1 Skalární vlna a její matematický popis

Pojmů vlna a vlnění se v různých oblastech fyziky a techniky používá k označení velmi odlišných jevů. Připomeňme jen pojmy jako akustická vlna, povrchová vlna, rázová vlna, elektromagnetická vlna, gravitační vlna. Je proto dosti obtížné najít něco, co je všem těmto jevům společné, a je asi nemožné nabídnout nějakou definici, která by zahrnovala všechny jevy označované jako vlna nebo vlnění.

Někdy se setkáváme s tím, že se vlněním označuje proces, při němž se prostorem šíří energie, aniž se současně přenáší hmotnost. Toto vymezení skutečně obstojí pro velkou oblast fyziky. Těžko však obstojí, chceme-li používat pojmů jako de Broglieova vlna, elektronová vlna apod. V elektronové a neutronové difraktografii však tyto pojmy zdomácněly do té míry, že si lze jen obtížně představit, že by mohly být něčím nahrazeny.

Učebnice fyziky většinou postupují tak, že uvedou konkrétní příklad nějakého vlnění a ukáží, že vyhovuje jisté rovnici, které se říká vlnová rovnice. Potom, kdykoliv se setkají s procesem, který vyhovuje obdobné rovnici, nazývají tento proces vlněním. Tohoto postupu se přidržíme i my.

1.1 Vlna a vlnová rovnice

Vystačíme s nejjednodušším tvarem vlnové rovnice, který charakterizuje vlnění v bodech homogenního, izotropního, nedisperzního a neabsorbujícího prostředí neobsahujících zdroje vlnění. Jak je známo (viz např. [1], str. 301), jde v tomto případě o lineární parciální diferenciální rovnici druhého řádu

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Funkci $\Psi(\vec{r},t)$ se říká vlnová funkce a její fyzikální význam závisí na tom, o jaké vlnění jde. U akustického vlnění je to výchylka z rovnovážné polohy, v případě elektromagnetického vlnění je to elektrická intenzita nebo magnetická indukce nebo některá složka těchto vektorů atd. Ve skalární teorii difrakce se pro vlnovou funkci Ψ často používá názvu rozruch (disturbance). $\vec{r}$ značí polohový vektor a t čas. Laplaceův operátor ∇^2 je diferenciální operátor (viz např. [1], str. 144), jenž obsahuje nejvýše druhé derivace podle prostorových souřadnic a jeho konkrétní tvar závisí na dimenzi prostoru a na použité soustavě souřadnic. V E_3 má v kartézských souřadnicích x_1, x_2, x_3 tvar

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{2}$$

Protože na levé straně vlnové rovnice (1) jsou druhé derivace podle souřadnic a na pravé straně druhá derivace podle času, je zřejmé, že veličina v má rozměr rychlosti a má význam tzv. fázové rychlosti. (V našem případě lze mluvit o konstantě v, neboť prostředí, v němž se vlnění šíří, je homogenní, izotropní a nedisperzní.)

Plocha $\Psi(\vec{r},t_o) =$ konst., v jejíchž bodech má v určitém okamžiku t_o vlnová funkce touž hodnotu, se nazývá vlnoplocha. (Poznámka k pojmu vlnoplocha: V teorii vlnění jsou velmi významné tzv. harmonické vlny. Počínaje odst. 1.4 se budeme zabývat pouze tímto typem vln. U harmonických vln se však pojmu vlnoplocha používá v jiném smyslu, než jak jsme jej právě zavedli – viz odst. 1.8.)

V závislosti na počátečních a okrajových podmínkách existuje velmi mnoho různých řešení vlnové rovnice. V následujících dvou odstavcích odvodíme dva typy řešení: Tzv. rovinné vlny, když vlnoplochy jsou roviny a kulové vlny, když vlnoplochy jsou kulové plochy.

