

1 Kalibrační invariance

Pokud je vlnová funkce ψ_1 řešením Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}_1 \right)^2 \psi_1 + qU_1 \psi_1, \quad (1)$$

pak funkce

$$\psi_2 = \psi_1 e^{i\varphi(\vec{r}, t)} \quad (2)$$

bude řešením analogické Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}_2 \right)^2 \psi_2 + qU_2 \psi_2, \quad (3)$$

ve které

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 + \frac{\hbar}{q} \vec{\nabla} \varphi \quad (4)$$

$$U_2 = U_1 - \frac{\hbar}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5)$$

Změnou $U_1 \rightarrow U_2$ a $\vec{A}_1 \rightarrow \vec{A}_2$ nedojde ke změně intenzity elektrického pole ani magnetické indukce, protože

$$\vec{B}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 + \frac{\hbar}{q} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 = \vec{B}_1 \quad (6)$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla} U_2 - \frac{\partial \vec{A}_2}{\partial t} = -\vec{\nabla} U_1 + \frac{\hbar}{q} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} - \frac{\hbar}{q} \frac{\partial \vec{\nabla} \varphi}{\partial t} = \quad (7)$$

$$= -\vec{\nabla} U_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} = \vec{E}_1. \quad (8)$$

Také vektor $(\hbar \vec{\nabla} \varphi - q\vec{A})$, který u supravodičů vystupuje v rovnici pro hustotu proudu, zůstane při uvedené transformaci zachován.

2 Přibližné odvození Josephsonových rovnic

Mějme dva stejné supravodiče oddělené tenkou dielektrickou bariérou. Vlnovou funkci kondenzátu Cooperových párů v prvním supravodiči (normovanou na 1) označíme ψ_1 , v druhém supravodiči ψ_2 . Celková vlnová funkce kondenzátu Cooperových párů bude $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$, kde c_1 a c_2 jsou časově závislé komplexní amplitudy a druhé mocniny jejich velikostí se rovnají koncentraci Cooperových párů v prvním (n_1) a druhém (n_2) supravodiči. Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \left(\frac{dc_1}{dt} |\psi_1\rangle + \frac{dc_2}{dt} |\psi_2\rangle \right) = \hat{H} (c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle) \quad (9)$$

můžeme vynásobením zleva vektory $\langle\psi_1|$ nebo $\langle\psi_2|$ převést na dvě rovnice

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = c_1 \langle\psi_1|\hat{H}|\psi_1\rangle + c_2 \langle\psi_1|\hat{H}|\psi_2\rangle \quad (10)$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = c_1 \langle\psi_2|\hat{H}|\psi_1\rangle + c_2 \langle\psi_2|\hat{H}|\psi_2\rangle. \quad (11)$$

Výrazy $\langle\psi_1|\hat{H}|\psi_1\rangle$ a $\langle\psi_2|\hat{H}|\psi_2\rangle$ odpovídají chemickému potenciálu Cooperových párů v prvním (μ_1) a v druhém (μ_2) supravodiči. Po označení $K = \langle\psi_1|\hat{H}|\psi_2\rangle = \langle\psi_2|\hat{H}|\psi_1\rangle$ dostáváme dvojici rovnic

$$i\hbar \frac{dc_1}{dt} = \mu_1 c_1 + K c_2 \quad (12)$$

$$i\hbar \frac{dc_2}{dt} = \mu_2 c_2 + K c_1. \quad (13)$$

Protože amplitudy $c_1 = \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1}$ a $c_2 = \sqrt{n_2} e^{i\varphi_2}$ jsou komplexní, můžeme obě rovnice (12) a (13) rozdělit na jejich reálné a imaginární části. Reálné části vedou po uvážení $n_1 \approx n_2$ na

$$\boxed{\hbar \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \mu_2 - \mu_1 = 2eU,} \quad (14)$$

kde U je napětí mezi oběma supravodiči a $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Imaginární části rovnic (12) a (13) lze přepsat na

