article ne doit être considéré que comme un extrait détaillé du Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences, en septembre 1839, et qui sera bientôt publié en entier dans la *Connaissance des Temps*.

# Le Verrier Stabilita Sluneční soustavy

La détermination des éléments variables des orbites offre encore un intérêt tout particulier, en ce qu'elle seule peut nous permettre de juger si notre système planétaire réunit quelques conditions de stabilité. Malheureusement la question n'est susceptible de solution que par les méthodes d'approximation. On se fonde sur ce que les masses perturbatrices, les excentricités et les inclinaisons respectives des orbites étant fort petites, on peut développer les fonctions perturbatrices en séries ordonnées suivant les puissances et les produits de ces quantités. Ce développement étant admis, et en laissant de côté les *variations périodiques* qui ne font osciller les éléments qu'entre d'étroites limites, on reconnaît que les grands axes sont constants. La démonstration comprend les termes qui dans *la fonction perturbatrice* sont du premier et du second ordre, par rapport aux masses; et elle s'étend à toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. Mais comme elle repose sur

analýza dráhových  
elementů planet, výpočet  
poruch

10. Donnons d'abord les éléments de notre système planétaire, tels que l'observation les fournit pour une origine du temps fixée au 1<sup>er</sup> janvier 1800 :

	MASSES.	EXCENTRICITÉS.	LONGITUDES des périhélias.	INCLINAISONS.	LONGITUDES des nœuds ascend.
MERCURE .....	$\frac{1}{1081708}$	0,205 616	74°20' 6"	7° 0' 5",9	45°57' 9"
VÉNUS.....	$\frac{1}{4071316}$	0,006 862	128 43 6	3 23-28,5	74 51 41
LA TERRE.....	$\frac{1}{114712}$	0,016 792	99 30 29	0 0 0,0	0 0 0
MARS.....	$\frac{1}{1810137}$	0,093 217	332 22 51	1 51 6,2	47 59 38
JUPITER.....	$\frac{1}{1073}$	0,048 162	11 7 38	1 18-51,6	98 25 45
SATURNE.....	$\frac{1}{1313}$	0,056 150	89 8 20	2 29 35,9	111 56 7
URANUS.....	$\frac{1}{17811}$	0,046 611	167 30 24	0 46 28,0	72 59 21

hmotnost a dráhové  
elementy planet

U. J. LeVerrier.: Variations Séculaires des éléments elliptiques des sept planètes. Mercure, Vénus, La Terre...Uranus... ; Journal de Mathématique 5 (1840) , p. 220 - 254.

# Le Verrier

$$h = e \cos \omega, l = e \sin \omega$$

Si dans l'équation (13) nous mettons pour  $h, l, h', l', \dots$  leurs valeurs  $e \sin \omega, e \cos \omega, e' \sin \omega', e' \cos \omega', \dots$  puis que nous supposions  $\omega = \omega' = \omega'', \dots$  ces angles disparaîtront du premier membre qui deviendra un carré parfait; et en extrayant sa racine carrée, et considérant les sept planètes simultanément, on trouvera

$$m\sqrt{a}Ne + m'\sqrt{a'}N'e' + m''\sqrt{a''}N''e'' + m'''\sqrt{a'''}N'''e''' + \dots \\ + m^{v_1}\sqrt{a^{v_1}}N^{v_1}e^{v_1} = \text{constante.}$$

**15.** La détermination des *maxima* et des *minima* des excentricités, et celle des époques correspondantes, sont impossibles d'une manière générale. Mais lorsqu'on connaît l'époque approximativement, il suffit de développer les cosinus et les sinus des formules du § 12 proportionnellement aux puissances du temps pour arriver sous forme algébrique à une solution rigoureuse du problème.

U. J. LeVerrier.: Variations Séculaires des éléments elliptiques des sept planètes....; Journal de Mathématique **5** (1840), p. 244, 246.

# Le Verrier

## MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *Sur les variations séculaires des orbites des planètes; par M. LEVERRIER.* — Extrait par l'auteur.

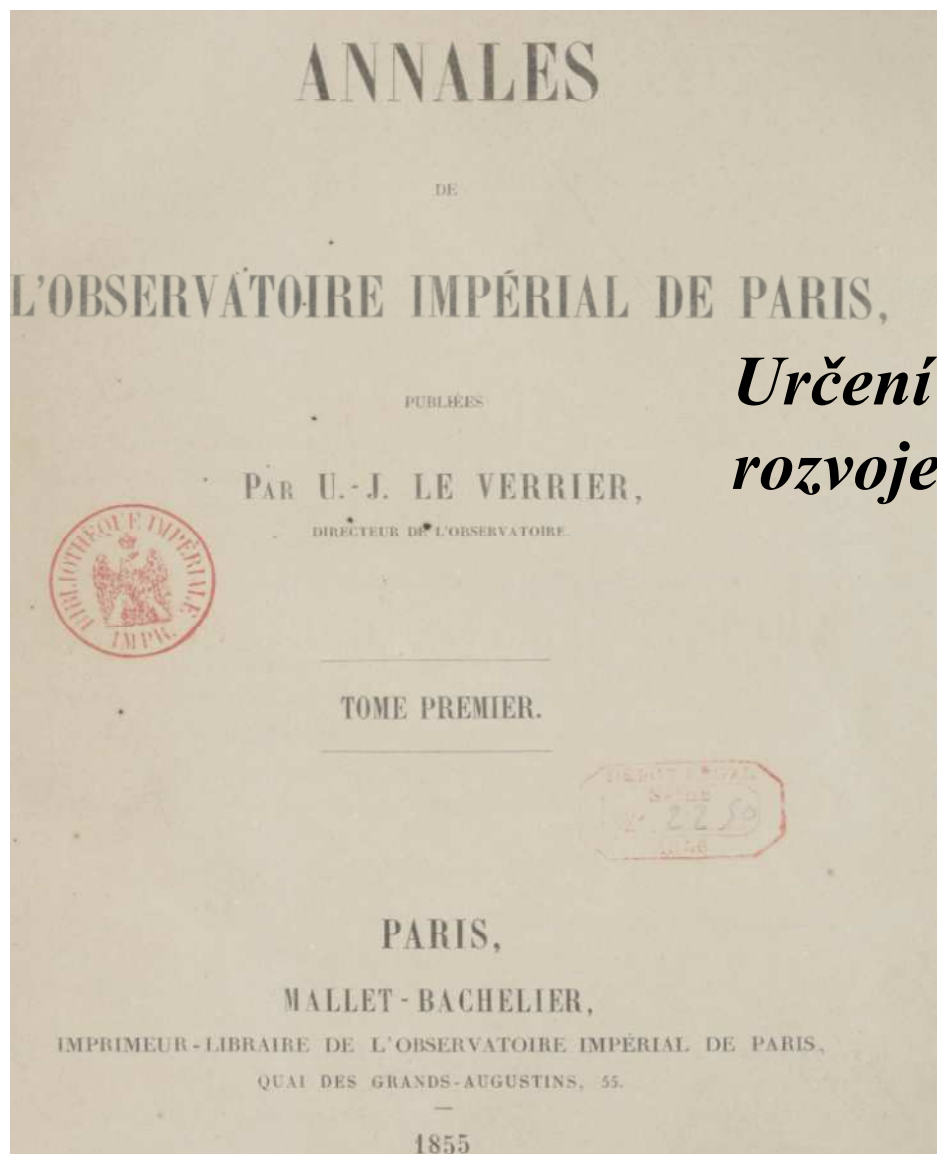
(Commissaires, MM. Arago, Savary, Liouville.)

« L'action perturbatrice que les planètes exercent les unes sur les autres altère incessamment les éléments des orbites elliptiques qu'elles décrivent autour du Soleil. La détermination des variations séculaires qui en résultent offre le plus grand intérêt; elle seule peut fournir les données nécessaires pour calculer avec exactitude les positions des planètes dans le siècle à venir; elle seule peut nous apprendre si notre système réunit quelques conditions de stabilité.

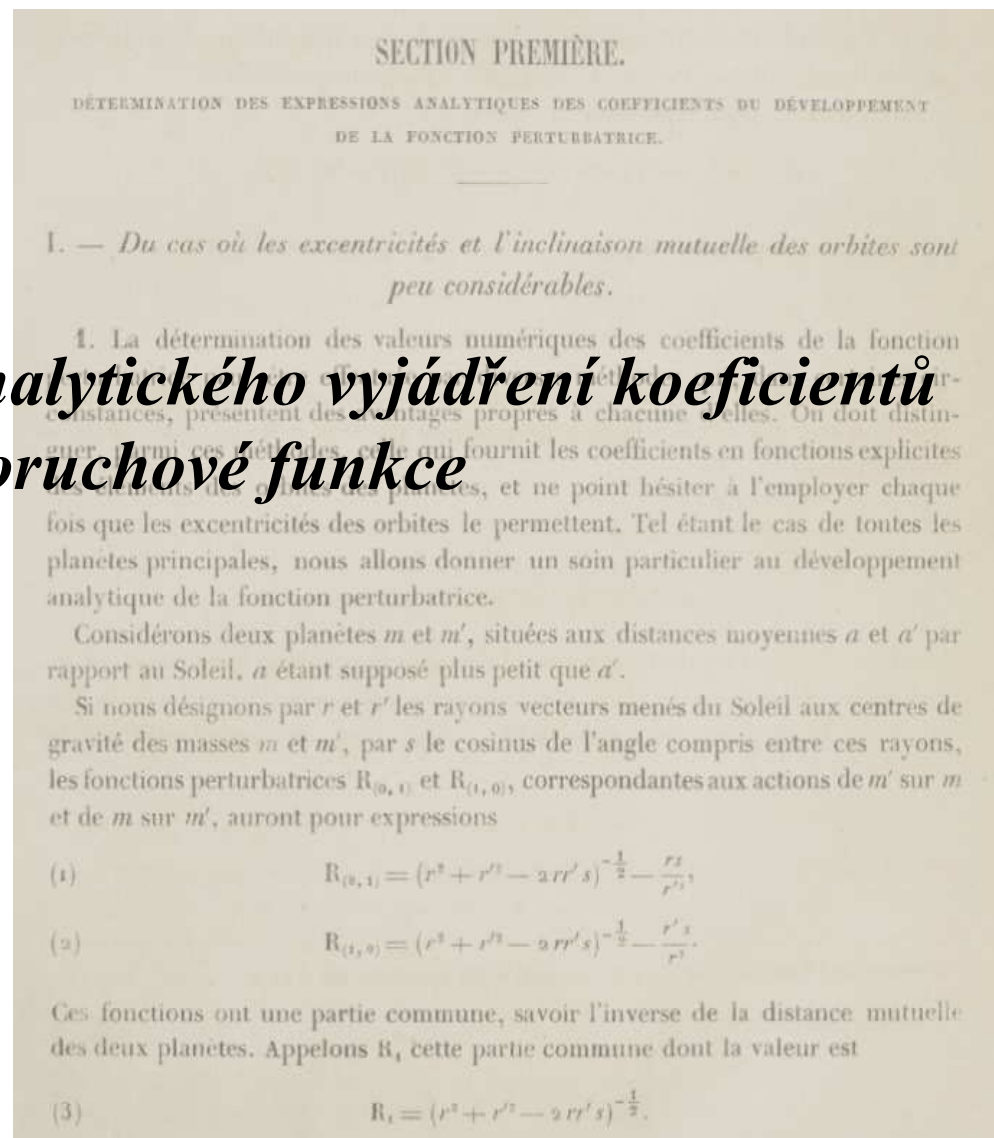
U. J. LeVerrier.: Sur les variations séculaires des orbites des planètes; Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 9 (1839), p. 372 - 373.



# Le Verrier - Stabilita Sluneční soustavy 1855 - 56



*Určení analytického vyjádření koeficientů rozvoje poruchové funkce*



U. J. Le Verrier:.. Annales de l'Observatoire impérial de Paris 1 (1855), p. 258. Détermination des expressions analytiques des coefficients du développement de la fonction perturbatrice.

# Le Verrier - poruchová funkce

rozvoj do vyšších řádů

$$R = m' \sum_{i,j} L_i^j C_i \cos(i_1 l + i_2 l' + i_3 g + i_4 g' + i_5 h + i_6 h')$$

$m'$  ... hmotnost rušícího tělesa,

$L_i^j$  Le Verrierovy koeficienty,

$C_i$  funkce výstřednosti, sklonu drah

$l, g, h, l', g', h'$  dráhové elementy

rušeného a rušícího tělesa

$l$ ...střední anomálie  $M$ ,

$g$ ...argument šířky perihelia  $\omega$ ,

$h$ ...délka výstupného uzlu  $\Omega$

výpočet  $R \sim$  elementy drah těles

\*oprava chyb z prvních článků 1845-46

\*U. J. Le Verrier: Annales de l'Observatoire impérial de Paris 1 (1855), p. 258. Détermination des expressions analytiques des coefficients du développement de la fonction perturbatrice.

Or les valeurs numériques des coefficients  $V^{(i)}$ ,  $V_1^{(i)}$ , ... sont données, dans les différentes lignes de la Table pour les diverses valeurs de  $i$ . Pour la valeur 7 de cet indice, nous trouvons

$$(22)^{(7)} = -24360 A^{(7)} + 360 A_1^{(7)} + 452 A_2^{(7)} - 18 A_3^{(7)} - 12 A_4^{(7)}.$$

On remarquera que l'expression (28)<sup>(7)</sup> dépend des mêmes coefficients.

On doit encore prendre garde que pour éviter les fractions, dans certains cas, nous avons, au lieu des coefficients eux-mêmes, donné leurs valeurs multipliées par un nombre, toujours fort simple. Ainsi, par exemple, dans l'expression de (31)<sup>(6)</sup>, nous avons donné les coefficients de  $4V^{(6)}$  au lieu de ceux de  $V^{(6)}$ .

