Relativní pohyb; setrvačné síly

`fikt7d.TEX 2011-11-01`

jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

Historie:
`Fikt7d.tex`: Doplněny „vazby“ a opraveny „síly“ na „vlivy“ v pozn. 2 k 1.3; vektory šipkou
`Fikt7c.tex`: Oprava – vymazán chybný člen $+\vec{\Omega} \times \vec{V_0}$ z unášivého zrychlení v kap. 5
`Fikt7b.tex`: Upřesněn výklad v odst. 4.2.2 a vynechán málo srozumitelný zápis dr/dt
`Fikt7a.tex`: Výchozí text

Abstrakt: Článek velmi detailně odvozuje kinematiku i dynamiku hmotného bodu při popisu v neinerciálním systému, např. Coriolisovu sílu při popisu na rotující Zemi.

1 Jak se správně chovat v nesprávných situacích

1.1 Slušné chování dítěte

Výchova dítěte začíná v útlém dětství v rodině. Dítko ze dozví, jak se „standardně“ správně chovat: nemá moc křičet, má slušně a věcně odpovídat na otázky, nemá lhát apod. Tato pravidla jsou celkem jednoduchá a srozumitelná, a proto i celkem snadno zapamatovatelná.

Problém je ale v tom, že ne každá situace je „standardní“. Na hodného starého dědečka se musí křičet, protože nedoslýchá. Tetičce se neříká (podle pravdy), že je protivná. A vůbec, než se řekne pravda cizímu člověku, musí se uvážit, zda má vůbec *on* právo mou pravdu znát a *já* právo ji sdělit. Někdy je správné docela i zalhat. Dítko záhy zjišťuje, že nestandardních situací je hodně.

Naštěstí ani v nestandardních situacích není dítě ztraceno a bezradné. V podstatě stačí uvážit, co v takové situaci přebývá nebo čeho se nedostává a podle toho pak něco ubrat nebo přidat ke standardnímu chování.

$\longleftrightarrow$ Dítě nakonec zjistí, že i ono samo je stejně „nestandardní“, nesprávné a obyčejné jako všichni ostatní lidé kolem. Pak si poradí i s tím, že opravdu „standardní“ situace vlastně nenastává nikdy. To už pak ovšem nebude dítě, ale dospělý člověk.

1.2 Slušné chování klasické částice

1.2.1 Co je to klasická částice

Při výuce klasické mechaniky je to jako při výchově dítěte. Naším dítětem bude hmotné těleso, ale zatím těleso co nejjednodušší – takové, aby jeho vlastní rozměry byly v dané úloze zanedbatelné. Budeme ho tedy pokládat za *hmotný bod*.

Vyšetřujeme-li pád kamínku na Zemi, můžeme v prvním přiblížení brát kamínek jako hmotný bod, Zemi ovšem ne. Ale sledujeme-li pohyb Země kolem Slunce, můžeme v prvním přiblížení brát Zemi jako hmotný bod. Při popisu Mléčné dráhy můžeme uvažovat celou Sluneční soustavu za jediný hmotný bod.

1.2.2 Poloha bodu. Polohový vektor

Polohu tělesa určujeme vždycky vůči něčemu jinému, např. vůči jiným, „vztažným“ tělesům. Abstrakcí vznikne ze vztažných těles *vztažná soustava* $\mathcal{S}$. Ta je určená dvěma atributy:

počátek (souřadnic), což je bod zpravidla značený O nebo P (z lat. origo, -inis, *f.* = počátek). Z počátku vycházejí

souřadnicové osy zpravidla značené x, y, z. V *kartézské vztažné soustavě* jsou souřadnicové osy navzájem kolmé, orientované podle pravé ruky a mají stejná měřítka.

Poloha každého bodu B v prostoru je tedy určena trojicí čísel (x, y, z), zvanými jeho *kartézské souřadnice*. Také říkáme, že je bod určen *polohovým vektorem* $\vec{R}$ vycházejícím z počátku a končícím v bodě B; tučná písmena značí vektor[1]. Pohybuje-li se bod, závisí jeho poloha na čase t, což zapisujeme $\vec{R} = \vec{R}(t)$.

[1]Připomeňme, že vektor je veličina popsaná třemi souřadnicemi anebo velikostí a směrem v prostoru, pro kterou jsou definovány známé operace (sčítání = skládání vektorů, skalární a vektorový součin atd.)

1.3 Jak se pohybuje (slušná) částice

První Newtonův zákon (zákon setrvačnosti) nám říká, co dělá volná[2] částice za „standardních“ okolností:

$\boxed{\textit{Volná částice se pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo stojí).}}$

Když měříme její polohu v newtonovském absolutním prostoru a čase (což je „ta nejsprávnější“ vztažná soustava $\mathcal{S}_0$), zjistíme, že souřadnice volné částice závisejí na čase lineárně[3]. Volná částice má tedy rychlost neproměnnou a zrychlení nulové. Pokud stojí, je dobře; pokud se pohybuje (rovnoměrně přímočaře), je taky dobře a říkáme, že se pohybuje *setrvačností*[4]. Setrvačnost – latinsky inertia – je vlastností každé částice s hmotností $M > 0$.

A teď z druhé strany. Určení polohy, a tím i popis a klasifikace pohybu, závisí ovšem na volbě vztažné soustavy. Natočíme-li vztažnou soustavu kolem počátku, zůstane polohový vektor týž, ale bude popsán jinými souřadnicemi. Zvolíme-li počátek vztažné soustavy jinde, změní se i polohový vektor. Vztažnou soustavu nazýváme *inerciální*, jestliže při měření v ní má každá volná částice nulové zrychlení (tedy se pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo stojí). Vztažná soustava $\mathcal{S}_0$ absolutního prostoru a času je tedy inerciální. Víme však již od Galilea, že inerciální je nejenom $\mathcal{S}_0$, ale i každá vztažná soustava $\mathcal{S}$, která se vůči $\mathcal{S}_0$ pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo stojí). Souřadnice volné částice měřené v kterékoli inerciální soustavě totiž také závisejí na čase lineárně.