$$\hbar \frac{dn_1}{dt} = -2K \sqrt{n_1 n_2} \sin \Delta\varphi \quad (15)$$

$$\hbar \frac{dn_2}{dt} = 2K \sqrt{n_1 n_2} \sin \Delta\varphi, \quad (16)$$

tedy

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt}. \quad (17)$$

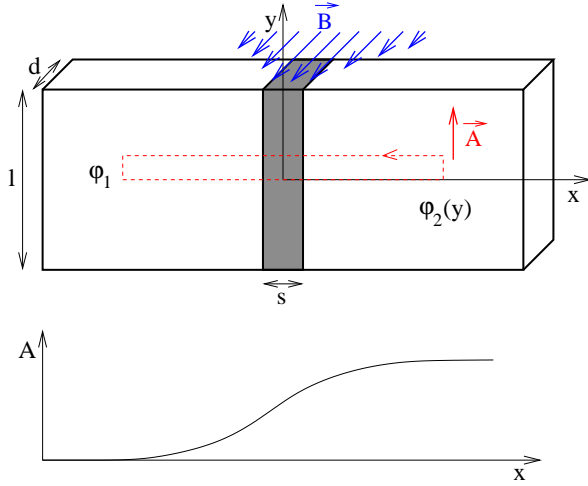
Protože přesun Cooperových párů z jednoho supravodiče do druhého odpovídá elektrickému proudu tekoucímu přechodem, můžeme uzavřít, že elektrický supravodivý proud přechodem je přímo úměrný $\sin \Delta\varphi$:

$$\boxed{I_s = I_c \sin \Delta\varphi,} \quad (18)$$

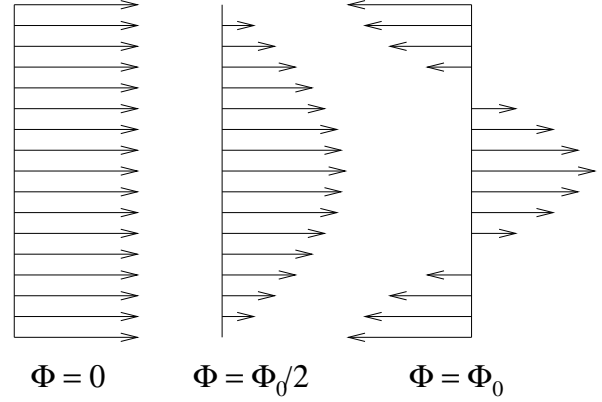
kde konstantu úměrnosti I_c nazýváme kritický proud.

3 Josephsonův přechod v magnetickém poli

Představme si Josephsonův přechod, kterým prochází magnetické pole, se souřadnicovou soustavou znázorněnou na obr. 1. Stínící proudy tečou zhruba ve vzdálenosti Londonovské hloubky vniku (λ_L)



Obrázek 1: Ilustrace k výpočtu kritického proudu v magnetickém poli.



Obrázek 2: Prostorové rozložení hustoty el. proudu Josephsonovým přechodem pro tři různé magnetické indukční toky přechodem.

od bariéry, dostatečně daleko od bariéry jsou stínící proudy zanedbatelné a proud supravodičem teče jen ve směru osy x . Protože pro hustotu proudu v supravodiči platí

$$\vec{j} = \frac{e}{m} |\psi|^2 \left(\hbar \vec{\nabla} \varphi - 2e \vec{A} \right) \quad (19)$$

a vektor \vec{A} má přibližně směr osy y , platí daleko od přechodu

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{2e}{\hbar} A. \quad (20)$$

V magnetickém poli proto musí být fáze alespoň jednoho ze supravodičů funkcí y a pro rozdíl fází obou supravodičů platí

$$\frac{d \Delta \varphi}{dy} = \frac{2e}{\hbar} \Delta A = \frac{2e}{\hbar} \frac{d\Phi}{dy}, \quad (21)$$

kde Φ je magnetický indukční tok přechodem. Při poslední úpravě bylo využito, že pro magnetický indukční tok plochou ohraničenou na obr. 1 tenkým červeným obdélníkem platí

$$d\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Delta A dy.$$

Pro magnetický indukční tok tímto obdélníkem dále platí

$$d\Phi = B(s + 2\lambda_L) dy, \quad (22)$$

kde s značí tloušťku bariéry a B velikost magnetické indukce v bariéře. Nyní pomocí Maxwellovy rovnice $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$ a Josephsonovy rovnice $j = j_C \sin \Delta\varphi$ dostáváme