8. Termes de l'ordre zéro. Termes des ordres deux, quatre et six, et de même argument que les termes de l'ordre zéro.

$$\begin{aligned} R_1 = & \left\{ (1)^{(0)} + (2)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (3)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^4 + (4)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^6 + (5)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^8 \left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (6)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{10} \right. \\ & + (7)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{12} + (8)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{14} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 + (9)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{16} \left(\frac{e'}{2}\right)^4 + (10)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{18} \left(\frac{e'}{2}\right)^6 \\ & + (11)^{(0)} \eta^2 \\ & + (12)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^2 + (13)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^4 \eta^2 + (14)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^6 \eta^2 + (15)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^8 \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^2 + (16)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^{10} \eta^2 \\ & + (17)^{(0)} \eta^4 + (18)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^4 + (19)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^4 \eta^4 + (20)^{(0)} \eta^6 \left. \right\} \cos(i'l - i\lambda) \\ & + \left\{ (21)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right) + (22)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right) + (23)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^3 + (24)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^5 \left(\frac{e'}{2}\right) \right. \\ & + (25)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^3 + (26)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^5 + (27)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^7 \eta^2 + (28)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 \\ & + (29)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 + (30)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^5 \eta^2 \left. \right\} \cos[(i+1)l' - (i+1)\lambda - \omega' + \omega] \\ & + \left\{ (31)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 + (32)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^5 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 + (33)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^7 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \right. \\ & + (34)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 \left. \right\} \cos[(i+2)l' - (i+2)\lambda - 2\omega' + 2\omega] \\ & + (35)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \cos[(i+3)l' - (i+3)\lambda - 3\omega' + 3\omega] \\ & + \left\{ (36)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 + (37)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^5 \eta^2 + (38)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^7 \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 \right. \\ & + (39)^{(0)} \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^4 \left. \right\} \cos[i'l - i\lambda + 2\omega - 2\omega'] \end{aligned}$$



# Le Verrier - poruchová funkce

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ (40)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right) \eta^2 + (41)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \left(\frac{e'}{2}\right) \eta^2 + (42)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^2 \right. \\
 & \quad \left. + (43)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right) \eta^4 \right\} \cos [(i-1)\lambda' - (i-1)\lambda + \varpi' + \omega - 2\tau'] \\
 & + \left\{ (44)^{(i)} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^2 + (45)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^2 + (46)^{(i)} \left(\frac{e'}{2}\right)^4 \eta^2 \right. \\
 & \quad \left. + (47)^{(i)} \left(\frac{e'}{2}\right)^2 \eta^4 \right\} \cos [(i-2)\lambda' - (i-2)\lambda + 2\varpi' - 2\tau'] \\
 & + (48)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right)^3 \left(\frac{e'}{2}\right) \eta^2 \cos [(i+1)\lambda' - (i+1)\lambda - \varpi' + 3\omega - 2\tau'] \\
 & + (49)^{(i)} \left(\frac{e}{2}\right) \left(\frac{e'}{2}\right)^3 \eta^2 \cos [(i-3)\lambda' - (i-3)\lambda + 3\varpi' - \omega - 2\tau'].
 \end{aligned}$$

Les coefficients  $(1)^{(i)}, (2)^{(i)}, \dots$ , sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1)^{(i)} &= (1), (2)^{(i)} = (2), (3)^{(i)} = (3), (4)^{(i)} = (4), (5)^{(i)} = (5), (6)^{(i)} = (6), (7)^{(i)} = (7), \\
 (8)^{(i)} &= (8), (9)^{(i)} = (9) \text{ et } (10)^{(i)} = (10), \text{ en posant dans les fonctions} \\
 & (1), (2), (3), \dots, h = i \text{ et } K^{(i)} = A^{(i)}. \\
 (11)^{(i)} &= (1), (12)^{(i)} = (2), (13)^{(i)} = (3), (14)^{(i)} = (4), (15)^{(i)} = (5), (16)^{(i)} = (6), \text{ en} \\
 & \text{posant } h = i \text{ et } K^{(i)} = -E^{(i)}. \\
 (17)^{(i)} &= (1), (18)^{(i)} = (2), (19)^{(i)} = (3), \text{ en posant } h = i \text{ et } K^{(i)} = G^{(i)}. \\
 (20)^{(i)} &= (1), \text{ en posant } h = i \text{ et } K^{(i)} = -H^{(i)}. \\
 (21)^{(i)} &= (51), (22)^{(i)} = (52), (23)^{(i)} = (53), (24)^{(i)} = (57), (25)^{(i)} = (58), (26)^{(i)} = (59), \\
 & \text{en posant } h = -i \text{ et } K^{(i)} = A^{(i)}. \\
 (27)^{(i)} &= (51), (28)^{(i)} = (52), (29)^{(i)} = (53), \text{ en posant } h = -i \text{ et } K^{(i)} = -E^{(i)}. \\
 (30)^{(i)} &= (51), \text{ en posant } h = -i \text{ et } K^{(i)} = G^{(i)}. \\
 (31)^{(i)} &= (98), (32)^{(i)} = (101), (33)^{(i)} = (102), \text{ en posant } h = -i \text{ et } K^{(i)} = A^{(i)}. \\
 (34)^{(i)} &= (98), \text{ en posant } h = -i \text{ et } K^{(i)} = -E^{(i)}. \\
 (35)^{(i)} &= (129), \text{ en posant } K^{(i)} = A^{(i)}. \\
 (36)^{(i)} &= (21), (37)^{(i)} = (22), (38)^{(i)} = (23), \text{ en posant } h = -(i-2) \text{ et } K^{(i)} = \frac{1}{2} B^{(i-1)}. \\
 (39)^{(i)} &= (21), \text{ en posant } h = -(i-2) \text{ et } K^{(i)} = -L^{(i)}. \\
 (40)^{(i)} &= (51), (41)^{(i)} = (52), (42)^{(i)} = (53), \text{ en remplaçant } i \text{ par } -i \text{ et posant} \\
 & h = -(i-2) \text{ et } K^{(i)} = \frac{1}{2} B^{(i-1)}.
 \end{aligned}$$

Expressions algébriques des fonctions (1), (2), (3), ..., (154).

16. L'usage de ces fonctions a été exposé dans l'article 7. On a expliqué, en outre, comment leur calcul sera considérablement abrégé au moyen des Tables données dans l'Addition II.

$$\begin{aligned}
 (1) &= \frac{1}{2} K^{(i)}. \\
 (2) &= -2h^2 K^{(i)} + K_1^{(i)} + K_2^{(i)}. \\
 (3) &= -2i^2 K^{(i)} + K_1^{(i)} + K_2^{(i)}. \\
 (4) &= \frac{1}{8} (-9h^4 + 16h^2) K^{(i)} - h^2 K_1^{(i)} - 2h^2 K_2^{(i)} + 3K_3^{(i)} + 3K_4^{(i)}. \\
 (5) &= 8i^2 h^2 K^{(i)} + (2 - 4i^2 - 4h^2) K_1^{(i)} + (14 - 4i^2 - 4h^2) K_2^{(i)} + 24K_3^{(i)} + 12K_4^{(i)}. \\
 (6) &= \frac{1}{8} (-17i^2 + 16i^4) K^{(i)} + (3 - 3i^2) K_1^{(i)} + (9 - 2i^2) K_2^{(i)} + 9K_3^{(i)} + 3K_4^{(i)}. \\
 (7) &= \frac{1}{18} (-43i^2 + 49i^4 - 16i^6) K^{(i)} - \frac{1}{4} i^2 K_1^{(i)} \\
 & \quad + \frac{1}{12} (-11i^2 + 16i^4) K_2^{(i)} - 2i^2 K_3^{(i)} - 4i^2 K_4^{(i)} + 10K_5^{(i)} + 10K_6^{(i)}. \\
 (8) &= \frac{1}{2} (9i^4 - 16i^6) K^{(i)} + \frac{1}{4} (-17i^2 + 32i^4) K_1^{(i)} + \frac{1}{4} (-89i^2 + 48i^4) K_2^{(i)} \\
 & \quad + (36 - 54i^2) K_3^{(i)} + (156 - 36i^4) K_4^{(i)} + 210K_5^{(i)} + 90K_6^{(i)}. \\
 (9) &= \frac{1}{2} (17i^4 - 16i^6) K^{(i)} + \frac{1}{4} (24 - 89i^2 + 64i^4) K_1^{(i)} + \frac{1}{4} (312 - 305i^2 + 48i^4) K_2^{(i)} \\
 & \quad + (288 - 90i^2) K_3^{(i)} + (456 - 36i^2) K_4^{(i)} + 330K_5^{(i)} + 90K_6^{(i)}. \\
 (10) &= \frac{1}{18} (-91i^2 + 73i^4 - 16i^6) K^{(i)} + \frac{1}{12} (120 - 139i^2 + 32i^4) K_1^{(i)} \\
 & \quad + \frac{1}{12} (600 - 227i^2 + 16i^4) K_2^{(i)} + (100 - 14i^2) K_3^{(i)} + (100 - 4i^2) K_4^{(i)} \\
 & \quad + 50K_5^{(i)} + 10K_6^{(i)}. \\
 (11) &= -2h K^{(i)} - K_1^{(i)}. \\
 (12) &= (h - 5h^3 + 4h^5) K^{(i)} + \frac{1}{2} (3 - 7h + 4h^3) K_1^{(i)} + (-2 - 2h) K_2^{(i)} - 3K_3^{(i)}.
 \end{aligned}$$

U. J. Le Verrier: Annales de l'Observatoire impérial de Paris 1 (1855), p. 278, 299. Détermination des expressions analytiques des coefficients du développement de la fonction perturbatrice.

# Le Verrier

## Stabilita Sluneční soustavy - 1856

ANNALES

DE

L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

PUBLIÉES

PAR U. - J. LE VERRIER,  
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

TOME SECOND.

PARIS,

MALLET-BACHELIER,  
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,  
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1856

- přepočít vzájemných poruch mezi planetami při upřesnění jejich hmotností

- Laplace nelineární členy v řadách zanedbával, Le Verrier nikoliv

- zahrnutí vyšších členů poruchových řadách při vyjádření dráhových sklonů a výstředností

- započtení Neptunu, str. 163, 168

U. J. Le Verrier: Annales de l'Observatoire impérial de Paris 2 (1856).

# Le Verrier

## CHAPITRE IX. — *Inégalités séculaires des éléments des orbites des huit principales planètes. — Des effets de la précession et de la nutation.*

### I. — *Des inégalités séculaires, développées suivant les puissances du temps.*

Termes de la fonction perturbatrice qui ne contiennent point le temps explicitement, jusqu'au sixième ordre.....	87
Variations <i>annuelles</i> qui en résultent dans les éléments des orbites.....	89
Application aux huit principales planètes.....	91
Variations annuelles de leurs éléments.....	100
Mouvement de l'écliptique en ayant égard aux termes dépendants des produits des masses.....	103

### II. — *Expressions générales des inégalités séculaires, résultant de l'intégration complète des équations différentielles.*

Changement des variables dans les expressions différentielles et dans la fonction perturbatrice.....	105
Variations séculaires des excentricités et des longitudes des périhélies des planètes principales, Neptune excepté, en se bornant aux termes d'ordre inférieur.....	114
Formules numériques.....	147
Conséquences relativement à la stabilité du système.....	148
* Variations séculaires des inclinaisons et des longitudes des nœuds des planètes principales, Neptune excepté, en se bornant aux termes d'ordre inférieur.....	153
Formules numériques.....	162
* Conséquences relativement à la stabilité du système.....	163
* Extension des résultats précédents au cas où l'on considère les termes qui, dans les équations différentielles, sont du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.....	165
* Extension à la planète Neptune.....	168

# Le Verrier

Extension des résultats précédents au cas où l'on considère les termes qui, dans les équations différentielles, sont du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons..... 165

**16.** Nous avons intégré les équations différentielles dont dépendent les inégalités séculaires des orbites, en négligeant les termes qui sont du troisième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. Nous pouvons actuellement nous proposer d'avoir égard à ces termes, de reconnaître si, par la méthode des approximations successives, les intégrales se développent effectivement en séries assez convergentes pour qu'on puisse répondre de la stabilité du système planétaire; et, si cette condition est remplie, de donner aux intégrales toute l'exactitude

*„Integrovali jsme diferenciální rovnice, na kterých závisí sekulární nerovnosti drah, při zanedbání členů třetího řádu, pokud jde o výstřednosti a dráhové sklony. Můžeme nyní tyto členy zvažovat, zachytit je úspěšnými aproximacemi. Integrovaly mohou být rozvíjeny do řad dostatečně konvergujících a odtud lze vyvozovat závěry týkající se stability Sluneční soustavy.“*

U. J. Le Verrier: Recherches astronomiques. Annales de l'Observatoire de Paris 1856, p. 165

# Le Verrier - Stabilita Sluneční soustavy

- přesnější teorie pohybu planet → **nová formulace stability Sluneční soustavy\***
- **prohloubení rozboru:** vznik sekulárních rezonancí může vést k narušení stability
- **závislost na počátečních podmínkách**, amplitudy poruch nesmí být příliš velké

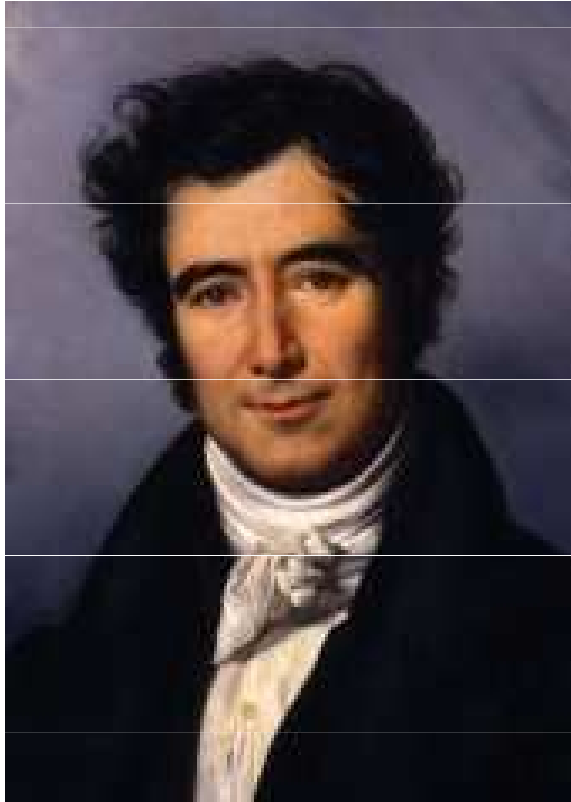
Další zdokonalení Spiru Haretu (1854 - 1915), výpočet poruch do vyšších řádů při upřesněných relativních hmotnostech planet.