Otázka: Když inertia znamená setrvačnost, proč označujeme přívlastkem „inerciální“ vztažnou *soustavu*, a nikoli *částici*? Odpověď: Setrvačnost je sice vlastností částice, ale její polohu, a tedy ověření toho, jak se pohybuje, zjišťujeme vůči konkrétní vztažné soustavě. Kdyby se nám tato soustava pohybovala pod rukama, naměřili bychom v ní jiné hodnoty polohy a jejich závislost na čase by nemusela být lineární. Takovou soustavu bychom nazvali *neinerciální*.

1.3.1 Rychlost

Polohový vektor $\vec{R}_0 \equiv \vec{R}(t_0)$ nám říká, kde je částice teď, v čase t_0. Rychlost $\vec{V}$ nám k tomu doplní, kde bude za chvilku – za dobu Δt, tedy v čase $t = t_0 + \Delta t$. Zhruba řečeno, při rychlosti $\vec{V}$ bude částice za dobu Δt v místě

$$\vec{R} = \vec{R}(t_0 + \Delta t) = \vec{R}_0 + \vec{V}\Delta t. \tag{1}$$

Pokud se rychlost během doby Δt nemění, pak tento vzorec platí přesně. Pokud se rychlost s časem mění, pak buď za $\vec{V}$ vezmeme střední rychlost částice[5] v době Δt, nebo zvolíme Δt co nejmenší – tak malé, abychom mohli tolerovat chybu danou předpokladem, že se rychlost $\vec{V}$ za tuto dobu prakticky nezměnila.

Známe-li již kalkul, provedeme limitu $\Delta x \to 0$; tím dostaneme přesné

$$\vec{R} = \vec{R}(t_0 + \mathrm{d}\, t) = \vec{R}_0 + \vec{V}\ \mathrm{d}\, t \tag{2}$$

a po sečtení přírůstků polohy ve všech po sobě jdoucích dobách od času t_0 do t_1 dostaneme

$$\vec{R}(t_1) = \vec{R}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{V}(t')\ \mathrm{d}\, t' \tag{3}$$

pro libovolný čas $t_1 \geq t_0$.

1.3.2 Zrychlení

Tak jako rychlost $\vec{V}$ určuje, jak se mění poloha $\vec{R}$, tak zase zrychlení $\vec{A}$ určuje, jak se mění rychlost $\vec{V}$. Úplně stejně jako výše odvodíme pro rychlost vztahy

$$\vec{V} = \vec{V}(t_0 + \Delta t) = \vec{V}_0 + \vec{A}\Delta t. \tag{4}$$

[2] Částice je volná, když na ni nepůsobí žádné vlivy (síly), resp. když se všechny působící síly navzájem vyruší.
[3] Do lineární závislosti se samozřejmě vejde i speciální případ, že se její souřadnice s časem nemění vůbec – částice stojí.
[4] Pozor: *setrvačností* ano, ale nikoli setrvačnou *silou*! Na rovnoměrný přímočarý pohyb částice žádnou sílu nepotřebuje.
[5] To je samozřejmě logický kruh, protože právě takhle se střední rychlost na intervalu počítá.

$$\vec{V}(t_1) = \vec{V}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(t') \, \mathrm{d}\, t' \tag{5}$$

se stejnou platností a omezeními.

1.4 Zákon síly

Co když částice není volná a když na ni působí zvnějška nějaké síly $\vec{F}$? V takovém případě jí úhrnná síla $\vec{F}$ udělí zrychlení $\vec{A}$ podle 2. Newtonova zákona:

$$M\vec{A} = \vec{F}. \tag{6}$$

1.4.1 Zákon síly za ne zcela správných okolností

Když částice není volná proto, že je podrobena vazbám (tedy omezením v pohybu, např. je uvázaná na provázku nebo klouže v koleji), tak můžeme vazby nahradit *vazbovými silami* s výslednicí $\vec{F}_\mathrm{v}$:

$$M\vec{A} = \vec{F} + \vec{F}_\mathrm{v}. \tag{7}$$

Zřejmě se nic podstatného nezmění, když vazbové síly přidáme k silám „obyčejným“[6] a pravou stranu budeme nadále psát prostě $\vec{F}$ tak, jak to bylo v rov. 6. Ta nám tedy zůstává základní pohybovou rovnicí. Ale co když soustava, ve které chceme částici popisovat, není inerciální? (Budeme ji za trest značit malým písmenem $\mathcal{s}$.) Zajímá-li nás Foucaltovo kyvadlo nebo pohyb pasátů na Zemi, musíme uvážit, že Země, na níž a vůči níž provádíme měření, se otáčí kolem své osy. Soustava $\mathcal{s}$ s ní spjatá proto není inerciální, jenže popis „mimo Zemi“ by byl evidentně nepraktický. Uvažme nyní, co v novém popisu zůstává a co se mění:

- (stejné) Hmotnost částice M je na vztažné soustavě nezávislá[7].
- (stejné) Síly $\vec{F}$ popisují interakci mezi částicemi, a ta rovněž nezávisí na tom, kdo ji odkud popisuje. Obě dynamické[8] veličiny tedy zůstávají stejné, na volbě vztažné soustavy nezávislé.

  Pokud ovšem chceme vektory vyjádřit ve složkách, pak na volbě vztažné soustavy záleží: jednak se mění poloha působiště síly, jednak – pokud se $\mathcal{s}$ vůči $\mathcal{S}$ otáčí – se s časem mění složky v_k každého vektoru $\vec{v}$ vyjadřované v $\mathcal{s}$ (tj. jako kombinace $\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^k$ otáčejících se vektorů $\vec{e}^k$ báze v $\mathcal{s}$. I kdyby se totiž vektor $\vec{v}$ sám vůči $\mathcal{S}$ neměnil, točí se báze $\vec{e}^k$ vůči $\mathcal{S}$.
- (změna) Zrychlení $\vec{A}$ je časovou změnou rychlosti $\vec{V}$ a ta je časovou změnou polohy $\vec{R}$. Počítáme ho z časového průběhu polohy částice jako

  $$\vec{A} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}; \qquad \vec{V} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}.$$

  Jakmile se tedy vztažná soustava $\mathcal{s}$, v níž počítáme, pohybuje vůči $\mathcal{S}$ jinak než rovnoměrně přímočaře (a je tedy neinerciální), pak každá derivace polohového vektoru počítaná v $\mathcal{s}$ vnese dodatečný příspěvek do výrazu pro zrychlení. (Také se bude měnit vyjádření vektoru ve složkách u vektoru síly i u vektoru zrychlení, a to u obou stejně.)