$$\frac{dB}{dy} = \mu j_C \sin \Delta\varphi \quad (23)$$

a kombinací (21), (22) a (23) tzv. Ferrellovu-Prangeovu rovnici

$$\frac{d^2\Delta\varphi}{dy^2} = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \Delta\varphi \quad (24)$$

$$\lambda_J^2 = \frac{\hbar}{2e\mu(s + 2\lambda_L)j_C}. \quad (25)$$

Pro slabá magnetická pole (pro nulový celkový proud přechodem lze použít $\sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi$) vede Ferrellova-Prangeova rovnice k exponenciálnímu vytlačení magnetického pole z bariéry popsáno hloubkou vniku magnetického pole do bariéry λ_J . Dalším příkladem řešení rovnice (24) je závislost

$$\Delta\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{x}{\lambda_J} \right) \right], \quad (26)$$

kteřá umožňuje vniknutí magnetického pole do bariéry ve formě víru. Zesilování magnetického pole vede k pronikání dalších vírů do bariéry. Pokud je množství vírů v bariéře velké a víry jsou nahloubčeny těsně na sobě, je možné magnetické pole v bariéře považovat za prakticky konstantní, což využijeme v následujícím odvození.

Závislost kritického proudu na magnetickém poli

Jesliže magnetické pole v bariéře nezávisí na y , lze z (21) jednoduše vyvodit

$$\Delta\varphi(y) = \Delta\varphi(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{\Phi}{l} y, \quad (27)$$

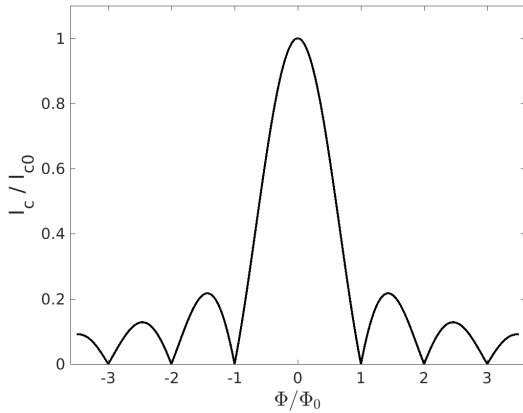
kde $\Phi_0 = h/(2e)$ označuje fluxon a Φ je celkový magnetický indukční tok přechodem. Různými místy přechodu proto potečou odlišné hustoty supravodivého proudu (viz obr. 2). Celkový proud tekoucí přechodem spočítáme integrací

$$I = \int_0^d \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j_C \sin \Delta\varphi \, dx \, dy = j_C d \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin \left[\Delta\varphi(0) + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0 l} y \right] dx. \quad (28)$$

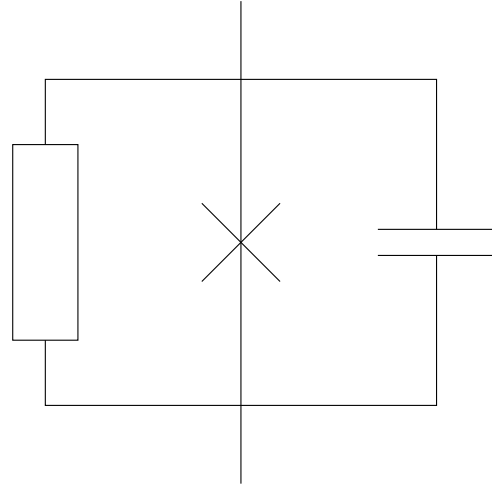
Velikost tohoto výrazu dosahuje maxima pro $\Delta\varphi(0) = \pi/2$ a po označení $I_{c0} = j_C dl$ dostáváme skutečnost, že maximální supravodivý proud Josephsonovým přechodem je v magnetickém poli omezen hodnotou

$$I_c = j_C d \left| \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0 l} y \right] dx \right| = I_{c0} \left| \frac{\sin \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}}{\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} \right|. \quad (29)$$

Tato závislost je vynesena na obr. 3



Obrázek 3: Závislost kritického proudu na magnetickém indukčním toku Josephsonovým přechodem.



Obrázek 4: Náhradní schéma Josephsonova přechodu.