S. Haretu: On the Invariability of the major axes of the orbits described by the planets. Paris 1878.

\*J. Laskar, J: The stability of the solar system from Laplace to the present. In R. Taton, C. Wilson: Planetary astronomy from the Renaissance to the rise of astrophysics, p. 240 - 248.



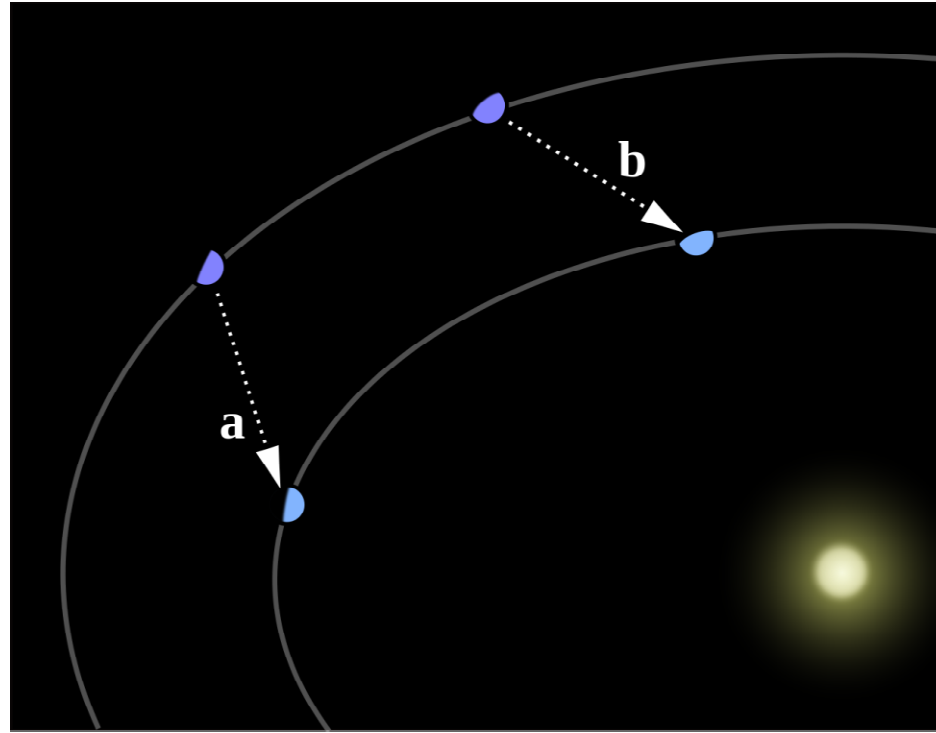
# Le Verrier - problém Uranu (Neptun)



Dominique François **Arago** (1786 - 1853) léto 1845 → **Le Verrier**  
řešení problému Uranu



# Problém Uranu

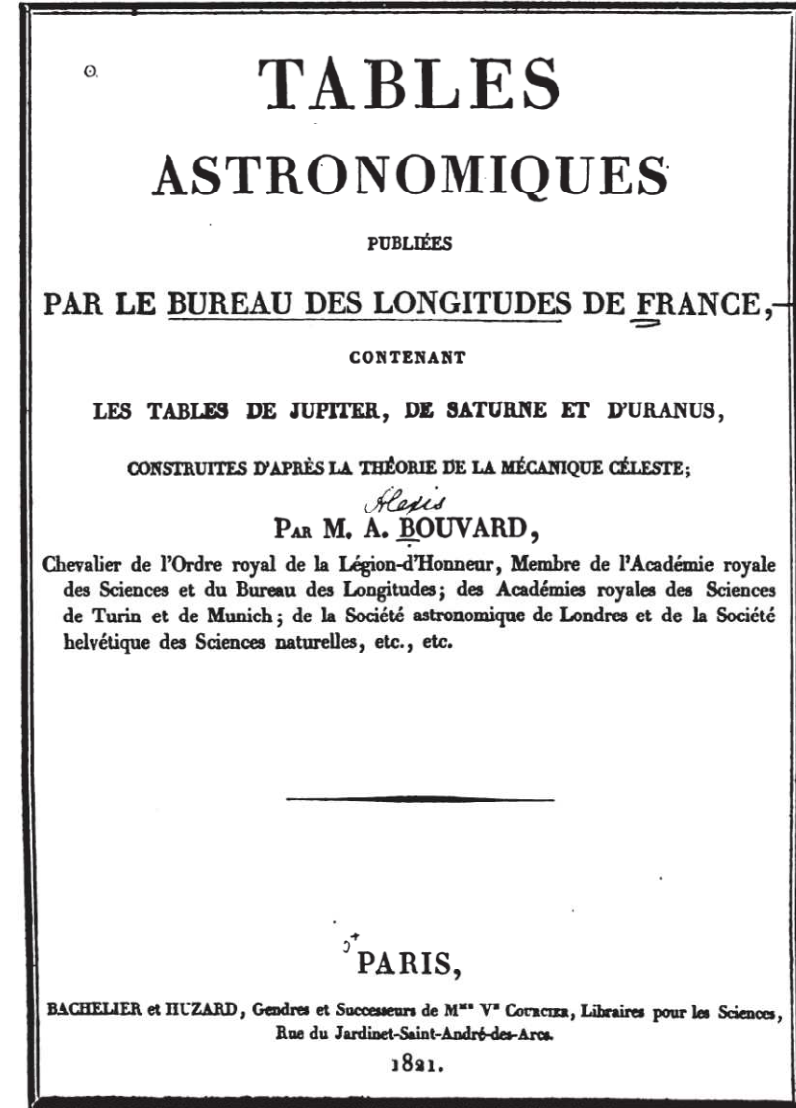


pozorování Uranu, zrychlování pohybu v letech 1781 - 1830,  
od roku 1831 zpomalování

# Alexis Bouvard 1767 - 1843



pozorování Uranu: 19 **starých** -  
předobjevových, např. J. Flamsteeda, J.  
Bredlyho, T. Mayera, Ch. Lemonniera  
**nová** přesnější, použitá pro teorii pohybu a  
výpočet tabulek  
přesnost určování poloh planet  
18. stol. 5“ - 6“ , 19. stol. 3 “



A. Bouvard: Tables astronomiques publiées par le bureau des longitudes de France, contenant les tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus construites d'après la mécanique céleste. Bachelier&Hanzard, Paris 1821.

# Bouvard

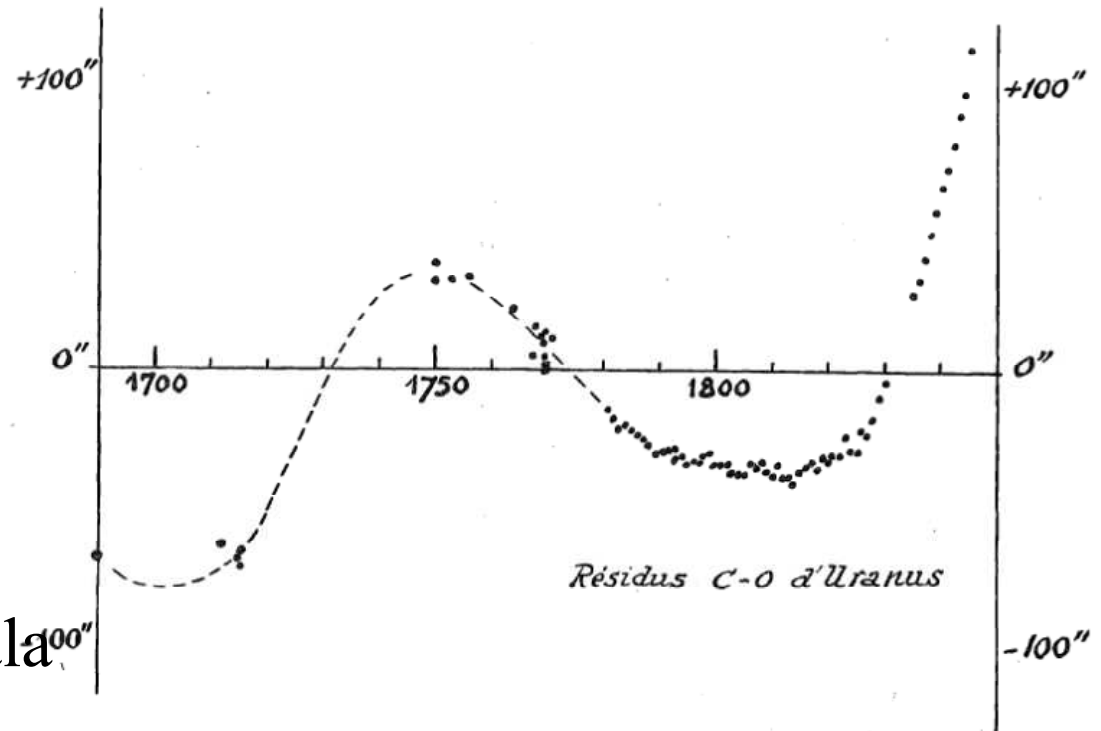
**stará pozorování** → výpočet dráhových elementů → teoretické polohy  
→ **velké nepřesnosti**, nevysvětlitelné pozorovacími chybami

**nová pozorování** → výpočet dráhových elementů → zlepšení teoretické polohy → **nesoulad se starými pozorováními**

**teorie Uranu r. 1781 - 1820: 5"**,  
stará pozorování se rozcházela  
o (40" - 70"), tedy (8 - 14)krát  
převyšovaly chyby pozorovatelů

r. 1821 *opozice Neptunu*  
*vzhledem k Uranu*

od r. 1832 výrazné zpomalování  
pohybu Uranu, teorie nevyhovovala



A. Danjon: Le centenaire de la découverte de Neptune. Ciel et Terre, **62**  
(1946), p. 369 - 383.

# Předobjevová pozorování Uranu

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

No. 582.

Recherches sur les mouvements d'Uranus  
par U. J. Le Verrier. (Beschluß).

1712 et 1715. Quatre observations concordantes faites par <i>Flamsteed</i> .....	+ 5,5
1750. Deux observations de <i>Lemonnier</i> .....	- 7,4
1753 et 1756. Deux observations, très précises faites par <i>Mayer</i> et <i>Bradley</i> .....	- 4,0
1764. Une observation faite par <i>Lemonnier</i> ...	+ 4,9
1768 et 1769. Huit observations faites par <i>Le-</i> <i>monnier</i> .....	+ 3,7

větší počet předobjevových pozorování pozorovatelé, (Lemonnier), nepochopili, že jde o objekt ze sluneční soustavy, zpravidla pozorovali průchod přes poledník, určovali zenitovou vzdálenost  $\rightarrow \alpha, \delta$  - neprovedli porovnání poloh...

U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements d'Uranus.

Astronomische Nachrichten **582** (1846), p. 85 - 92.

# Le Verrier: historie 1845 - 1846

- **10. listopad 1845** - poruchy Uranu způsobené Jupiterem a Saturnem neobjasňují nepravidelnosti jeho pohybu
- **1. červen 1846** - vysvětlení → zamítnutí jiných hypotéz, existence vnější planety, její poloha pro 1.1.1847, propočítání poruch při  $M_N = (1/10\,000 - 1/4700) M_{S1}$
- **31. srpen 1846** - dráhové elementy nové planety, její hmotnost  $M_N = 1/9300 M_S$ , poloha - hel. délka, jasnost  $\approx 8$  mag, disk 3“  
extrémně rozsáhlé výpočty, rozvinutí teorie poruch, Jupiter, Saturn, **neznámá planeta, propočítání jejího poruchového vlivu**, určena její poloha z analýzy dráhového pohybu Uranu, postupně narůstající přesnost řešení → 1°

**interpretační problém**, řešení nerovností pohybu Uranu

**přímý problém**, propočítání poruchových sil neznámé planety - Neptunu

**inverzní problém**, určení parametrů Neptunu - hmotnosti, dráh. elem.

# Le Verrier - 10 . 11. 1845 první práce

## MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ASTRONOMIE. — *Premier Mémoire sur la théorie d'Uranus; par*  
M. U.-J. LE VERRIER.

(Commissaires, MM. Arago, Damoiseau, Sturm, Liouville.)

« Il existe, aux confins de notre système planétaire, un astre dont on n'a pu, jusqu'à ce jour, calculer le mouvement avec exactitude. Uranus, dès l'époque de sa découverte, embarrassa les astronomes par la lenteur de son mouvement propre; et ce ne fut pas sans peine qu'on parvint à s'assurer que l'astre, reconnu par Herschel, était une nouvelle planète. Cette première difficulté ayant été surmontée, on arriva, en peu d'années, à connaître les éléments du mouvement elliptique d'Uranus d'une manière passable; d'autant plus qu'on put s'aider d'observations faites longtemps avant la découverte. Plus tard, lorsqu'une série d'observations exactes, embrassant trente à quarante années, eut été faite, lorsque les perturbations dues aux actions de Jupiter et de Saturne eurent été calculées, on reprit la théorie d'Uranus, et l'on dut croire qu'avec ces secours on atteindrait à la perfection désirable. Mais les résultats de ces recherches ont été loin de répondre aux espérances qu'on avait conçues; et chaque jour Uranus s'écarte de plus en plus de la route qui lui est tracée dans les Éphémérides.

\*U. J. Le Verrier: Premier Mémoire sur la théorie d'Uranus.: Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **21** (1845), p.1050 - 1055.



# Le Verrier - 1. 6. 1846 druhá práce

## Výzkum pohybu Uranu

ASTRONOMIE. — *Recherches sur les mouvements d'Uranus* ;  
par M. U.-J. LE VERRIER.

« Je me propose, dans le Mémoire dont j'ai l'honneur de présenter un extrait à l'Académie, d'étudier la nature des irrégularités du mouvement d'Uranus; de remonter à leur cause, en cherchant à découvrir, dans la marche qu'elles affectent, la direction et la grandeur de la force qui les produit.

» La théorie d'Uranus préoccupe aujourd'hui les astronomes. Elle a donné lieu à beaucoup d'hypothèses plus ou moins plausibles, mais qui, dénuées de toute considération géométrique, ne pouvaient avoir de valeur réelle. Plusieurs Sociétés ont même proposé cette théorie pour sujet de concours. Je crois donc, en raison de l'importance de la question, devoir reprendre rapidement son histoire: l'Académie jugera mieux du but de mon travail, de la route que j'ai parcourue et des résultats auxquels je suis arrivé.