Umíme-li ovšem popsat pohyb $\mathcal{s}$ vůči $\mathcal{S}$, dovedeme také spočítat, jak se v rov. 6 „nestandardnost“ (=neinerciálnost) vztažné soustavy $\mathcal{s}$ při výpočtu projeví. Pak můžeme dodatečný příspěvek vhodným způsobem zase odečíst. Tím dostaneme pohybové rovnice v takovém tvaru, že budou platné i v neinerciální soustavě.

$\longleftrightarrow$ A je to podobné jako s přerodem dítěte v dospělého. Můžeme totiž nejprve odvodit pohybové rovnice v nejobecnějších křivočarých souřadnicích. Pak do nich můžeme zahrnout, že prostor a čas spolu úzce souvisejí (přes konstantní rychlost světla). Nakonec si uvědomíme, že kvůli existenci gravitace[9] *neexistuje* žádná inerciální soustava ($\mathcal{S}_0$, tedy ani $\mathcal{S}$). Ale naše nejobecnější pohybové rovnice pro svou platnost již žádnou inerciální soustavu nepotřebují, a proto platí i tehdy. Tím už pak ovšem nejsme v klasické mechanice, ale zvládli jsme obecnou teorii relativity.

---

[6] Vazba se ostatně prakticky vždy realizuje silami (pevností materiálu apod.).

[7] To je pravda v rámci nerelativistické fyziky. V relativitě bychom si uměli také poradit, ale tím se teď nezdržujme.

[8] Připomeňme, že kinematické veličiny (poloha $\vec{R}$, čas T, rychlost $\vec{V}$, zrychlení $\vec{A}$) popisují, *jak* pohyb probíhá. Dynamické veličiny (hmotnost M, síla $\vec{F}$) popisují, *proč* tak probíhá.

[9] Žádná volná částice totiž neexistuje: není čím odstínit gravitaci, když působí na všechny hmoty úplně stejně!

1.5 Jak to popsat co nejvýhodněji

1.5.1 Čeho v popisu používat

Pro popis dějů v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ jsou vhodné takové pohybové rovnice, v nichž se budou vyskytovat

- *souřadnice zkoumaných objektů* vyjádřené v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ (např. že na Zemi se na severní polokouli stáčejí pasáty doprava – vůči Zemi);
- pouze *popis neinerciální soustavy $\mathcal{s}$ samotné* vyjádřený v soustavě inerciální $\mathcal{S}$ (např. že Země se točí od západu k východu – vůči sluneční soustavě).

1.5.2 Jak toho používat

Víme, že neinerciálnost $\mathcal{s}$ nám změnila hodnoty *kinematické* veličiny, mj. zrychlení. Stačilo by tedy přepočíst hodnoty zrychlení ze soustavy neinerciální do inerciální. To by ale v případě otáčející se Země znamenalo popis, při kterém by vztažná soustava vůči Zemi ujížděla – v Praze – rychlostí skoro 300 m/s na západ, což by určitě nebylo praktické.

Proto učiníme něco rafinovanějšího: nebudeme vůbec hovořit o přepočtu zrychlení do „správných" souřadnic. Místo toho *důsledně zachováme i v neinerciální soustavě tvar rov. 6.* Na levé straně zapíšeme zrychlení $\vec{a}$ měřené v $\mathcal{s}$ (formálně stejně, jako tomu bylo v inerciální soustavě), zatímco vše ostatní (tedy rozdílové zrychlení $\vec{a}_\Delta = \vec{A} - \vec{a}$ vynásobené hmotností M) převedeme s opačným znaménkem na pravou stranu a tam ho budeme interpretovat jako novou *dynamickou* veličinu – *setrvačnou sílu.* Tu tedy zavádíme navíc, popisujeme-li (jakýkoliv) pohyb v neinerciální soustavě. Shrňme znovu:

- spočítáme rozdíl $\vec{a}_\Delta = \vec{A} - \vec{a}$ mezi vyjádřením zrychlení v $\mathcal{S}$ a $\mathcal{s}$. Rov. 6 (tj. $M\vec{A} = \vec{F}$) má tedy zatím tvar
$$M(\vec{a} + \vec{a}_\Delta) = \vec{F};$$
- výraz $M\vec{a}_\Delta$ převedeme (s opačným znaménkem) na pravou stranu; tím na levé straně zbyde jen zrychlení změřené v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$:
$$M\vec{a} = \vec{F} + (-M\vec{a}_\Delta);$$
- výraz $(-M\vec{a}_\Delta)$, který přibyl na pravé straně u sil, označíme $\vec{F}_\mathrm{s}$ a nazveme ho *setrvačnou silou*;
- takto vzniklá rovnice
$$M\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_\mathrm{s} \tag{8}$$
bude v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ správnou pohybovou rovnicí; součin hmotnosti M a zrychlení $\vec{a}$ částice (tentokrát změřeného v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$) je roven součtu všech sil (tentokrát včetně nové síly – setrvačné).

2 Jak se může pohybovat neinerciální soustava $\mathcal{s}$

2.1 Značení

V celém výkladu budeme pečlivě rozlišovat popis veličin v inerciální a v neinerciální soustavě. Značíme:

- v inerciální soustavě $\mathcal{S}$ veličiny velkým písmenem, složky vektorů závorkou s indexem $[\ ]_\mathsf{i}$;
- v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ veličiny malým písmenem, složky vektorů závorkou s indexem $[\ ]_\mathsf{n}$.