4 VA charakteristiky Josephsonova přechodu

Elektrické náhradní schéma Josephsonova přechodu (viz obr. 4) vede k rovnici

$$I = \frac{U}{R} + I_c \sin(\Delta\varphi) + C \frac{dU}{dt} \quad (30)$$

Je-li na přechodu konstantní napětí, poteče přechodem kromě stejnosměrného proudu U/R také střídavý supravodivý proud

$$I_s = I_c \sin\left(\frac{2e}{\hbar} Ut\right) \quad (31)$$

s frekvencí

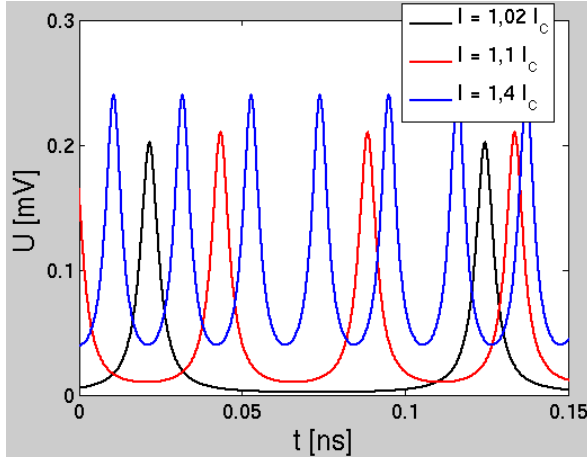
$$f = \frac{2e}{h} U. \quad (32)$$

Komplikovanější je řešení Josephsonova přechodu protékaného konstantním proudem. Nejdřív se podívejme na situaci, kdy zanedbáme kapacitu přechodu, což vede k rovnici

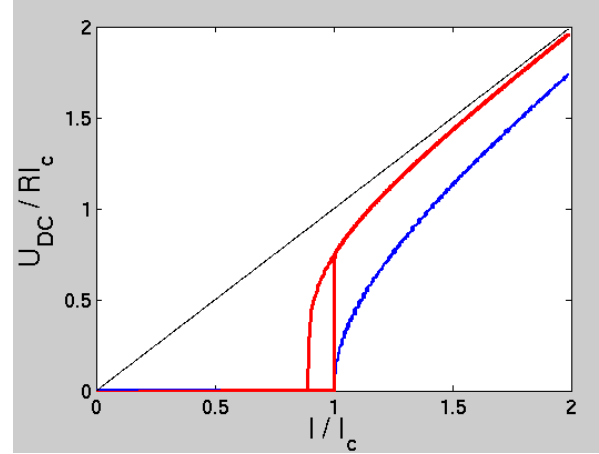
$$\frac{d\Delta\varphi}{I/I_c - \sin\Delta\varphi} = \frac{2eRI_c}{\hbar} dt, \quad (33)$$

kterou lze řešit pomocí integrálu

$$\int \frac{dx}{a - \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left[\frac{a \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{\sqrt{a^2 - 1}} \right]. \quad (34)$$



Obrázek 5: Časový průběh napětí na Josephsonově přechodu bez kapacity pro konstantní nadkritický proud.



Obrázek 6: Průměrné hodnoty napětí na dvou různých Josephsonových přechodech protékáných stejnosměrným proudem I .

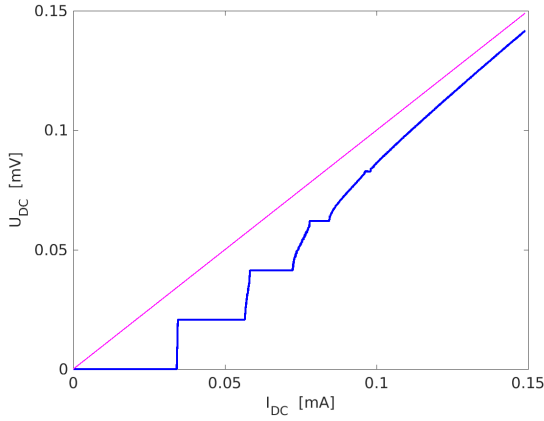
Příklad výsledných průběhů napětí je na obr. 5. Je vidět, že při nižším napětí je změna fáze ve shodě s (14) pomalá a část periody s nízkým napětím trvá relativně dlouho, zatímco při vyšším napětí se fáze mění rychle a Josephsonův přechod proto zůstává ve stavu s vysokým napětím jen krátce. Časový průběh napětí proto obsahuje vyšší harmonické frekvence. Průměrná hodnota napětí roste s proudem podle $\langle U \rangle = R\sqrt{I^2 - I_c^2}$.