» On possédait, en 1820, quarante années d'observations méridiennes régulières d'Uranus. La planète avait, en outre, été observée dix-sept fois, depuis 1690 jusqu'en 1771, par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Ces astronomes l'avaient notée comme étoile de sixième grandeur. D'un autre côté, les expressions analytiques des perturbations que Jupiter et Saturne produisent sur Uranus, se trouvaient développées dans le tome III de la *Mécanique céleste*. Il était permis d'espérer qu'en s'aidant de toutes ces données, on parviendrait à construire des Tables exactes du mouvement de la planète; c'est ce qu'entreprit M. Bouvard, membre de l'Académie des Sciences. Mais il rencontra des difficultés imprévues.

\* U. J. Le Verrier: *Recherches sur les mouvements d'Uranus*:. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **22** (1846), p. 907 - 918.

# Le Verrier - druhá práce

Srovnání pozorovaných a vypočítaných poloh Uranu -  
**pozorování nejsou v souladu s teorií**

*\* „Soustředil jsem se na seriózní objasnění rozdílů vypočítaných a pozorovaných poloh Uranu způsobených působící neznámou silou...“*

Vyvrácení hypotéz 1 - 3 nepravidelností pohybu Uranu:

1. Velký měsíc Uranu
2. Komet
3. Meziplanetární hmota
- 4. Neznámá planeta**

Hypotéza o existenci rušící planety → zavedení oprav k dráhovým elementům Uranu, započtení vlivu Neptunu - inverzní problém poruch, předběžné výsledky.

\*U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements d'Uranus:.. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **22**, (1846), 907 - 918.

# Le Verrier - druhá práce

« *Est-il possible que les inégalités d'Uranus soient dues à l'action d'une planète, située dans l'écliptique, à une distance moyenne double de celle d'Uranus? Et, s'il en est ainsi, où est actuellement située cette planète? Quelle est sa masse? Quels sont les éléments de l'orbite qu'elle parcourt?* »

Le Verrier v \*: „ *Je možné, že nerovnosti Uranu by mohly být způsobeny působením neznámé planety nalézající se na ekliptice v přibližně dvojnásobné vzdálenosti od Slunce než Uran. Jestliže ano, kde se planeta aktuálně nachází? Jaká je její hmotnost? Jaké jsou její dráhové elementy?* “

\*U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements d'Uranus:. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **22**, (1846), 907 - 918.

# Le Verrier - 31.8.1846 třetí práce

ASTRONOMIE. — *Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus. — Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle; par M. U.-J. LE VERRIER.*

**O planetě vyvolávající pozorované anomálie v pohybu Uranu.**

**Určení její hmotnosti, dráhy a současné polohy.**

« J'ai eu l'honneur, dans la séance du 1<sup>er</sup> juin dernier, de communiquer à l'Académie les principaux résultats du travail que j'ai entrepris sur la théorie d'Uranus. J'ai prouvé qu'il n'était pas possible de représenter les observations de cet astre, dans le système de la gravitation universelle, en supposant qu'il ne fût soumis qu'aux actions réunies du Soleil et des planètes connues. Toutes les anomalies observées s'expliquent, au contraire, dans leurs moindres détails, par l'influence d'une nouvelle planète qui serait située au delà d'Uranus, et qui parcourrait une orbite déterminée.

\*U. J. Le Verrier.: Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus: Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **23** (1846), p. 428 - 438.

# Le Verrier - třetí práce

## nová pozorování Uranu, velikost rádius vektoru

- Airy → reakce na **druhou práci** - dopis Le Verrierovi - zahrnutí korekcí v rádius vektoru - již provedeno
- v kvadraturách úhel Uran - Země - Slunce pravý, při pozorováních registrujeme poruchy rádius vektoru Uranu
- rozdíly pozorované a propočítané geocentrické délky jsou vyvolány jak chybami teorie v heliocentrické délce tak i v délce rádius vektoru
- při pozorování v kvadraturách se chyby rádius vektoru projevují nejvýrazněji

# Le Verrier - třetí práce, klíčové problémy:

teorie: zahrnutí poruch v délce i ve velikosti rádius vektoru

II. Keplerův zákon  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = konst.$

Le Verrier: *Čím jsou vyvolány poruchy velikostí rádius vektorů Uranu ?  
Jejich proměnnost není způsobena poruchami známých planet.*

Analýza pomocí dobového vztahu\* .

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\Delta r) + \frac{\mu}{r^3} r\Delta r + 2 \int \frac{dR}{dt} + r \frac{dR}{dr} = 0$$

r... délka rádius vektoru, R... poruchová funkce,  $\mu = n^2 a^3$

Sir George Biddell Airy (1801 - 1892)  
královský astronom 1835 - 1881



\*G. B. Airy: *Mathematical Tracts on the Lunar and Planetary Theories.*  
Cambridge University Press, Cambridge 1842, p. 67.



# G. B. Airy - 1838 poruchy velikostí rádius vektoru

## ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N<sup>o</sup>. 349.

Schreiben des Herrn *Airy*, Astronomer Royal, an den Herausgeber.  
Greenwich 1838. Febr. 24.

Dear Sir,

I do not think that it has been remarked that the Tabular Radius Vector of Uranus is considerably in error. Yet it appears certain that it is so. To shew this I will give the results of the observations made at Cambridge in 1833, 1834 and 1835, and at Greenwich in 1836.

The method which has been pursued in reducing the observations is the following. In all these years, every observation has been so reduced as to shew the error of the tables in R. A. (the right ascensions in the Cambridge Observations being diminished by 0<sup>s</sup>14, and those in the Greenwich Observations being reduced to the same equinox) and in N. P. D. The observations have been divided into groups of about 10 each, and the mean error in R. A. and the mean in N. P. D. have been adopted for the mean day in each group. From these, the errors in Longitude and Ecliptic Polar Distance have been formed by means of the factors contained in the Tables N<sup>o</sup>. II in the Appendix to the Greenwich Observations 1836. With the errors in Ecliptic Polar Distance we have nothing further to do here: but those in Longitude are thus treated. An error in Geocentric Longitude depends upon two errors, namely the error in Heliocentric Longitude and the error of the Radius Vector. Consequently from a single Normal Error in Geocentric Longitude we can obtain nothing but an Equation between the error in Heliocentric Longitude and the error of the Radius Vector. Therefore, if we compute from this the error in Heliocentric Longitude, it will have a term depending on the error of the Radius Vector. But the factor of the last term will have different signs according as the observations are before or after opposition. Therefore if we have any other means of judging how the error in Heliocentric Longitude ought to change in this time, we can infer the error of the Radius Vector from the difference of the computed errors in Heliocentric Longitude before and after opposition.

In the following tables, the Tabular Error signifies the excess of the tabular quantity over the observed quantity. Instead of the month and day, I have (for convenience) put the number of the day reckoned from the beginning of the

15r Bd.

year. The sign  $\delta R$  is used to denote the Tabular Error of the Radius Vector of Uranus, expressed in parts of the earth's mean distance from the Sun.

### Normal Tabular Errors of Uranus in Heliocentric Longitude.

1833 day	215	+ 32 <sup>s</sup> 63	+ 90 <sup>s</sup> x $\delta R$
	235	+ 33,13	- 90 x $\delta R$
	265	+ 31,03	- 333 x $\delta R$
	279	+ 32,00	- 418 x $\delta R$
	295	+ 32,24	- 484 x $\delta R$
	323	+ 31,54	- 505 x $\delta R$
1834 day	229	+ 37,87	+ 3 x $\delta R$
	258	+ 37,28	- 255 x $\delta R$
	283	+ 38,23	- 417 x $\delta R$
	312	+ 39,15	- 507 x $\delta R$
	336	+ 39,61	- 489 x $\delta R$
1835 day	215	+ 45,46	+ 165 x $\delta R$
	232	+ 45,48	+ 21 x $\delta R$
	255	+ 44,79	- 183 x $\delta R$
	292	+ 44,81	- 438 x $\delta R$
	326	+ 44,37	- 500 x $\delta R$
	337	+ 45,53	- 488 x $\delta R$
1836 day	203	+ 53,66	+ 290 x $\delta R$
	236	+ 52,62	+ 12 x $\delta R$
	256	+ 52,32	- 165 x $\delta R$
	285	+ 51,69	- 380 x $\delta R$
	307	+ 51,52	- 476 x $\delta R$
	327	+ 52,66	- 503 x $\delta R$

The means for each year are as follows

1833, day 269	+ 32 <sup>s</sup> 10	- 290 <sup>s</sup> x $\delta R$
1834, day 284	+ 38,43	- 333 x $\delta R$
1835, day 276	+ 45,07	- 237 x $\delta R$
1836, day 269	+ 52,41	- 204 x $\delta R$

Considering that  $\delta R$  is a very small quantity and is not likely to vary much between one year and the next, we may, in taking the differences consider it as the same quantity. The difference between 1833 and 1834 may be used for finding the changes in the error of Heliocentric Longitude in the course of the observations of 1833: the difference between 1833 and 1835 will give the change for 1834: the difference between 1834 and 1836 will give the change for 1835: the difference between 1835 and 1836, will give the change for 1836. Thus we find

15

219

Nr. 349.

220

[1833 - 1834]	Change in 380 days	+ 6 <sup>s</sup> 33 - 43 <sup>s</sup> x $\delta R$	[to be used for 1833]
[1833 - 1835]	Change in 737 days	+ 12,97 + 53 x $\delta R$	[to be used for 1834]
[1834 - 1836]	Change in 715 days	+ 13,98 + 129 x $\delta R$	[to be used for 1835]
[1835 - 1836]	Change in 358 days	+ 7,34 + 33 x $\delta R$	[to be used for 1836]

Taking the distance of each Normal Day from the mean of the days for that year, computing the proportional part of the change just given, and applying it to the mean of the Normal Tabular Errors for the year, we have the following.

### Tabular Errors formed by applying the proportional part of the change to the Mean of the Normal Tabular Errors for the year

1833 day	215	+ 31 <sup>s</sup> 20	- 284 <sup>s</sup> x $\delta R$
	235	+ 31,53	- 286 x $\delta R$
	265	+ 32,03	- 290 x $\delta R$
	279	+ 32,27	- 291 x $\delta R$
	295	+ 32,53	- 293 x $\delta R$
	323	+ 33,00	- 296 x $\delta R$
1834 day	229	+ 37,47	- 337 x $\delta R$
	258	+ 37,97	- 335 x $\delta R$
	283	+ 38,41	- 333 x $\delta R$
	312	+ 38,92	- 331 x $\delta R$
	336	+ 39,34	- 329 x $\delta R$
1835 day	215	+ 43,88	- 248 x $\delta R$
	232	+ 44,21	- 245 x $\delta R$
	255	+ 44,66	- 241 x $\delta R$
	292	+ 45,40	- 234 x $\delta R$
	326	+ 46,05	- 228 x $\delta R$
	337	+ 46,26	- 226 x $\delta R$
1836 day	203	+ 51,06	- 210 x $\delta R$
	236	+ 51,73	- 207 x $\delta R$
	256	+ 52,14	- 205 x $\delta R$
	285	+ 52,74	- 203 x $\delta R$
	307	+ 53,19	- 201 x $\delta R$
	327	+ 53,60	- 199 x $\delta R$

These may be considered as true errors, liable to no greater uncertainty than that of the mean of all the observations made in each year, and liable to no sensible relative uncertainty whatever.

Making these equal to the Normal Tabular Errors deduced from observation only, and performing the subtractions so as to make the sign of  $\delta R$  always positive we obtain the following equations

### Physische Beobachtungen des Mars in der Opposition von 1837. (Hiebei ein Steindruck.)

Die fast beispiellos schlechte Witterung, welche den ganzen Herbst und Winter, so wie den größten Theil des Frühlings hindurch beinahe alle astronomischen Beobachtungen vereitelte, hat sich auch unsern Bemühungen, die diesmalige Opposition des

1833	0	= +1 <sup>s</sup> 43 + 374 <sup>s</sup> x $\delta R$
	0	= +1,63 + 196 x $\delta R$
	0	= +1,00 + 43 x $\delta R$
	0	= +0,27 + 127 x $\delta R$
	0	= +0,29 + 191 x $\delta R$
	0	= +1,46 + 209 x $\delta R$
Sum for 1833	0	= +6,08 + 1140 x $\delta R$
1834	0	= +0,40 + 334 x $\delta R$
	0	= -0,69 + 80 x $\delta R$
	0	= +0,18 + 84 x $\delta R$
	0	= -0,23 + 176 x $\delta R$
	0	= -0,27 + 160 x $\delta R$
Sum for 1834	0	= -0,61 + 834 x $\delta R$
1835	0	= +1,58 + 413 x $\delta R$
	0	= +1,27 + 266 x $\delta R$
	0	= +0,13 + 58 x $\delta R$
	0	= +0,59 + 204 x $\delta R$
	0	= +1,68 + 272 x $\delta R$
	0	= +0,73 + 262 x $\delta R$
Sum for 1835	0	= +5,98 + 1475 x $\delta R$
1836	0	= +2,60 + 500 x $\delta R$
	0	= +0,69 + 219 x $\delta R$
	0	= +0,18 + 40 x $\delta R$
	0	= +1,05 + 177 x $\delta R$
	0	= +1,67 + 275 x $\delta R$
	0	= +0,94 + 304 x $\delta R$
Sum for 1836	0	= +7,33 + 1515 x $\delta R$

Thus from the observations of 1833,  $\delta R = -0,00533$   
 1834,  $\delta R = +0,00074$   
 1835,  $\delta R = -0,00405$   
 1836,  $\delta R = -0,00483$

I cannot imagine what has made the difference between the result of the observations of the year 1834 and that of the other years. It is not any error in my computations. The observations shew a systematic difference between the progress of the errors in AR. in the year 1834 and in the other years. I suspect that some difference must have been made in the radius vector used for the computations of the Nautical Almanac in 1834.

If, however, we adopt the mean of the four results, we find  $\delta R = -0,00337$ : that is, the tables of *Bowditch* give the radius vector of Uranus too small by a quantity considerably greater than the moon's distance from the earth. If we adopt the mean of 1833, 1835 and 1836; the error appears to be nearly equal to the diameter of the moon's orbit.