1.2 Rovinné vlny

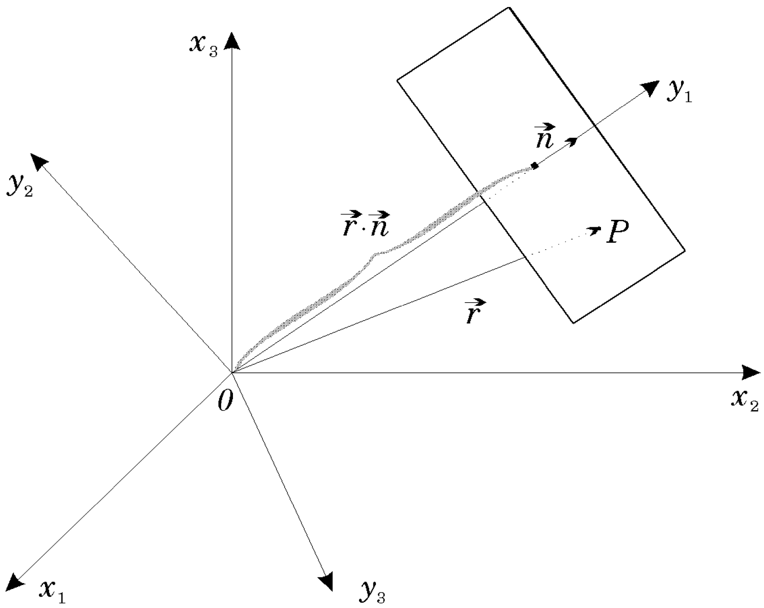
Uvažujme o vlnění, jehož vlnoplochy jsou roviny kolmé na jednotkový vektor $\vec{n}\,(n_1, n_2, n_3)$. Vlnoplochy mají tedy rovnici $\vec{r}\cdot\vec{n} =$ konst. (srov. obr. 1) a vlnová funkce takového vlnění musí mít tvar

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}\cdot\vec{n}, t). \tag{1}$$

Takové vlnění má jednorozměrnou povahu. Formálně to nahlédneme, zavedeme-li novou soustavu souřadnic $O, y_1\,, y_2\,, y_3$ s osou y_1 ve směru vektoru $\vec{n}$. Rovnice vlnoplochy pak je

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = y_1 \tag{2}$$

a hodnota souřadnice y_1 má význam vzdálenosti vlnoplochy od počátku O (viz obr. 1). Derivováním vlnové funkce $\Psi(\vec{r}\cdot\vec{n}, t)$ dostaneme



Obrázek 1: Soustavy souřadnic při odvozování řešení vlnové rovnice ve tvaru rovinné vlny.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial\Psi}{\partial(\vec{r}\cdot\vec{n})}\frac{\partial(\vec{r}\cdot\vec{n})}{\partial x_1} = \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}\,n_1,\\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}\,n_1^2.\end{aligned}$$

Podobně

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}\,n_2^2, \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}\,n_3^2.$$

Takže

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1^2}$$

a vlnová rovnice 1.1(1) přechází v jednorozměrnou vlnovou rovnici (říká se jí též rovnice kmitů struny)

$$\frac{\partial^2 \Psi(y_1,t)}{\partial y_1^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi(y_1,t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Abychom nalezli její řešení, zavedeme nové proměnné

$$z_1 = y_1 - vt, \quad z_2 = y_1 + vt. \tag{4}$$

(Nepřehlédněme, že touto substitucí se do řešení vnáší vztah mezi prostorovými souřadnicemi a časem.) Derivováním vyjádříme druhé derivace v rovnici (3) derivacemi podle nových proměnných:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial y_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_2},\\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1^2} + 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_2^2},
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial t} = v\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial z_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_2}\right),\\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= v^2\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1^2} - 2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_2^2}\right).
\end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_1 \partial z_2} = 0. \tag{5}$$

Obecným řešením této rovnice je součet

$$\Psi = \Psi_1(z_1) + \Psi_2(z_2) = \Psi_1(y_1 - vt) + \Psi_2(y_1 + vt), \tag{6}$$

kde Ψ_1 a Ψ_2 jsou libovolné funkce, mající ovšem požadované derivace. S pomocí vztahu (2) se vrátíme k původním proměnným $\vec{r}\cdot\vec{n},\ t$ a dostaneme

$$\Psi(\vec{r}\cdot\vec{n}, t) = \Psi_1(\vec{r}\cdot\vec{n} - vt) + \Psi_2(\vec{r}\cdot\vec{n} + vt). \tag{7}$$