Když nezanedbáme kapacitu přechodu, můžeme narazit na dva typy chování Josephsonova přechodu. Pro nízké hodnoty R a C se obvod chová podobně jako v případě se zanedbanou kapacitou, viz modrou křivku na obr. 6. Při vyšších hodnotách součinu R^2C se přechod stává hysterézním. Pro podkritické proudy může být napětí na přechodu nulové, při překročení I_c průměrné napětí skokem vzroste, ale při následujícím snižování proudu přechod v určitém intervalu proudů zůstává v odporovém stavu s nenulovým napětím, viz červenou křivku na obr. 6.

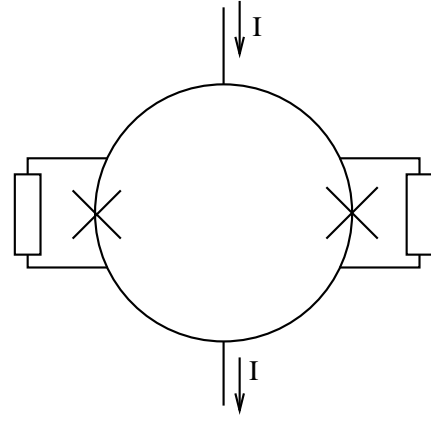
5 Shapirovy schody

Situace se ještě zpestří, když skrz Josephsonův přechod pošleme stejnosměrný proud a přechod zároveň ozáříme elektromagnetickým zářením, čímž na něj přivedeme vysokofrekvenční (v praxi většinou mikrovlnné) napětí. Pokud pro napětí na přechodu platí

$$U = U_{DC} + U_{MW} \cos \omega_{MW} t, \quad (35)$$



Obrázek 7: Příklad vypočítaných Shapiroových schodů (modře).



Obrázek 8: Schéma stejnosměrného skvidu.

bude se rozdíl fází obou supravodičů vyvíjet podle

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{2e}{\hbar} U_{DC} t + \frac{2e}{\hbar} \frac{U_{MW}}{\omega_{MW}} \sin \omega_{MW} t \quad (36)$$

a přechodem poteče supravodivý proud

$$\begin{aligned} I_s &= I_c \sin(\omega_{DC} t + \Delta\varphi_0 + \alpha \sin \omega_{MW} t) = \\ &= I_c \sin(\omega_{DC} t + \Delta\varphi_0) \cos(\alpha \sin \omega_{MW} t) + I_c \cos(\omega_{DC} t + \Delta\varphi_0) \sin(\alpha \sin \omega_{MW} t) \quad (37) \\ \omega_{DC} &= \frac{2e}{\hbar} U_{DC} \\ \alpha &= \frac{2e}{\hbar} \frac{U_{MW}}{\omega_{MW}}. \end{aligned}$$

Funkce $\sin(\alpha \sin \omega_{MW} t)$ a $\cos(\alpha \sin \omega_{MW} t)$ jsou periodické funkce s frekvencí ω_{MW} (nebo $2\omega_{MW}$) a jejich Fourierův obraz obsahuje mnoho vyšších harmonických signálů s frekvencemi $n\omega_{MW}$ (n je libovolné celé číslo). Střední hodnota proudu I_s bude nenulová jenom tehdy, když $\omega_{DC} = n\omega_{MW}$. Pokud tedy proudu tekoucímu skrz ozářený přechod vnutíme nenulovou stejnosměrnou složku, musí se stejnosměrné napětí na přechodu ustálit na některé z hodnot

$$U_{DC} = n \frac{\hbar}{2e} \omega_{MW}. \quad (38)$$

Protože toto napětí je kvantované a frekvenci záření je možné určit s vysokou přesností, používají se ozářené Josephsonovy přechody jako standardy stejnosměrného napětí. Příklad VA charakteristiky spočítané pro přechod ozářený mikrovlnami s frekvencí 10 GHz je ukázaný na obr. 7. Stejnosměrná

složka napětí při nízkých hodnotách stejnosměrného proudu skáče po kvantovaných hodnotách (38), při vysokých hodnotách proudu se projevuje zejména odporová větev přechodu a VA charakteristika se přimyká k přímce $U_{DC} = RI_{DC}$. Tato VA charakteristika se nazývá Shapirovy schody.