G. B. Airy.

# Le Verrier - výpočet poruchového působení

dráhové elementy Jupiteru, Saturnu, hmotnosti → propočít jejich poruchového působení na Uran:

pro délku, šířku,

$$\mathbf{r\acute{a}dius\ vektor\ } dr = 0,00870 + 0,00336 \cos (l' - l + 354^{\circ} 5' 34'') + \\ 0,00570 \cos (l' - 2l + 73^{\circ} 26' 08'') + 0,00105 \cos (l' - 3l + 269^{\circ} 29' 22'') \\ + 0,00476 \cos (l'' - l + 0^{\circ} 24' 56'')$$

$l, l', l''$  – střední délky Uranu, Saturna a Jupitera

$$l = nt + 173^{\circ} 30' 16''$$

$$l' = n't + 123^{\circ} 05' 29''$$

$$l'' = n''t + 81^{\circ} 52' 19'' .$$

*Inégalités du rayon vecteur.*

$$\delta r = + 0,008.70 \\ + 0,003.36 \cos (304^{\circ}.26'.47'' + 7^{\circ}.56'.10'',482t) \\ + 0,005.70 \cos (209.31.5 + 3.39.4,837t) \\ + 0,001.05 \cos (232.4.3 - 0.38.0,808t) \\ + 0,004.76 \cos (268.46.59 + 26.3.51,074t):$$

# Le Verrier: Uran - Neptun

Počátek času 1.1.1800 00.00 hod., výchozí - dráhové elementy

Bouvarda pro eliptickou dráhu  $a = 19,182\ 729$  au.

$n = 4,284\ 901^\circ$  stř.den.poh.  $e = 0,046\ 611$

$i = 0^\circ\ 46'\ 28''$

z pozorování **1781 - 1820**

Le Verrier: **1690 - 1845**

- kombinoval údaje ze starých a nových pozorování (celkem  $\approx 300$ )

- **nutná zjednodušení při zpracování pozorovacích dat**

- postupná redukce velkého počtu rovnic, seskupení pozorování ve zvolených časových intervalech, v závěru výpočtu řešení celkem 26 rovnic pro  $12 \rightarrow 8 + 1$  neznámých dráhových elementů obou planet, volba 40 různých číselných hodnot - varianty výpočtů

E. A. Grebenikov, J. A. Rjabov: Poiski i otkrytija planet. Nauka, Moskva 1984.

# Le Verrier: Uran - Neptun

kinematika pohybu Uranu, nepravidelnosti v délce, ve velikosti rádius vektoru → stanovení příčiny

hledání synodické oběžné doby Neptunu a opozice v soustavě Uran - Neptun, podstatné pro dynamiku

$$T_{Nsyn} = \frac{1}{\left( \frac{1}{T_{Usid}} + \frac{1}{T_{Nsid}} \right)} = 171,4roku$$

opozice Uran - Neptun r. 1821, → poruchové působení maximální, Uran ( $e = 0,047$ ) v období 1820 → **1840** se blížil k aféliu → délka rádius vektoru narůstala

Uran:  $a = 19$  au.,  $T = 84$  roků,  
 $M_U = 8,7 \cdot 10^{25}$  kg

Neptun:  $a = 30$  au.,  $T = 165$  roků,  
 $M_N = 1,0 \cdot 10^{26}$  kg

# Le Verrier: výpočet Uranu a Neptunu

- nepřesnosti v skutečné délce Uranu
- dráhový sklon hledané planety velmi malý (Uran  $- \frac{3}{4}^\circ$ ), proto zanedbání  $i = 0$ , pohyb planet v rovině ekliptiky,  $R \sim a$
- dráhové elementy Uranu  $a, e, \varepsilon, \omega$  (Bouvard) +  $\delta a, \delta e, \delta \varepsilon, \delta \omega$ ,

**hledané planety Neptunu**  $a_1, e_1, \varepsilon_1, \omega_1$

hmotnosti  $m$  a  $m_1$

$$n^2 a^3 = G(m_S + m)$$

$$n_1^2 a_1^3 = G(m_0 + m_1)$$

$$m_S \gg m, m_1$$

• předpoklad  $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$

$$n^2 = 8n_1^2$$

# Le Verrier: využití Titiova – Bodeova vztahu

## Box 2.1 The Law of Titius-Bode

---

In 1772, the German astronomer Johann Daniel Dietz, called Titius, showed that it is possible to approximately represent the distances of planets from the Sun by the following empirical relation:

$$a = 0.4 + 0.32^{n-1},$$

where  $a$  is the semi-major axis of the orbit expressed in astronomical units (the semi-major axis of the Earth's orbit) and  $n$  represents the consecutive integers. At first unnoticed, this relation was later publicized by the German astronomer Johann Elert Bode. Here is how it represents the distances of the planets from the Sun.

---

	Mercury	Venus	Earth	Mars		Jupiter	Saturn	Uranus	Neptune
$n$	$\infty$	1	2	3	4	5	6	7	8
$a$ (calc.)	0.40	0.70	1.00	1.60	2.80	5.20	10.0	19.6	38.8
$a$ (real)	0.39	0.72	1.00	1.52	–	5.20	9.55	19.2	30.1

---

# Le Verrier: upřesnění určení velké poloosy $a_1$

první aproximace  $\alpha = \frac{a}{a_1} = \frac{1}{2}$

upřesnění  $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\gamma \quad -1 \leq \gamma \leq +1$

reálné hodnoty  $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$

**\*volba**  $\alpha = 0,49, 0,50, \dots, 0,60$  v kombinaci různých časových období  $\rightarrow$  odlišná řešení dráhových elementů

\*M. K. G. Baghdady: The discovery of Neptun - a critical examination of the theory of Le Verrier. University of Aston, Birmingham 1980.

# Le Verrier - třetí práce, porovnání C - O

( 437 )

*Comparaison de la nouvelle théorie avec les observations.*

DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.	DATES des observations.	EXCÈS des positions calculées sur les positions observées.
1781-1782	+ 2",3	1813-1815	- 0",9
1783-1784	+ 0,1	1816-1817	+ 0,4
1785-1788	- 1,2	1818-1820	+ 0,4
1789-1790	- 3,4	1821-1823	+ 0,9
1791-1792	+ 0,3	1824-1827	- 5,4
1793-1794	- 0,5	1828-1830	- 2,2
1795-1797	- 1,0	1835	- 0,8
1797-1801	+ 0,9	1835-1836	+ 2,3
1802-1804	+ 0,8	1837-1838	+ 2,5
1804-1806	+ 0,8	1839-1840	+ 2,2
1807-1808	+ 2,1	1841-1842	- 0,2
1808-1810	+ 0,8	1842-1844	- 0,4
1811-1813	- 0,5	1844-1845	- 0,3

\*U. J. Le Verrier.: Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus: détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **23** (1846), p. 437.



# Le Verrier - třetí práce dráhové elementy

Demi-grand axe de l'orbite . . . . .	36,154
Durée de la révolution sidérale . . . . .	217 <sup>ans</sup> ,387
Excentricité . . . . .	0,107.61
Longitude du périhélie . . . . .	284° 45'
Longitude moyenne au 1 <sup>er</sup> janvier 1847 .	318.47
Masse . . . . .	$\frac{1}{9300}$

„ On peut voir qu'en supposant, dans mon premier travail, que le grand axe de l'orbite de la planète cherchée était double de celui de l'orbite d'Uranus, j'avais fait une hypothèse très-voisine de la vérité.

„ On déduit, des éléments qui précèdent, la position suivante de la planète au 1<sup>er</sup> janvier 1847 :

Longitude héliocentrique vraie . .	326° 32'
Distance au Soleil . . . . .	33,06

\*U. J. Le Verrier.: Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus: détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **23** (1846), p. 432.

# Porovnání Le Verrier → současnost

**Table 2.1** Values of principal elements of the orbit of Neptune

Value	Le Verrier	Actual value
Semi-major axis of orbit (a.u.) <sup>a</sup>	36.154	30.0690
Sidereal period of revolution (years)	217.387	163.723
Eccentricity	0.10761	0.008586
Mass (solar masses)	1/9,300	1/19,424
Mass (earth masses)	36	17.14

<sup>a</sup>The astronomical unit (a.u.) is equal to the semi-major axis of the Earth's orbit, i.e.  $1.496 \cdot 10^8$  km

Neptun:  $a = 30$  au,  $T = 164$  roků,  $M_N = 1,0 \cdot 10^{26}$  kg

**nepřesná velikost velké poloosy  $a$**  → tudíž i velikosti oběžné doby  $T$

Le Verrier předpokládal rezonanci **3 : 1**, reálná spíše **2 : 1**

**$a$ ,  $e$  nepřesné** - příliš slabé poruchové působení, částečně kompenzováno

**reálně větší hmotností Neptunu** stanovenou po nalezení **Tritonu**

Lassellem (1799 - 1880) již 10. října 1846

**nalezení Neptunu šťastná náhoda ?**

# Dopis Le Verrier → Galle

À Monsieur J. G. Galle,  
Astronome à l'Observatoire Royal de Berlin à Berlin.

Paris, le 18 Septembre 1846.

Monsieur,—J'ai lu avec beaucoup d'intérêt et d'attention la réduction des observations de Roemer, dont vous avez bien voulu m'envoyer un exemplaire. La parfaite lucidité de vos explications, la complète rigueur des résultats que vous nous donnez, sont au niveau de ce que nous devons attendre d'un aussi habile astronome. Plus tard, Monsieur, je vous demanderai la permission de revenir sur plusieurs points qui m'ont intéressé, et en particulier sur les observations de Mercure qui y sont renfermées. Aujourd'hui je voudrais obtenir de l'infatigable observateur qu'il voulait bien consacrer quelques instants à l'examen d'une région du ciel, où il peut rester une Planète à découvrir. C'est la théorie d'Uranus qui m'a conduit à ce résultat. Il va paraître un extrait de mes recherches dans les *Astronomische Nachrichten*. J'aurai donc pu, Monsieur, me dispenser de vous en écrire, si je n'avais eu à remplir le devoir de vous remercier pour l'intéressant ouvrage que vous m'avez adressé.

Vous verrez, Monsieur, que je démontre qu'on ne peut satisfaire aux observations d'Uranus qu'en introduisant l'action d'une nouvelle Planète, jusqu'ici inconnue; et ce qui est remarquable, il n'y a dans l'écliptique qu'une seule position qui puisse être attribuée à cette Planète perturbatrice. Voici les éléments de l'orbite que j'assigne à cet astre :

Demi-grand axe de l'orbite . . . . .	36.154
Durée de la révolution sidérale . . . . .	217.387 ans
Excentricité . . . . .	0.10761
Longitude du Perihelie . . . . .	284.45'
Longitude moyenne 1 <sup>er</sup> Janvier, 1847, . . . . .	318.47'
Masse . . . . .	1/9300
Longitude Héliocentrique vraie au 1 <sup>er</sup> Jan.	
1847 . . . . .	326.32'
Distance au Soleil . . . . .	33.06

La position actuelle de cet astre montre que nous sommes actuellement, et que nous serons encore, pendant plusieurs mois, dans des conditions favorables pour le découvrir.

# Dopis Le Verrier → Galle

*Pane, dnes bych rád vymohl od neúnavného pozorovatele, aby laskavě věnoval několik okamžiků zkoumání určité oblasti oblohy, kde může být nalezena jedna planeta. K tomuto výsledku mne přivedla teorie Uranu.*

*Výtah z mých výzkumů vyjde v nejbližší době v **Astronomische Nachrichten**.... Uvidíte, vážený pane, že dokazují, že nelze pozorováním Uranu vyhověti matematicky jinak, než zavedením vlivu nové planety, až dosud neznámé. Zajímavé je, že v ekliptice je pouze jedno místo, na kterém může být tato rušící planeta. Tu jsou elementy dráhy, které jsem přisoudil tomuto tělesu:*

<i>velká poloosa dráhy</i>	<i>36, 154 au.</i>
<i>siderická oběžná doba</i>	<i>217,387 roků</i>
<i>excentricita</i>	<i>0,10761</i>
<i>délka perihélia</i>	<i>284° 45'</i>
<i>střední délka 1. ledna 1847</i>	<i>318° 47'</i>
<i>hmotnost</i>	<i>1/9300</i>
<i>pravá heliocentrická délka 1. ledna 1847</i>	<i>326° 32'</i>
<i>vzdálenost od Slunce</i>	<i>33,06 a.u.</i>

# Dopis Le Verrier → Galle

*Nynější poloha tělesa ukazuje, že máme a ještě několik měsíců budeme mít příznivé podmínky k jeho objevení.*

*Mimoto můžeme z velikosti jeho hmotnosti usouditi, že velikost jeho zdánlivého průměru je větší než 3“ . Je to takový průměr, že může být rozlišen v dobrých dalekohledech od neskutečného průměru hvězd, který vzniká následkem různých vad čoček.*

*Přijměte, vážený pane, ujištění mé velké úcty.*

*Váš oddaný služebník*

*U. J. Le Verrier*

# J. G. Galle 1812 - 1910 + L. H. d'Arrest 1822 - 1875



z dráhových výpočtů Leverriera → souřadnice neznámé  
planety  $\alpha = 327^{\circ} 27'$   $\delta = - 13^{\circ} 24'$

pozorování „objektu“:

1. rychlý pohyb na pozadí hvězd
2. pozorovaný disk 2“ - 3“
3. mapy K. Bremikera 1804 - 1877