2.2 Nejobecnější přemístění soustavy $\mathcal{S}$

Libovolné *přemístění*[10] vztažné soustavy z $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}'$ se dá popsat stejně jako přemístění tuhého tělesa se soustavou pevně spojeného, tedy v klidu vůči této soustavě. (Takové zvláště názorné tuhé těleso je osový kříž tvořený třemi latěmi se stupnicí a stýkajícími se v počátku souřadnic).

2.2.1 Prototypy přemístění

Lze si představit tři nejobecnější prototypy přemístění:

posunutí: při posunutí se každý bod soustavy přesune v tomtéž směru o tutéž vzdálenost;

otočení kolem bodu B: Při otočení kolem bodu B zůstává zachována poloha tohoto bodu. Ostatní body prostoru obecně změní svou polohu, ale tak, aby se zachovaly jejich vzájemné vzdálenosti („prostor se nedeformuje“);

otočení kolem osy O: Při otočení kolem osy O zůstává zachována poloha každého bodu této osy. Ostatní body prostoru opět obecně změní svou polohu, ale opět tak, aby se zachovaly jejich vzájemné vzdálenosti.

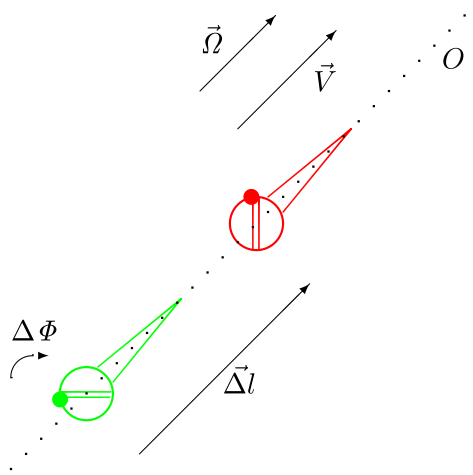
2.2.2 Zjednodušení

Ukážeme, že beze ztráty obecnosti můžeme „zredukovat svůj arzenál“ takto:

- každému otočení kolem bodu je ekvivalentní otočení kolem nějaké osy O (procházející tímto bodem);
- každé kombinaci posunutí a otočení kolem osy je ekvivalentní nějaké posunutí a otočení, kde směr posunutí je rovnoběžný s osou otočení (tzv. *kinematický šroub*, viz 2.2.3).

2.2.3 Kinematický šroub

Nejobecnější přemístění vztažné soustavy je tedy popsáno stejně jako nejobecnější přemístění tuhého tělesa, totiž *kinematickým šroubem*: během doby Δt dojde k posunutí $\Delta\vec{l}$ a k současnému otočení o úhel $\Delta\vec{\Phi}$ podél osy O rovnoběžné se směrem posunutí $\Delta\vec{l}$.



Obrázek 1: Kinematický šroub; $\vec{V} = \Delta\vec{l}/\Delta T$, $\vec{\Omega} = \Delta\vec{\Phi}/\Delta T$.

Celé přemístění za dobu Δt lze tedy popsat osou O a dvěma vektory, které jsou s ní rovnoběžné (ať už souhlasně či nesouhlasně):

- volný vektor posuvné rychlosti $\vec{V} = \Delta\vec{l}/\Delta t$

[10] Jde zatím o přemístění (poloha počáteční a koncová), nikoli přemisťování (pohyb – děj probíhající mezi krajními polohami).

- klouzavý vektor úhlové rychlosti $\vec{\Omega} = \Delta\vec{\Phi}/\Delta t$; klouže po ose O.

Nejobecnější *pohyb* vytvoříme posloupností takových přemístění postupně po sobě probíhajících v čase – asi jako kinofilm z jednotlivých snímků. S časem t se pak mohou obecně měnit[11] obě rychlosti $\vec{V}(t)$, $\vec{\Omega}(t)$ co do velikosti i co do směru (osa $O(t)$).

V duchu naší úmluvy značíme okamžitou osu kinematického šroubu písmenem O v soustavě $\mathcal{S}$, ale o v soustavě s. Z hlediska $\mathcal{S}$ se soustava s otáčí kolem osy O úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}(t)$.

Z hlediska s se naopak otáčí $\mathcal{S}$, a to úhlovou rychlostí $\vec{\omega}(t) = -\vec{\Omega}(t)$. Toho však nebudeme používat – v duchu kap. 1.5.1.

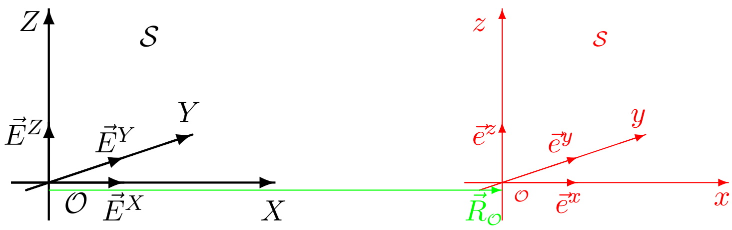
2.3 Rozděl a panuj

Partie setrvačných sil je pojmově a představově obtížná; vždyť jsme „vytvořili" dynamickou veličinu – setrvačnou sílu – zcela formálně, z kinematického popisu neinerciální vztažné soustavy! Sám výpočet je triviální při posuvném pohybu, ale při otáčivém pohybu je již složitější. Použijeme tedy staré latinské taktiky a budeme vyšetřovat oba pohyby samostatně, a to vždy nejprve v jejich nejjednodušší verzi.

3 Posuvný pohyb

3.1 Vztažné soustavy

Podstatu problému popíšeme nejjednodušeji, když orientujeme v obou soustavách $\mathcal{S}$ a s osy stejně, a to tak, aby se s pohyboval vůči $\mathcal{S}$ podél osy x. Jednotkové vektory báze $\vec{e^x}$, $\vec{e^y}$, $\vec{e^z}$ soustavy s jsou zřejmě tytéž jako odpovídající jednotkové vektory báze $\vec{E^X}$, $\vec{E^Y}$, $\vec{E^Z}$ soustavy $\mathcal{S}$ a nemění se v průběhu času. Počátek o soustavy s má v s samozřejmě trvale polohový vektor nulový: $\vec{r}_o(t) = \vec{0}$, zatímco v v $\mathcal{S}$ bude jeho polohový vektor $\vec{R}_o(t)$ známou funkcí času popisující pohyb neinerciální soustavy.