6 Skvidy

SQUID (superconducting quantum interference device) nebo SKVID (supravodivý kvantový interferenční detektor) je zařízení založené na supravodivém prstenci přerušném jedním nebo více Josephsonovými přechody. Skvidy se používají k citlivému měření magnetických polí v řádu až 10^{-18} T.

6.1 DC skvid

Stejnoseměrný skvid je tvořen supravodivým prstencem přerušným dvěma Josephsonovými přechody (obr. 8), který využívá interference proudu Cooperových párů tekoucími dvěma rameny prstence. Celým obvodem teče proud I , který bývá o několik procent vyšší než $2I_c$, takže oba přechody pracují v odporovém režimu. Supravodivý proud tekoucí oběma přechody má velikost

$$I_s = I_c (\sin \Delta\varphi_1 + \sin \Delta\varphi_2), \quad (39)$$

kde $\Delta\varphi_1$ a $\Delta\varphi_2$ jsou změny fází na prvním a druhém Josephsonově přechodu. Pokud se mění magnetický indukční tok protékající prstencem (Φ), indukuje se na prstenci napětí

$$-\frac{d\Phi}{dt} = U = U_1 - U_2 = \frac{\hbar}{2e} \left(\frac{d\Delta\varphi_1}{dt} - \frac{d\Delta\varphi_2}{dt} \right), \quad (40)$$

takže platí

$$\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = -2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + K \quad (41)$$

$$\begin{aligned} I_s &= I_c \left[\sin \Delta\varphi_1 + \sin \left(\Delta\varphi_1 + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - K \right) \right] = \\ &= 2I_c \sin \left(\Delta\varphi_1 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{K}{2} \right) \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{K}{2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Prstencem tedy může protékat supravodivý proud maximálně

$$2I_c \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{K}{2} \right),$$

zbytek proudu musí protékat odporovými větvemi schématu na obr. 8 a vytváří tak na skvidu lehce měřitelné napětí, které je periodickou funkcí intenzity magnetického pole v prstenci. Protože fluxon,

který určuje periodu oscilací, je malý (zhruba $2 \cdot 10^{-15}$ Wb), umožňují skvidy měřit extrémně slabá magnetická pole.

V praxi se měření větinou neprovádí tak, že by se počítaly periody měnícího se napětí. Ke skvidu bývá přivedena cívka, jejíž proud je řízen podle napětí na skvidu tak, aby cívka kompenzovala změny měřeného magnetického pole. Jak se měřené pole během experimentu změnilo se potom neurčuje podle počtu uběhlých period napětí (neboť napětí na skvidu se v této konfiguraci téměř nemění), ale podle proudu, který musí téct kompenzační cívkou, aby v prstenci udržel původní magnetické pole.

6.2 RF skvid

Vysokofrekvenční skvid je tvořen supravodivým prstencem, který je přerušený jediným Josephsonovým přechodem, a jehož funkce je založena na disipaci energie v prstenci. Díky jedinému přechodu v prstenci bývala výroba vf. skvidu jednodušší než výroba stejnosměrného skvidu, proto byly dříve k měření magnetických polí používány zejména vysokofrekvenční skvidy. Nedosahují ovšem takové citlivosti jako stejnosměrné skvidy.

Odvození dějů ve vf. skvidu je zpočátku analogické výpočtu pro stejnosměrný skvid. V proměnném mg. poli se na prstenci indukuje napětí

$$U = \frac{d\Phi}{dt},$$

které můžeme pomocí rovnice (14) nahradit fází Josephsonova přechodu

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\varphi}{dt} &= \frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dt} \\ \Delta\varphi &= 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + K, \end{aligned} \quad (43)$$

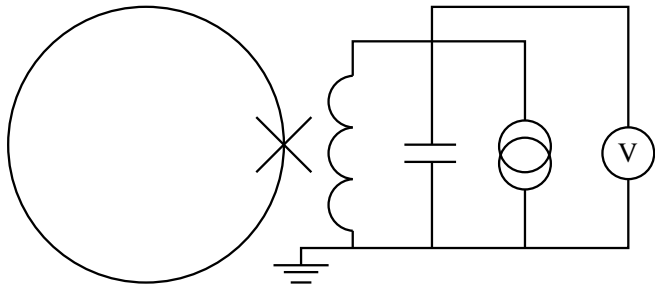
kde K je integrační konstanta.