**nalezení Neptuna -  
šťastná náhoda ?**

# J. G. Galle, H. L. d'Arrest: nalezení Neptuna 23/24. 9. 1846

Adams -  $2\ 1/2^\circ$

rozhraní Vodnáře – Kozoroha

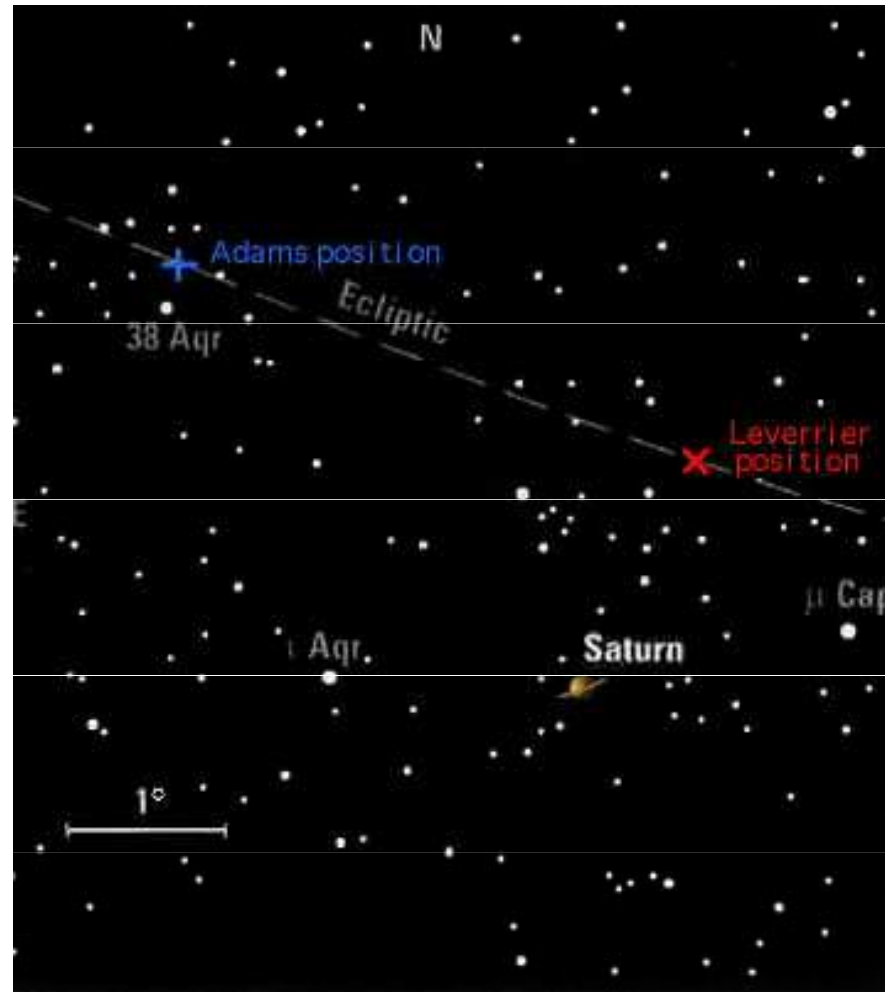


Le Verrier -  $1^\circ$



A fragment of Bremiker's celestial map on which a German hand (Galle's?) has plotted the position of Neptune predicted by Le Verrier (*Neptun bereibnet*) and the actual position (*Neptun beobachtet*). The position predicted by Adams is also indicated

# Nalezení Neptunu



vypočítaná poloha Neptunu **Adams**, **Le Verrier**



# Dopis Galleho → Le Verrierovi

Berlin, le 27 Sept. 1846

Monsieur,

La planète, dont vous avez signalé l'existence, réellement existe.  
Le même jour, où j'ai reçu votre lettre, je trouvais une étoile de 8<sup>me</sup> grandeur,  
qui n'était pas inscrite dans l'excellente carte Bora XXI (destinée par M.  
le D<sup>r</sup> Bremiker) de la collection de cartes célestes publiée par l'Académie  
Royale de Berlin. L'observation du jour suivant décida que c'était la planète cherchée.  
Nous l'avons comparée, M<sup>r</sup> Encke en moi, par la grande lunette de Fraunhofer  
avec une étoile de 8<sup>me</sup> grandeur (α) Bessel zone 119. 21<sup>h</sup> 50<sup>m</sup> 31<sup>s</sup> 00 - 13° 30' 9<sup>h</sup> 9  
et nous avons trouvé :

Temps moy. de Berlin  
Sept. 23. 12<sup>h</sup> 0<sup>m</sup> 14<sup>s</sup> 6      Plan. = (α) + 21' 21<sup>s</sup> en R  
= (α) + 1.36,8 en Déclin.

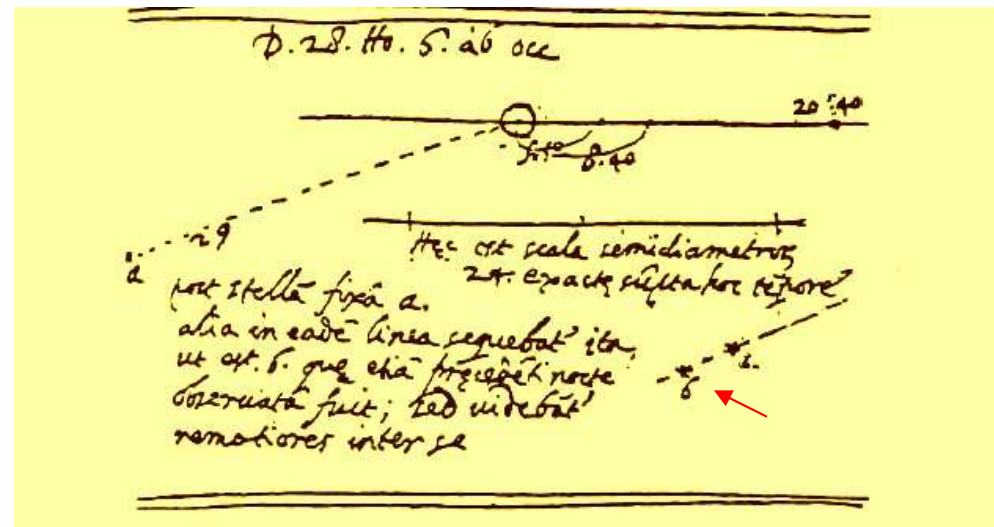
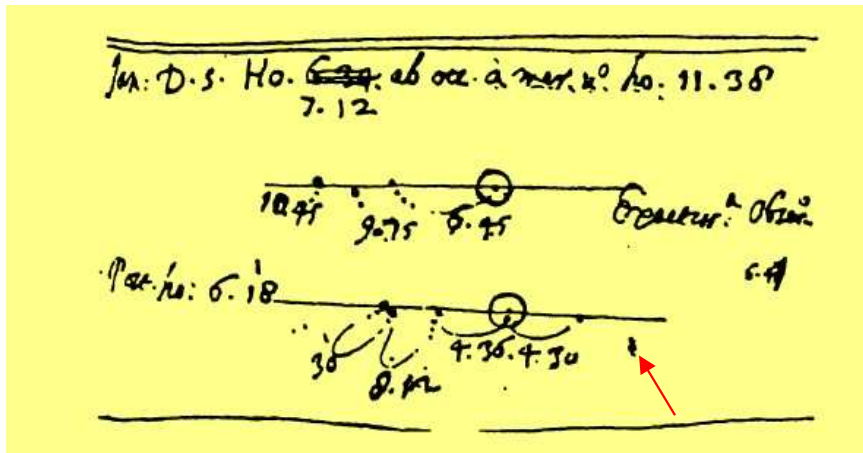
Pane,

„planeta, jejíž polohu jste mi ukázal **skutečně existuje**. V ten den, kdy jsem obdržel Váš dopis, jsem objevil hvězdu 8 mag, nezachycenou na výborné mapě (sestavené dr. Bremikerem) z hvězdného atlasu Berlínské akademie věd. Pozorování prováděná následující noc potvrdila, že jde o hledanou planetu. Já a pan Encke, jsme pozorovali velkým fraunhoferovským refraktorem a určili jsme polohu planety ve vztahu k srovnávací hvězdě...“

# Galileo Galilei 1564 - 1642

## předobjevová pozorování Neptunu

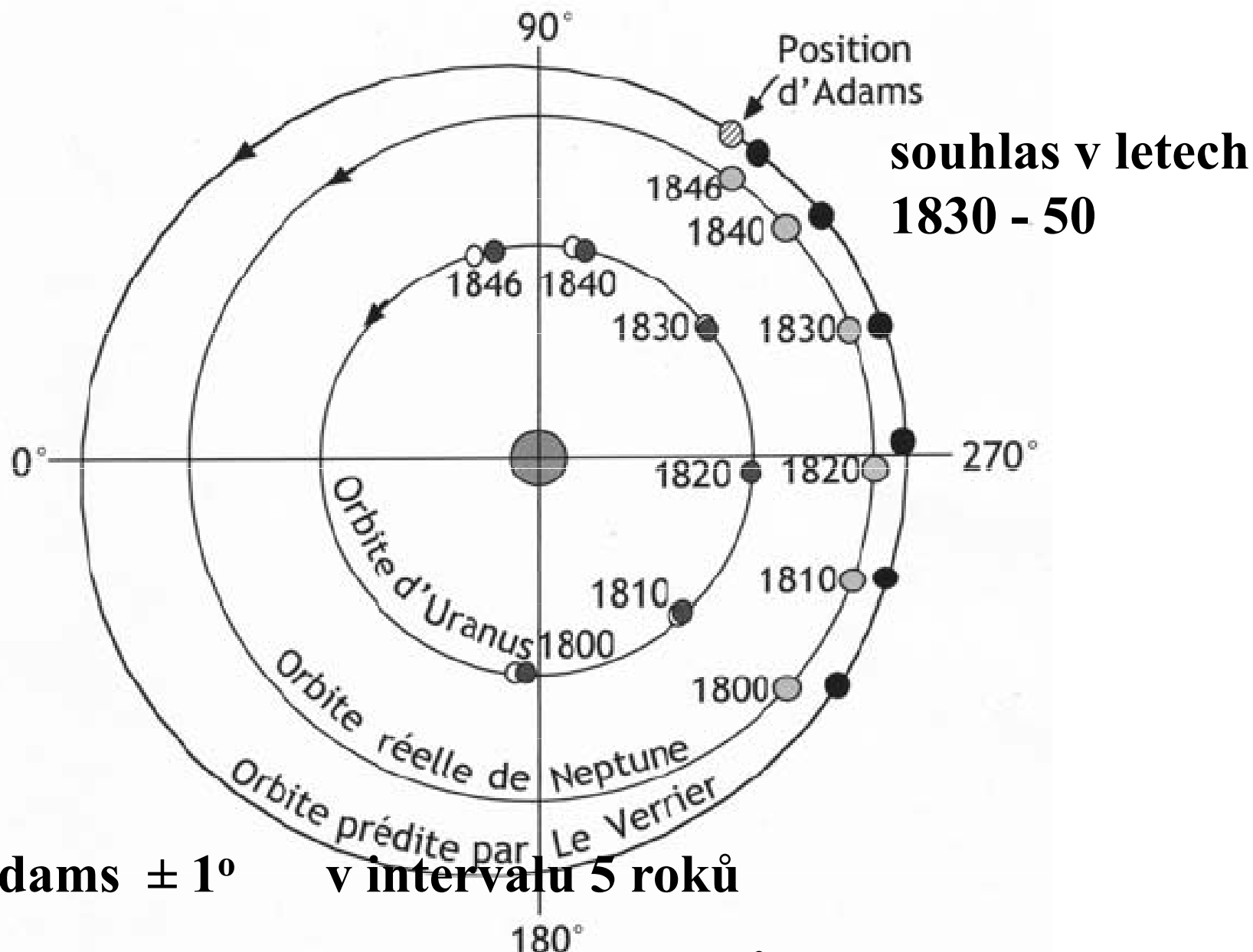
pozorovací deník: 28. ledna 1613: „za hvězdou *a* následuje další označená *b*, která byla pozorována rovněž předcházející noci, ale tehdy se zdály být dále od sebe...“



6.1.1613 pozorovací deník

Ch. Kowal, O, Drake: Galileo's observations of Neptune. Nature **287** (1980), p. 311 - 313.