Obrázek 2: Báze vztažných soustav při posuvu

Má-li bod B svůj polohový vektor $\vec{R}_B$ v $\mathcal{S}$ a $\vec{r}_B$ v s, je jeho relativní polohový vektor vůči počátku s roven

$$\vec{R}_B - \vec{R}_o = \vec{r}_B - \vec{r}_o. \tag{9}$$

Nalevo jsou veličiny z $\mathcal{S}$, napravo z s. Pravá strana je ovšem rovna $\vec{r}_B$, takže můžeme psát

$$\vec{R}_B(t) = \vec{R}_o(t) + \vec{r}_B(t), \tag{10}$$

ovšem s plným vědomím, že na pravé straně mícháme veličiny měřené v $\mathcal{S}$ a v s.

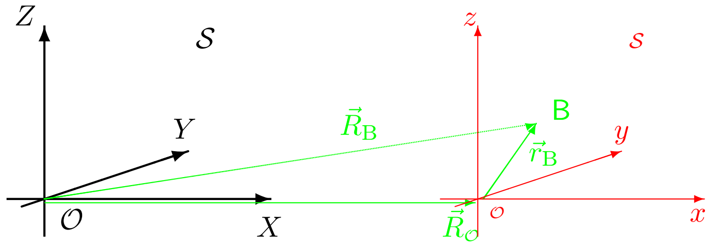
Opakovanou derivací podle času dostaneme vztahy mezi rychlostmi $\vec{V}$, $\vec{v}$ i zrychleními $\vec{A}$, $\vec{a}$:

$$\vec{V}_B(t) = \vec{V}_o(t) + \vec{v}_B(t) \tag{11}$$
$$\vec{A}_B(t) = \vec{A}_o(t) + \vec{a}_B(t). \tag{12}$$

Z hlediska soustavy s se ovšem pohybuje $\mathcal{S}$ (opačným směrem); je-li tedy $\vec{r}_{\mathcal{O}}$ polohový vektor počátku $\mathcal{O}$ soustavy $\mathcal{S}$ vyjádřený v s, pak

$$\vec{r}_{\mathcal{O}} = -\vec{R}_o, \qquad \vec{v}_{\mathcal{O}} = -\vec{V}_o, \qquad \vec{a}_{\mathcal{O}} = -\vec{A}_o. \tag{13}$$

[11] Mohou se měnit nespojitě i při spojitém pohybu; polohu totiž získáváme integrací rychlostí.



Obrázek 3: Polohové vektory

3.2 Popis vůči neinerciální soustavě s

V duchu odst.1.5.1 můžeme psát pohybovou rovnici v neinerciální soustavě s ve tvaru

$$M\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{\mathrm{s}}, \tag{14}$$

kde $\vec{f} = \vec{F}$ jsou skutečné síly působící na částici[12]) a kde jsme navíc zavedli setrvačnou sílu $\vec{f}_{\mathrm{s}}$

$$\vec{f}_{\mathrm{s}} = -M\vec{A}_{\mathcal{O}} \tag{15}$$

„působící“ na sledovaný bod B v soustavě s.

3.3 Velmi důležitá ideologie

Proč jsme dali v poslední větě předchozího odstavce ono „působení“ do uvozovek? Pročpak znevažujeme setrvačnou sílu?

Skutečné síly popisují opravdu *působení*, a to vždy mezi dvěma částicemi[13], tedy na zkoumanou částici od nějaké částice jiné. Ale setrvačná síla *nepopisuje* působení mezi dvěma částicemi; ona „působí“ na zkoumanou částici jaksi „odnikud“. Fakticky totiž na částici nepůsobí vůbec nic – to jenom my jsme si zavedli novou „sílu“ pro napravení toho, že pohyb částice popisujeme v neinerciální soustavě s. Proto se těmto dodatečně zavedeným silám říká také *zdánlivé*, *fiktivní*, *kinematické* apod. a jejich použití proto vždy doplňujeme upřesněním „… v soustavě s “, nerozumí-li se to z kontextu samo sebou.

Dále, částice je částice a „nenáleží“ žádné vztažné soustavě. Konstatujeme-li tedy v rozjíždějící se tramvaji, že na nás působí setrvačná síla a tlačí nás do sedadla, pak stejně oprávněně musíme konstatovat, že na domy, koleje, stromy atd. působí tatáž setrvačná síla. Protože však tyto objekty nemají za sebou tramvajové sedadlo, které by bylo v klidu (vůči tramvaji) a o které by se opřely, pohybují se všechny tyto objekty se zrychlením daným touto setrvačnou sílou, tj. dozadu (opět vůči tramvaji).

Toto vše si důkladně rozmyslete. Začátečník mívá totiž často zábrany: je ochoten počítat s odstředivou silou působící na broučka sedícího na podlaze kolotoče, ale váhá o působení setrvačných sil při popisu pohybu dravé mouchy sledující tohoto broučka a letící stále těsně nad ním, a vůbec si nepřipouští (byť stále při popisu vůči kolotoči) potřebu použít odstředivé síly pro popis vysoko nad kolotočem kroužícího kosa zaujatého broučkem i mouchou, nebo dokonce pro popis stromu stojícího opodál, z něhož vše sleduje se zájmem kosice. Chceme-li ale zkoumat fyziku na kolotoči (rozumí se: popisovat fyzikální děje z neinerciální vztažné soustavy spojené s otáčejícím se kolotočem), pak nutně zjistíme, že se např. domy na náměstí točí dokola kolem osy kolotoče. Zdůvodníme to tím, že na ně (v soustavě kolotoče) působí setrvačná síla odstředivá a Coriolisova, a to stejným právem jako na broučka, mouchu, kosa, kosici, strom, domy kolem i Slunce nad nimi všemi. Setrvačné síly jsou prostě univerzální daní odvedenou pohybovým rovnicím za to, aby byly platné i při popisu polohy (rychlosti a zrychlení) vůči neinerciálnímu systému, jakým je v tomto případě kolotoč.