Dále započteme skutečnost, že proud indukovaný ve skvidu způsobuje zeslabení magnetického indukčního toku skvidem (Φ) oproti magnetickému indukčnímu toku vnějšího pole (Φ_{ex}), který by skvidem tekla, kdyby skvidem netekla žádný proud:

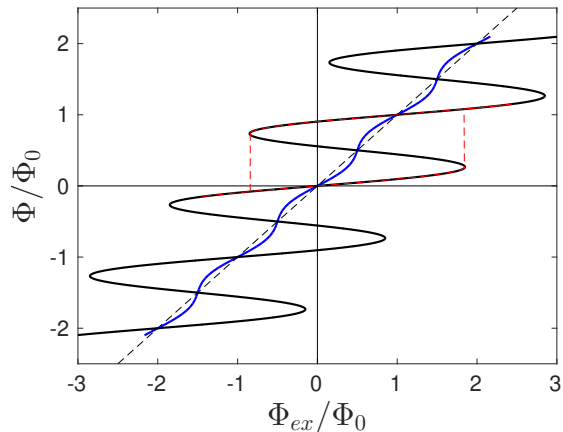
$$\Phi = \Phi_{ex} - LI = \Phi_{ex} - LI_c \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + K\right), \quad (44)$$

kde L je vlastní indukčnost prstence a kde jsme pro vyjádření proudu použili rovnici (18). Drobnou úpravou a označením $\beta_L = 2\pi LI_c/\Phi_0$ dostáváme

$$2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2\pi \frac{\Phi_{ex}}{\Phi_0} - \beta_L \sin\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} + K\right). \quad (45)$$



Obrázek 9: Schéma vysokofrekvenčního skvidu a jeho zapojení s rezonančním obvodem.



Obrázek 10: Závislost magnetického pole ve vf. skvidu na externím mg. poli pro $\beta_L = 0.7$ (modrá křivka) a $\beta_L = 10$ (černá křivka).

Skvidy měří změnu magnetického pole, vhodnou volbou počátečního toku Φ proto můžeme eliminovat integrační konstantu K a v dalším textu tedy pro přehlednost zvolíme $K = 0$.

Pro $\beta_L < 1$ má rovnice (45) charakter jednoznačné funkce, ale pro $\beta_L > 1$ se závislost stává víceznačnou (viz obr. 10), což vede k hysteretnímu chování. Do vysokofrekvenčního skvidu se ovšem přivádí nejenom měřené vnější (pomalu se měnící) magnetické pole, ale je do něj navázáno i vysokofrekvenční magnetické pole tvořené cívkou rezonančního LC obvodu (viz obr. 9). Pokud je amplituda kmitů pole tvořeného rezonančním LC obvodem dostatečně vysoká a zároveň platí $\beta_L > 1$, vykazuje skvid hysteretzi, jak je na obr. 10 naznačeno červenou přerušovanou čarou. (V příkladu vynesném do tohoto obrázku osciluje vnější pole s amplitudou necelé $2\Phi_0$ okolo střední hodnoty $0,5\Phi_0$ dané jen pomalu se měnícím měřeným polem.) Hystereze ovšem vede ke ztrátám, tedy ke snížení kvality celého rezonančního obvodu a tím ke snížení amplitudy kmitů napětí rezonančního obvodu. Při změně vnějšího měřeného pole se hysteretní smyčka posouvá, přičemž se mohou měnit počet přeskoků mezi větvemi závislosti (45) a hysteretní ztráty. Sledováním amplitudy kmitů napětí rezonančního obvodu tak lze určovat změny měřeného vnějšího magnetického pole. V praxi i vf. skvid bývá provozován ve zpětnovazební konfiguraci, kde jsou změny měřeného vnějšího pole kompenzovány polem další cívkou.