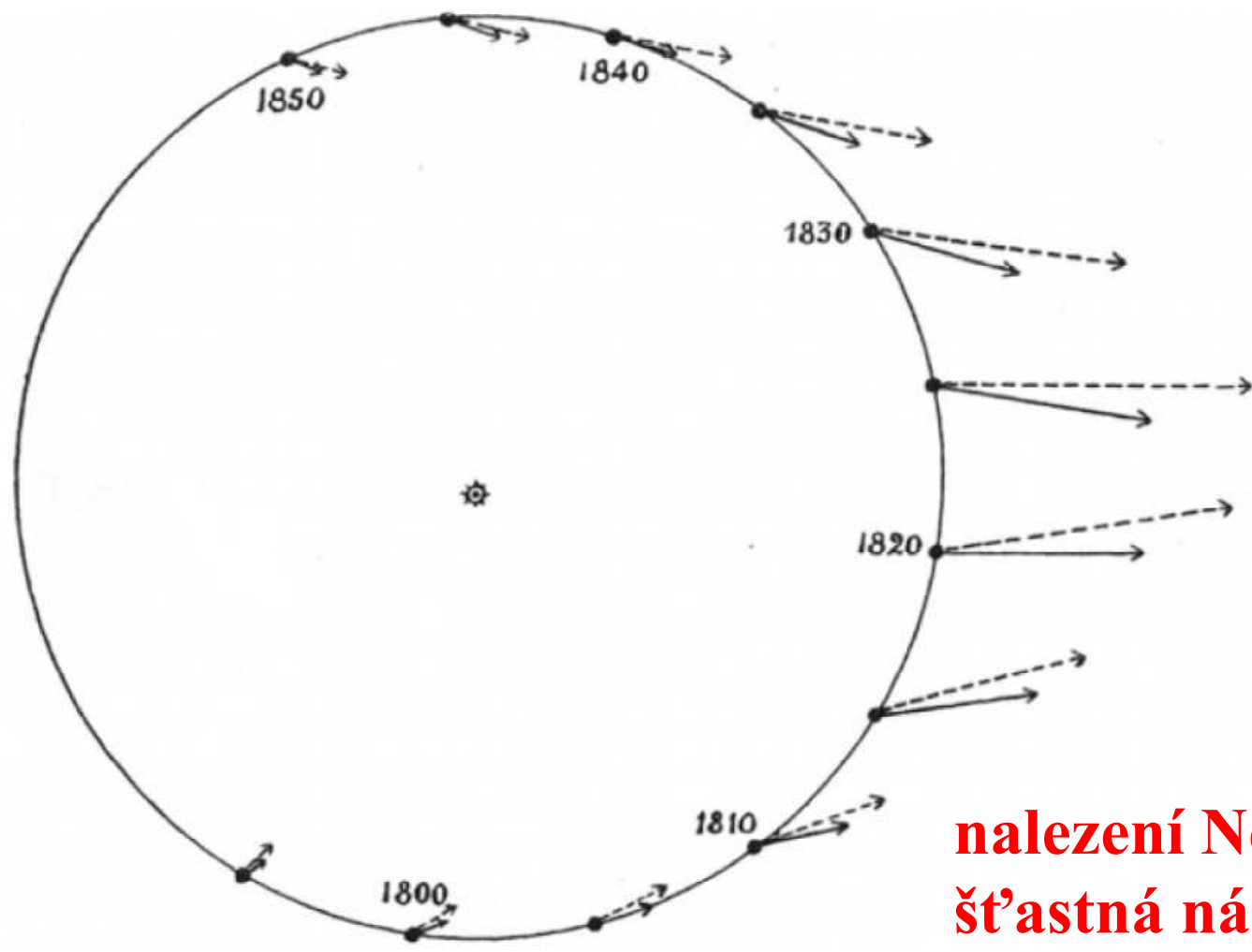
# Porovnání výpočtů Adams x Le Verrier



**přesnost: Adams  $\pm 1^\circ$  v intervalu 5 roků**

**Le Verrier  $\pm 1^\circ$  v intervalu 12 roků**

# Poruchové působení Neptunu na Uran

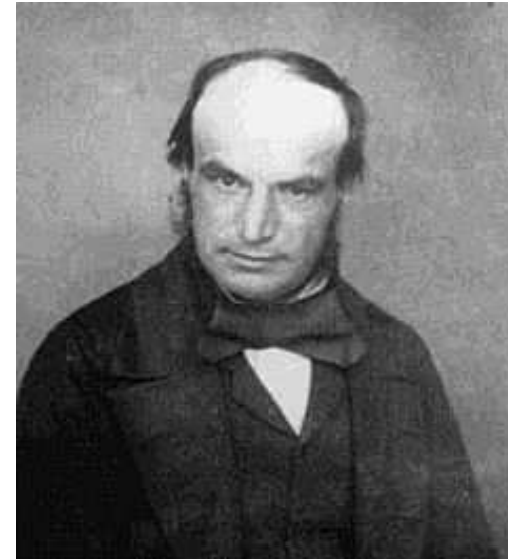


**nalezení Neptuna -  
šťastná náhoda ?**

Fig. 2.14 Comparison of the perturbing force exerted on Uranus by Neptune at different epochs (full arrows) and by the hypothetical planet of Le Verrier (dashed arrows). One sees that the direction of the perturbing force exerted by the hypothetical planet is not in line with Uranus (the discovery of Neptune with Uranus is too late by 1½ years). However, the intensity of the perturbing force is too large

směry a velikosti poruchových sil Le Verrierem vypočítaných - - - - -  
blízké reálným - - - - - do roku 1800 nevýrazné

# Le Verrier x John Couch Adams 1819 - 1892



Orbital Elements	LeVerrier	Adams	Neptune
Semi-major Axis (A.U.)	36.15	37.25	30.07
Eccentricity	0.1076	0.1206	0.0086
Longitude of Perihelion	284° 45'	299° 11'	44°
Mass of sun/Mass of Neptune	9300	6666	19300
True Longitude (at time of discovery)	326° 0'	329° 27'	326° 57'

# C - O, Le Verrier a J. C. Adams

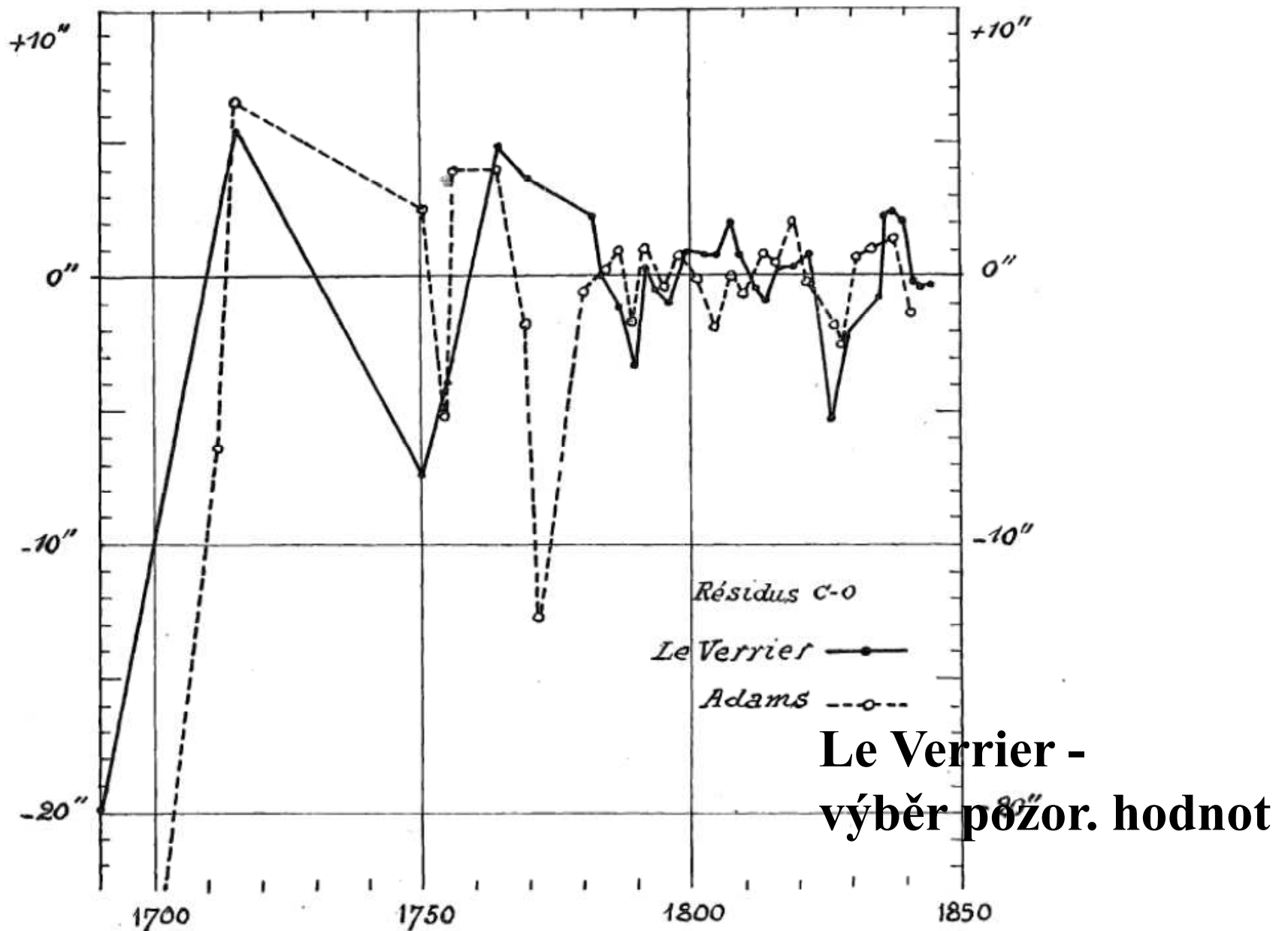


FIG. 2. — Ecart entre les longitudes calculées et les longitudes observées d'Uranus, compte tenu des perturbations causées par la planète troublante hypothétique.



# Le Verrier r. 1846 - podrobný výklad

SUR LES MOUVEMENTS

782-  
**RECHERCHES**

sur

LES MOUVEMENTS

DE

## LA PLANÈTE HERSCHEL,

PAR U.-J. LE VERRIER.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Du Bureau des Longitudes et de l'École royale Polytechnique,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1846



## DE LA PLANÈTE HERSCHEL,

(DITE URANUS) \*

tzv. Uran

PAR U.-J. LE VERRIER.

1. Je me propose, dans ce Travail, d'étudier la nature des irrégularités du mouvement d'Uranus; de remonter à leur cause, en cherchant à découvrir, dans la marche qu'elles affectent, la direction et la grandeur de la force qui les produit. La théorie d'Uranus préoccupe aujourd'hui les astronomes. Elle a déjà donné lieu à plusieurs hypothèses, qui étaient sans valeur scientifique; car elles ne se fondaient sur aucun calcul rigoureux. Quelques détails historiques feront mieux connaître la difficulté que j'avais à résoudre.

On possédait, en 1820, quarante années d'observations méridiennes régulières d'Uranus. La planète avait, en outre, été observée dix-neuf fois, depuis 1690 jusqu'en 1771, par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Ces astronomes l'avaient notée comme étoile de sixième grandeur. D'un autre côté, les expressions analytiques des perturbations que Jupiter et Saturne produisent sur Uranus, se trouvaient développées dans le tome III de la *Mécanique céleste*. Il était permis d'espérer qu'en s'aidant de toutes ces données, on parviendrait à construire des Tables exactes du mouvement de la planète; c'est ce qu'entreprit M. Bouvard, membre de l'Académie des Sciences. Mais il rencontra des difficultés imprévues.

U. J. Le Verrier: Recherches sur les mouvements de la planète Herschel, (dite Uranus). Bachelier, Paris 1846.



# Le Verrier r. 1846 - kapitoly



## **PREMIÈRE PARTIE.**

**PERTURBATIONS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE D'URANUS, DUES  
AUX ACTIONS DE SATURNE ET DE JUPITER.**

\* Poruchy eliptického pohybu Uranu vyvolané působením Saturna a  
Jupitera

## **DEUXIÈME PARTIE.**

**COMPARAISON DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AVEC LES  
OBSERVATIONS.**

Srovnání teorie s předchozími pozorováními

# Le Verrier - 1846

rukopis - poruchové působení Saturnu a Jupiteru na Uran

(4)

L. Verrier

Première Partie

Les Perturbations du mouvement elliptique  
d'Uranus, dues aux actions de Saturne  
et de Jupiter.

2. Pour établir, avec précision, les théories d'une  
planète, dont le mouvement est déjà approximativement  
connu, il faut, premièrement, en se basant sur les  
lois de la gravitation universelle, et en tenant  
compte de l'influence de toutes les masses, rechercher  
avec soin la forme des expressions analytiques,  
propres à représenter à une époque quelconque le  
comportement de l'astre. Il faut, en second lieu, ~~se~~  
~~baser~~ sur les lois de la gravitation disposer d'une série  
~~exacte et nombreuse~~ d'observations, exactes et  
nombreuses, réparties sur un intervalle de temps  
considérable. Ces deux premières parties de la question  
sont indépendantes l'une de l'autre. Il reste  
ensuite à les rapprocher, à conclure de observations  
les valeurs précises des constantes qui sont  
restées indéterminées dans les formules, et qu'on  
a pu réduire au plus petit nombre possible.

# Le Verrier - 1846

## poruchové působení Saturnu a Jupiteru na Uran

Soit  $n = 4^{\text{h}} 7610$  le moyen mouvement annuel d'Uranus. On aura en grade :

$$n' = n \left\{ 0,51 + \frac{d}{100} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= n (0,51)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{200} (0,51)^{\frac{1}{2}} d + \frac{3}{40000} (0,51)^{-\frac{1}{2}} d^2$$

ou bien

$$n' = 1^{\text{h}} 7340 + 0^{\text{m}} 05100 d + 0^{\text{s}} 000250 d^2$$

faute qui pour  $d = 1$  fournit  $n' = 1^{\text{h}} 7819$  et pour  $d = 9$  fournit  $n' = 1^{\text{h}} 4892$  ; nombre qui avec ces cinq termes directement pour  $n (0,51)^{\frac{3}{2}}$  et  $n (0,51)^{\frac{3}{2}}$ .

D'où mon troisième inégalité :

$$\delta v = m' (20'' 24 + 1'' 81 d + 0'' 088 d^2) \sin \left\{ 87^{\circ} 22' - 3^{\circ} 0270 t + 0^{\circ} 05100 dt + 0^{\circ} 000250 d^2 t + \delta \varepsilon' \right\}$$

developpant le sinus par la formule :

$$\sin(x+k) = \sin x + (0,015708) k \cos x - \frac{(0,015708)^2 k^2}{2} \sin x$$

l'inégalité. Derrière on réajustait par l'unité  $\delta \varepsilon' = 10^4 = 4'$  pour abréger ; il faut en restituer  $10^4$  par  $10^2$

# Le Verrier r. 1846 – kapitoly

## **TROISIÈME PARTIE.**

LES ANOMALIES OBSERVÉES DANS LE MOUVEMENT D'URANUS  
PEUVENT ÊTRE EXPLIQUÉES PAR L'ACTION PERTURBATRICE D'UNE  
NOUVELLE PLANÈTE. PREMIÈRE DÉTERMINATION DE LA POSITION  
QUE LE NOUVEL ASTRE OCCUPE DANS LE CIEL.

Pozorované anomálie v pohybu Uranu vysvětlitelné poruchovým působením nové planety. První určení polohy této nové hvězdy na obloze.

## **QUATRIÈME PARTIE.**

DÉTERMINATION PLUS PRÉCISE DES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE,  
ET DE LA POSITION ACTUELLE DE LA PLANÈTE TROUBLANTE,  
AU MOYEN DE L'ENSEMBLE DES OBSERVATIONS D'URANUS.

Přesné určení dráhových elementů a současné polohy planety rušící vycházející z pozorování Uranu.