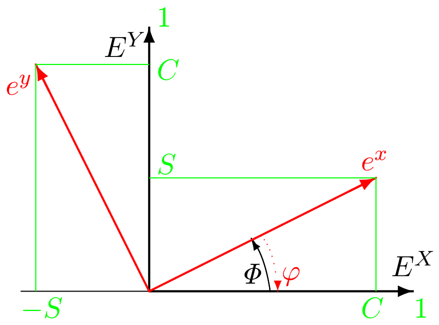
[12]Zápis $\vec{f}$ v s je opravdu v případě posuvného pohybu stejný jako $\vec{F}$ v $\mathcal{S}$, protože také vektory $\vec{e}$ báze s jsou stejné jako jim odpovídající vektory $\vec{E}$ báze $\mathcal{S}$.

[13]Těleso si prostě představíme složené z mnoha maličkých částic, které drží pohromadě silami (z hlediska tělesa vnitřními).

4 Otáčení

4.1 Báze, souřadnice bodu

Pro jednoduchost zvolíme soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ se společným počátkem a společnou osou $Z = z$. Osa z bude tedy „nezajímavá“ a budeme sledovat jen rovinu xy. Soustava $\mathscr{s}$ nechť je v ní pootočena vůči $\mathcal{S}$ o úhel $\Phi = \Phi(T)$, soustava $\mathcal{S}$ vůči $\mathscr{s}$ o úhel $\varphi = -\Phi$. Pro zkrácení pišme $\cos\Phi = C$, $\sin\Phi = S$, $\cos\varphi = c = C$, $\sin\varphi = s = -S$.



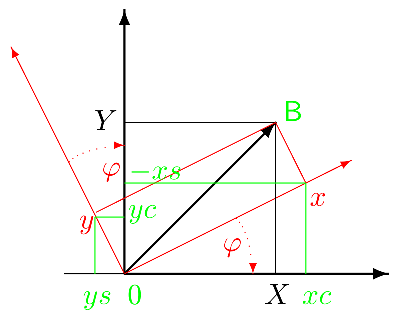
Obrázek 4: Vztažné soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ natočené vůči sobě

Pro jednotkové vektory bází obou soustav zřejmě platí (všimněte si značení složek indexy $_\mathsf{i}$ a $_\mathsf{n}$):

$$
\begin{array}{rcccccc}
\vec{E^X} & = & [1,0]_\mathsf{i} & = & c\vec{e^x} + s\vec{e^y} & = & [c,s]_\mathsf{n} \\
\vec{E^Y} & = & [0,1]_\mathsf{i} & = & -s\vec{e^x} + c\vec{e^y} & = & [-s,c]_\mathsf{n} \\
\vec{e^x} & = & [C,S]_\mathsf{i} & = & C\vec{E^X} + S\vec{E^Y} & = & [1,0]_\mathsf{n} \\
\vec{e^y} & = & [-S,C]_\mathsf{i} & = & -S\vec{E^X} + C\vec{E^Y} & = & [0,1]_\mathsf{n}
\end{array}
$$

Obecný zkoumaný bod B s polohovým vektorem $\vec{R} = \vec{r}$ má souřadnice

$$\vec{R} = [X,Y]_\mathsf{i} = X\vec{E^X} + Y\vec{E^Y} = \vec{r} = [x,y]_\mathsf{n} = x\vec{e^x} + y\vec{e^y} \tag{16}$$



Obrázek 5: Rozklad polohového vektoru v soustavách $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ ($\varphi < 0$, $s < 0$)

Rozpisem a porovnáním dostáváme (nezapomínejme, že $\varphi < 0$, a tedy i $s < 0$)

$$
\begin{array}{rrcll}
 & [x,y]_\mathsf{n} = x\vec{e^x} + y\vec{e^y} & = & xC\vec{E^X} + xS\vec{E^Y} - yS\vec{E^X} + yC\vec{E^Y} = X\vec{E^X} + Y\vec{E^Y}, & \\
\text{odkud} & X & = & xc + ys; & (17) \\
 & Y & = & -xs + yc & (18)
\end{array}
$$

4.2 Časové změny veličin

Při derivaci se zabýváme situacemi ve dvou různých okamžicích T, T'. V čase T jde o soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ svírající navzájem úhel $\varphi(T)$, v čase T' o soustavy $\mathcal{S}'$ a $\mathscr{s}'$ svírající úhel $\varphi' \equiv \varphi(T') \neq \varphi(T)$. Při výpočtu vůči $\mathcal{S}$ (vůči Newtonovu absolutnímu prostoru) je ovšem $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, $\mathscr{s} \neq \mathscr{s}'$ a $T = t$; časovou derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,T}|_\mathsf{i}$ v této soustavě značme prostě $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}$.

4.2.1 Časové změny vektorů báze

Počítejme nyní derivace veličin nejprve v soustavě $\mathcal{S}$. Zřejmě platí

$$\begin{array}{lllllllll}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E^X} & = & [0,0]_{\mathsf{i}} & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\vec{e^x}+s\vec{e^y}) & = & -\omega s\vec{e^x}+c\dot{\vec{e^x}}+\omega c\vec{e^y}+s\dot{\vec{e^y}} & = & \vec{0} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E^Y} & = & [0,0]_{\mathsf{i}} & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-s\vec{e^x}+c\vec{e^y}) & = & -\omega c\vec{e^x}-s\dot{\vec{e^x}}-\omega s\vec{e^y}+c\dot{\vec{e^y}} & = & \vec{0} \quad .\end{array}$$

Vynásobením první rovnice c resp. s, druhé $-s$ resp. c a jejich sečtením dostaneme ihned

$$\dot{\vec{e^x}} = -\omega\vec{e^y} = \Omega\vec{e^y}; \qquad \dot{\vec{e^y}} = \omega\vec{e^x} = -\Omega\vec{e^x} \quad .$$

Užitím vektoru $\vec{\Omega} = [0,0,\Omega]_{\mathsf{i}} = [0,0,\Omega]_{\mathsf{n}}$ a vektorového součinu lze psát stručněji

$$\dot{\vec{e^x}} = \vec{\Omega}\times\vec{e^x}; \qquad \dot{\vec{e^y}} = \vec{\Omega}\times\vec{e^y} \quad .$$

Pochopitelně platí i $\dot{\vec{e^z}} = \vec{\Omega}\times\vec{e^z}(=\vec{0})$.

Analogicky můžeme provést výpočet z hlediska soustavy s.

4.2.2 Časové změny polohového vektoru

Pohybuje-li se uvažovaný bod, můžeme vyjádřit v obou soustavách jeho rychlost; definujme

$$\vec{V} \equiv [\dot{X},\dot{Y}]_{\mathsf{i}} \quad , \qquad \text{resp.} \quad \vec{v} \equiv [\dot{x},\dot{y}]_{\mathsf{n}} \quad .$$

Vztah mezi nimi je složitější; nalezneme ho ovšem rovněž z uvedených definic.

Uvažujme z hlediska $\mathcal{S}$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X\vec{E^X}+Y\vec{E^Y}) = \dot{X}\vec{E^X}+X\dot{\vec{E^X}}+\dot{Y}\vec{E^Y}+Y\dot{\vec{E^Y}} = \dot{X}\vec{E^X}+\dot{Y}\vec{E^Y} = \vec{V},$$

neboť v $\mathcal{S}$ jsou $X\dot{\vec{E^X}}$, $Y\dot{\vec{E^Y}}$ rovny nule. Vyjádřeme nyní polohový vektor $\vec{R}$ jeho rozkladem podle báze v neinerciálním systému:

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\vec{e^x}+y\vec{e^y}) = \dot{x}\vec{e^x}+x\dot{\vec{e^x}}+\dot{y}\vec{e^y}+y\dot{\vec{e^y}} = \vec{v}+\vec{\Omega}\times\vec{r}\ .$$

Absolutní rychlost $\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$ (měřená v $\mathcal{S}$) je tedy rovna součtu *relativní rychlosti* $\vec{v}$ (měřené v soustavě s) a *unášivé rychlosti* $\vec{\Omega}\times\vec{r}$ (která je nenulová, i když bod vůči soustavě s stojí).

4.2.3 Časové změny obecného vektoru

Uvažujeme libovolný vektor $\vec{B} = [B_X,B_Y,B_Z]_{\mathsf{i}} = \vec{b} = [b_x,b_y,b_z]_{\mathsf{n}}$, obecně časově proměnný. Výše byl odvozen vzorec pro transformaci rychlosti, tedy pro $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$. Diferenciál $\mathrm{d}\vec{r}$ je však „prototypem“ vektoru vůbec (v tom smyslu, že vektorem nazýváme každou veličinu, která se transformuje jako $\mathrm{d}\vec{r}$). Proto analogicky jako výše je časová změna každého vektoru $\vec{B}$ rovna

$$\dot{\vec{B}} \equiv [\dot{B}_X,\dot{B}_Y]_{\mathsf{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b_x\vec{e^x}+b_y\vec{e^y}) = \dot{b}_x\vec{e^x}+b_x\dot{\vec{e^x}}+\dot{b}_y\vec{e^y}+b_y\dot{\vec{e^y}} \tag{19}$$

$$\dot{\vec{B}} = \dot{\vec{b}}+\vec{\Omega}\times\vec{b}\ . \tag{20}$$

Všimněte si dobře: časová změna vektoru v soustavě $\mathcal{S}$ je vyjádřena pomocí veličin měřených v soustavě s, ale rychlosti $\vec{\Omega}$ soustavy s vůči $\mathcal{S}$ (tedy přesně v duchu kap. 1.5.1).

4.2.4 Časová změna vektoru $\vec{\Omega}$

Ať vyjádříme vektor $\vec{\Omega}$ úhlové rychlosti soustavy s vůči $\mathcal{S}$ v jedné či druhé soustavě, budou si jeho časové derivace podle obou soustav rovny. Formálně je to vidět podle toho, že $\vec{\Omega}\times\vec{\Omega} = \vec{0}$.

4.2.5 Jiná značení

Rozlišení časové derivace v popisu v soustavě $\mathcal{S}$ od popisu v soustavě $\mathcal{s}$ bylo nahoře provedeno dvěma typy závorek $[\ ]_\mathsf{n}$, $[\ ]_\mathsf{i}$ a užitím velkých, resp. malých písmen pro vektory popisované v $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{s}$. V literatuře se užívá zápisů např.

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{B}} &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{B}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times \vec{B} \qquad \text{(Trkal, Mechanika HB a TT, 1956)} && (21)\\
\frac{\mathrm{d}\,\vec{B}}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}\,'\vec{B}'}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times \vec{B}' \qquad \text{(Hladík, Analytická mechanika – skripta)} && (22)\\
\frac{\mathrm{d}\,\vec{B}}{\mathrm{d}\,t} &= \frac{\mathrm{d}\,'\vec{B}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times \vec{B} \qquad \text{(Brdička – Hladík, Teoretická mechanika, 1987)} && (23)
\end{aligned}
$$

i jiných. V každém případě je podstatný *smysl* užitých symbolů. Jde o následující:

- zachytit skutečnost, že ve zvolené soustavě jsou vždy vektory báze této soustavy časově neproměnné vůči této soustavě, a proto vektor $\dot{\vec{A}}$ časové změny vektoru $\vec{A}$ se získá přímo derivací složek A_X, A_Y, A_Z vektoru;

- zdůraznit, která soustava byla zvolena pro zápis příslušné veličiny ve vzorci.