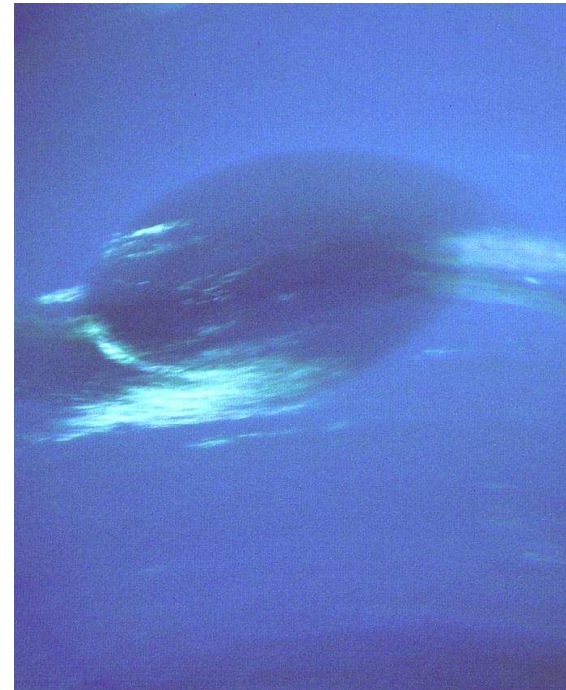
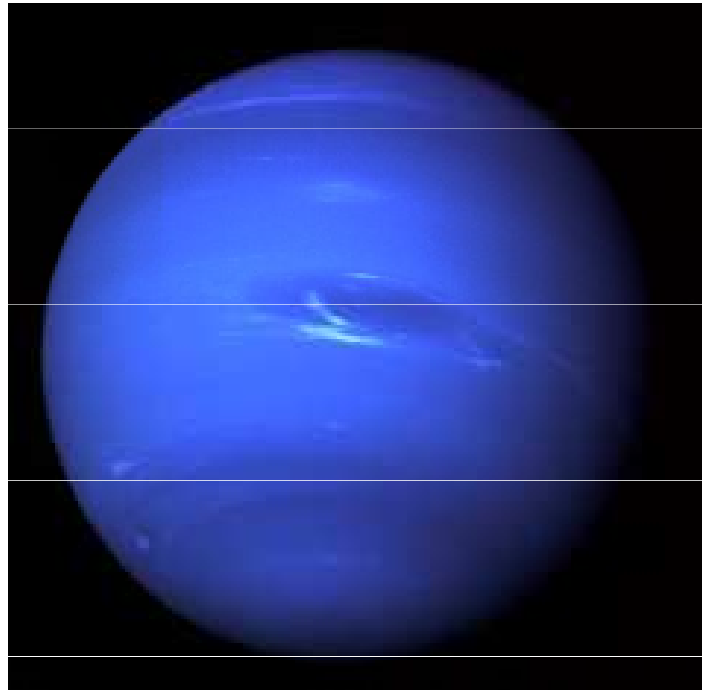
# Le Verrier r. 1846 - kapitoly

## **CINQUIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.**

**EST-IL POSSIBLE DE DÉDUIRE DES OBSERVATIONS D'URANUS LA  
POSITION DU PLAN DE L'ORBITE DE LA PLANÈTE TROUBLANTE?**

Je možné snížit počet pozorování polohy Uranu nezbytných ke stanovení polohy rušící planety ?

# Neptun

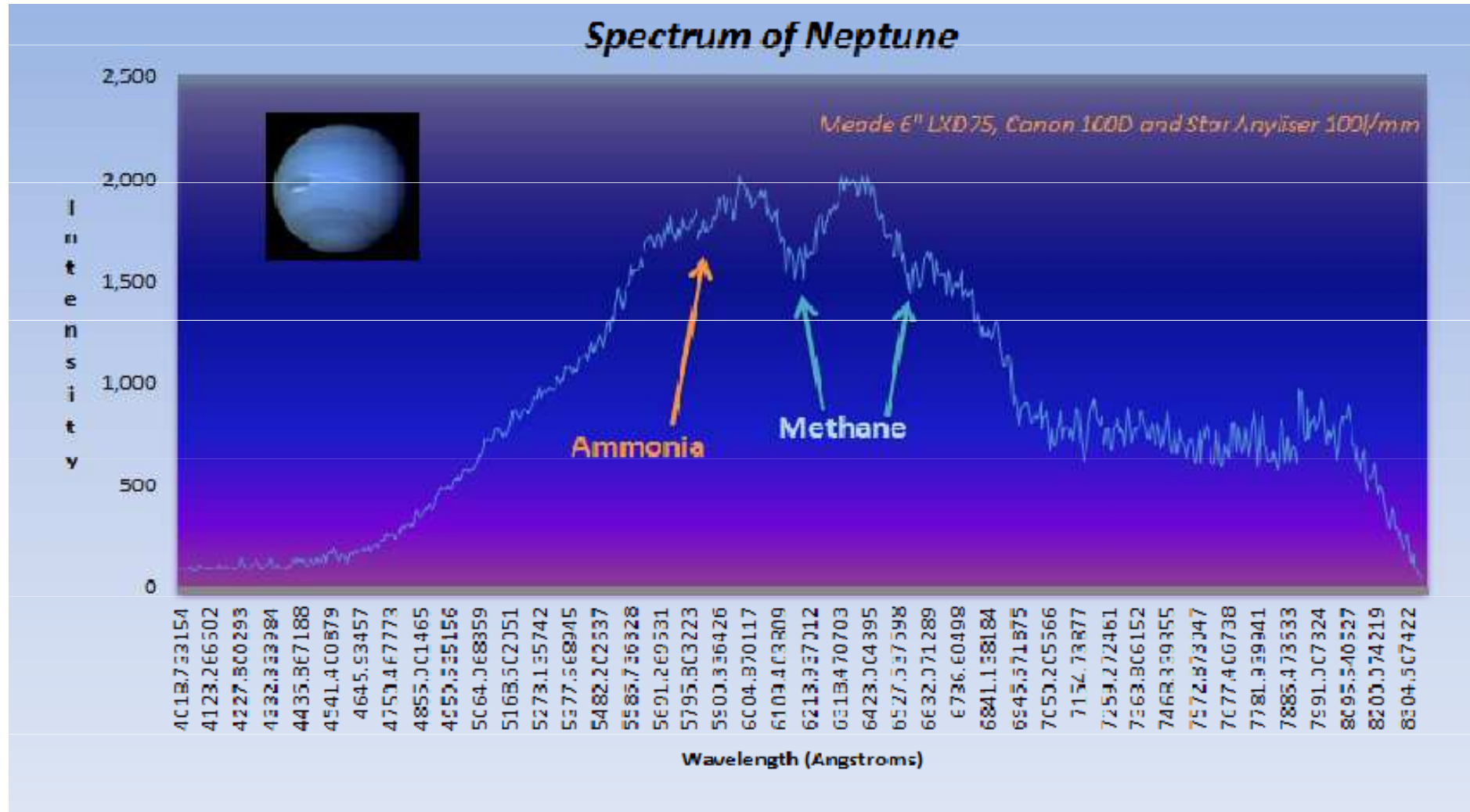


CHARAKTERISTIKA	HODNOTA	k Zemi
Rovníkový průměr	49 528 km	3,9
Hmotnost	$1,02 \cdot 10^{26} \text{ kg}$	17,1
Hustota	$1 638 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	0,3
Gravitační zrychlení na povrchu	$11,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	1,1
Úniková rychlost	$23,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$	2,1
Perioda oběhu kolem Slunce	163,73 r	163,7
Naklonění osy rotace	$28,3^\circ$	1,2
Počet měsíců <sup>19</sup>	14 + p	



# Neptun

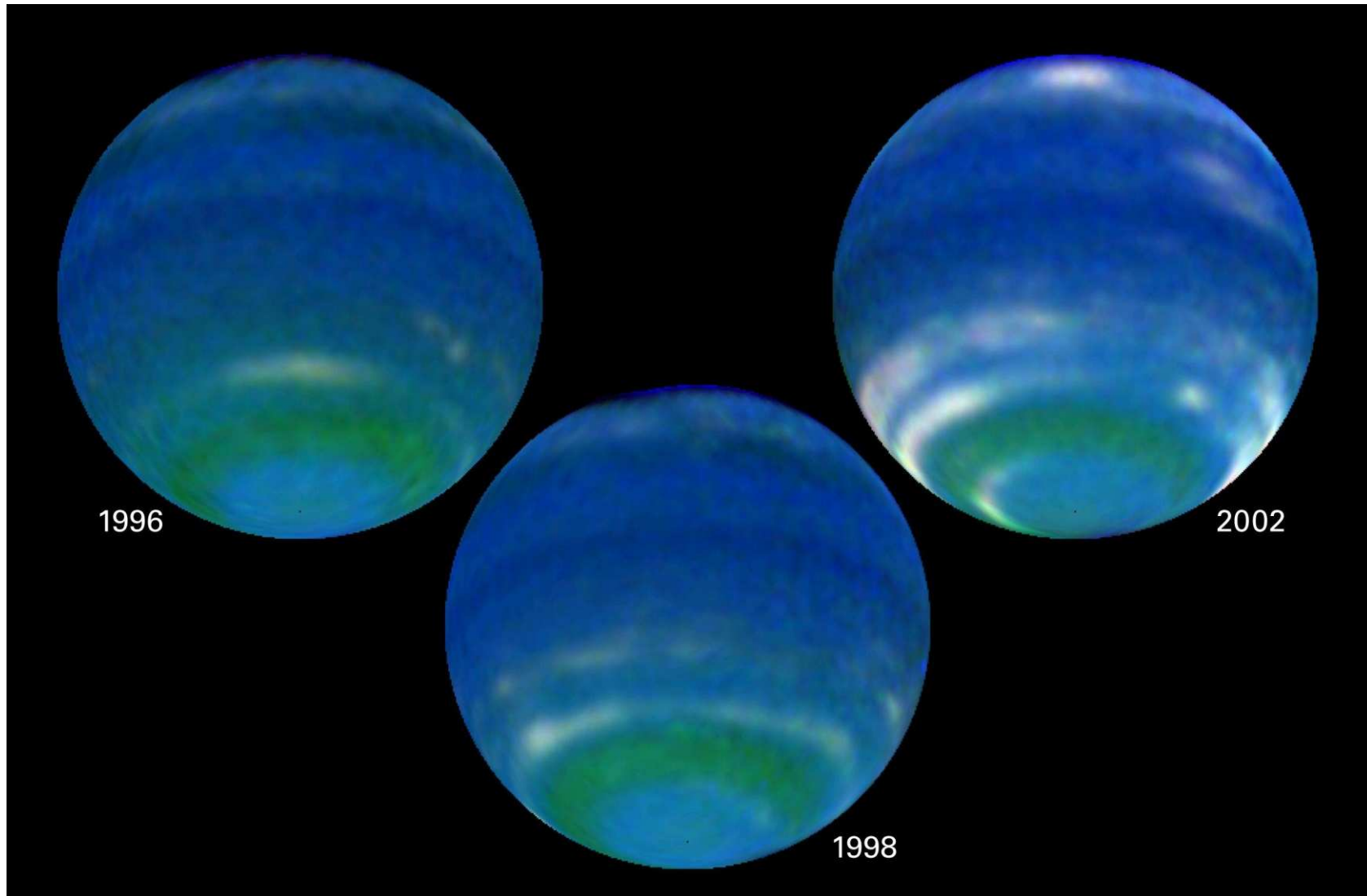
Zdůvodnění namodralého zbarvení planety





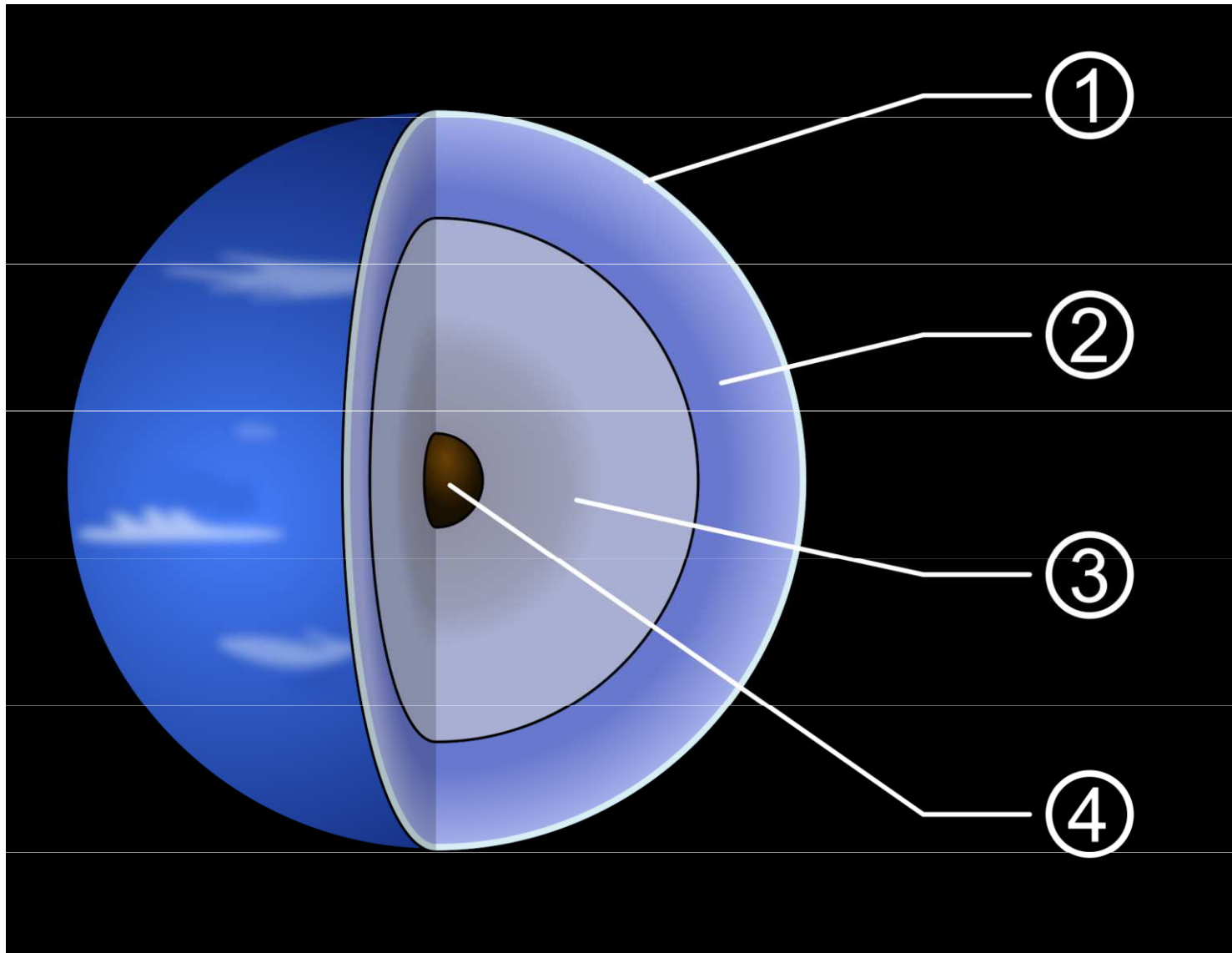
# Neptun

Sezónní změny vzhledu planety



# Neptun

Stavba planety: 4 - jádro kamenné, 3 - vrstva ledu voda, čpavek, metan,  
2 - vodík, helium, 1 – molekulární vodík, helium, metan



# Neptun

Prstence planety