4.3 Zrychlení

Aplikujeme-li derivaci podle času opakovaně, dostaneme druhou derivaci – zrychlení. Je tedy

$$
\begin{aligned}
\vec{A} = \ddot{\vec{r}} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega}\,\times\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega}\,\times\right)\vec{r} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\mathrm{d}\,\vec{\Omega}}{\mathrm{d}\,t} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\right) + \left(\vec{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\vec{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \frac{\mathrm{d}\,\vec{\Omega}}{\mathrm{d}\,t} \times \vec{r}
\end{aligned}
$$

Členy postupně vyjadřují relativní, Coriolisovo, dostředivé a Eulerovo zrychlení.

5 Obecné polohy soustav

Nechť soustava $\mathcal{s}$ je navíc vůči $\mathcal{S}$ posunuta o $\vec{R}_0$; značme $\vec{V}_0 = \mathrm{d}\,\vec{R}_0/\,\mathrm{d}\,t$. Pak

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= \vec{R}_0 + \vec{r}\\
\vec{V} &= \frac{\mathrm{d}\,\vec{R}}{\mathrm{d}\,t} = \vec{V}_0 + \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} + \vec{\Omega} \times \vec{r}
\end{aligned}
$$

a absolutní zrychlení $\vec{A}$ lze vyjádřit součtem

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \vec{a}_r + \vec{a}_C + \vec{a}_u, \qquad \text{kde}\\
\vec{a}_r &= \frac{\mathrm{d}^2\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t^2} \qquad \text{je relativní zrychlení}\\
\vec{a}_C &= 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \qquad \text{je Coriolisovo zrychlení}\\
\vec{a}_u &= \vec{A}_0 + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} \qquad \text{je unášivé zrychlení.}
\end{aligned}
$$

6 Setrvačné síly

Pohybová rovnice $M\vec{A} = \vec{F}$ platí v inerciální soustavě. Zrychlení $\vec{a}$ v neinerciální soustavě je rovno $\vec{a} = \vec{A} - \vec{a}_\Delta$. Dále platí ovšem $m = M$. V neinerciální soustavě tedy upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$m\vec{a} = \vec{F} - m\vec{a}_\Delta = \vec{F} + \vec{F}_\mathrm{s}, \tag{24}$$

kde zavádíme tzv. *setrvačné síly* (neboli fiktivní, zdánlivé, kinematické) předpisem $\vec{F}_\mathrm{s} \equiv -m\vec{a}_\Delta$. Z dostředivého zrychlení vznikne (díky znaménku „$-$") **odstředivá síla**, která je rovna $\vec{F}_\mathrm{ods} = -m\Omega^2\vec{\varrho}$, kde $\vec{\varrho}$ je polohový vektor s počátkem posunutým po ose rotace tak, aby byl kolmý k $\vec{\Omega}$; z Coriolisova zrychlení odvodíme **Coriolisovu sílu** $\vec{F}_\mathrm{C} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$ atd. Tyto síly ovšem „působí" na *všechny* objekty popisované z hlediska neinerciální soustavy. Ty např. z hlediska kolotoče „nutí" budovy kolem, aby se pohybovaly po kruhových drahách kolem osy kolotoče apod. Jinými slovy, zavedeme-li je, můžeme i z hlediska kolotoče úspěšně popisovat svět, ať už předměty spojené s kolotočem či stojící mimo něj. Odstředivá, Coriolisova i unášivá síla tedy z hlediska Země točící se kolem vlastní osy správně popíšou pohyb Foucaltova kyvadla, stáčení pasátů i (zdánlivé) pohyby hvězd na obloze.

7 Slovní zmatky; dostředivá síla

Pojem odstředivé síly právě vyložený je sám o sobě dosti obtížný. Ale ještě horší je, že stejný termín – odstředivá síla – se užívá v podobném kontextu, ale pro něco zcela jiného.

7.1 (Vazbová) dostředivá síla

K tomu, aby se částice pohybovala rovnoměrně po kružnici, na ni musí působit nějaká síla, nejčastěji vazbová (provázek, koleje apod.). Tato síla působí při rovnoměrném pohybu částice do středu kružnice, a proto se nazývá *dostředivá síla*. Působí na částici. (Pokud ale pohyb nemá stálou rychlost, tak „dostředivá" síla *nemá* směr do středu kružnice.)

7.2 Odstředivá síla (působící na vazbu)

Pokládáme-li vazbovou dostředivou sílu za akci, pak reakcí k ní je síla, kterou působí částice na vazbu (provázek, ...). Někdy se tato síla nazývá *odstředivou*: „Koleje poškodila odstředivá síla projíždějících vlaků; ložisko vymlela odstředivá síla špatně vyváženého kola". Není to moc šťastné z více důvodu. Jednak tato síla v případě ložiska má fakticky směr do středu, nikoli od něj[14]. Ale především je tato síla něco úplně jiného než právě vyložená (setrvačná) odstředivá síla:

- nová odstředivá síla působí na vazbu (závěs, kolej...), zatímco setrvačná odstředivá síla „působila" na částici;
- nová odstředivá síla je ve vztahu akce – reakce s dostředivou silou, nutící částici k pohybu po kružnici, zatímco setrvačná odstředivá síla nemá k sobě žádnou reakci;
- nová odstředivá síla jakožto skutečná síla existuje při popisu v kterékoli vztažné soustavě, zatímco setrvačná odstředivá síla se vyskytuje *výhradně* při popisu v rotující, neinerciální soustavě.

Nicméně, říká se to takto, a těžko najít něco jiného, co by se ujalo[15]. Nezbývá než uvážit vždy, o co se jedná: tři výše uvedené rozdíly vám určitě pomohou jednoznačně rozhodnout.

[14] No vážně: osa ložiska je prý vymletá *odstředivou silou* – ale je snad nafouklá od středu osy, ven? Nikoli, je vmačkaná, a to samozřejmě ke středu osy, dovnitř!

[15] Zkuste přemluvit lidi, aby říkali *teplotoměr* namísto *teploměr*, když měří teplotu, a ne teplo!