I když Ψ_1 a Ψ_2 jsou libovolné funkce, můžeme určit směr šíření vln, které tyto funkce představují. Ukážeme, že funkce $\Psi_1(\vec{r}\cdot\vec{n} - vt)$ představuje vlnu, jež se šíří rychlostí v ve směru $\vec{n}$ a podobně $\Psi_2(\vec{r}\cdot\vec{n} + vt)$ vlnu, šířící se rychlostí v ve směru $-\vec{n}$. Zvolme nějaký časový interval Δt. Nahradíme-li ve funkci $\Psi_1(\vec{r}\cdot\vec{n} - vt)$ proměnné $\vec{r},\ t$ výrazy $\vec{r} + v\vec{n}\Delta t,\ t + \Delta t$, nezmění se hodnota funkce Ψ_1. Jinými slovy, za čas Δt se vlna posune o $v\vec{n}\Delta t$, tj. šíří se rychlostí $v\vec{n}$. Podobně vlnová funkce $\Psi_2(\vec{r}\cdot\vec{n} + vt)$ nezmění svou hodnotu, když se proměnné $\vec{r}, t$ nahradí výrazy $\vec{r} - v\vec{n}\Delta t,\ t + \Delta t$. Funkce Ψ_2 tedy představuje vlnu, jež se šíří rychlostí $-v\vec{n}$.

1.3 Kulové vlny

Má-li mít vlnění kulové vlnoplochy se středem v počátku souřadnic, musí mít vlnová funkce tvar $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t)$, kde

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{1}$$

Laplaceův operátor má v tomto případě (v E_3) tvar

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{2}$$

Lze se o tom přesvědčit derivováním:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{x_1^2}{r^3}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{x_1^2}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}.
\end{aligned}
$$

Podobně pro derivace podle x_2 a x_3. Po dosazení do 1.1(2) pak použitím (1) dostaneme vlnovou rovnici pro kulové vlny ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}.$$

Po vynásobení obou stran této rovnice faktorem $r \neq 0$ nahlédneme, že ji lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (r\Psi)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Dostáváme opět rovnici kmitů struny (srov. 1.2(3)), nyní však pro funkci $r\Psi(r,t)$. Takže řešení rovnice (3) má tvar (srov. 1.2(6))

$$r\Psi(r,t) = \Psi_1(r - vt) + \Psi_2(r + vt),$$

tj.

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{r}\,\Psi_1(r - vt) + \frac{1}{r}\,\Psi_2(r + vt), \tag{4}$$

kde Ψ_1 a Ψ_2 jsou libovolné funkce mající požadované derivace. Funkce $\frac{1}{r}\Psi(r - vt)$ představuje tzv. divergentní kulovou vlnu, tj. vlnu rozbíhající se z počátku rychlostí v. Naproti tomu funkce $\frac{1}{r}\Psi(r + vt)$ je konvergentní kulová vlna, tj. vlna sbíhající se rychlostí v do počátku.

1.4 Harmonické vlny

Rovinné a kulové vlny ve tvaru 1.2(7) a 1.3(4) jsou velmi obecné. Mohou představovat vlnu tvořenou jen nějakým pulsem, nebo ustálené vlnění nebo něco mezi tím. Nelze tedy s těmito výrazy spojovat nějakou periodicitu, např. vlnovou délku nebo frekvenci. K tomu je třeba vlnění dále specifikovat.

Pro teorii vlnění jsou důležité tzv. harmonické vlny. Jsou definovány tím, že vlnová funkce se ve všech bodech $\vec{r}$ mění s časem t harmonicky, tj. jako funkce $\cos \omega t$ nebo $\sin \omega t$ nebo jejich lineární kombinace. Tím do teorie vlnění vstupují veličiny vztahující se k časové periodičnosti vlnění: Nejmenší perioda T funkcí $\cos \omega t,\ \sin \omega t$ zřejmě je $T = 2\pi/\omega$, takže úhlová frekvence ω a frekvence ν jsou určeny vztahy

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \nu = \frac{1}{T}. \tag{1}$$

Důležitost harmonických vln je založena na tom, že řešení vlnové rovnice metodou separace proměnných vede na harmonické vlny a vyjadřuje obecné řešení vlnové rovnice superpozicí harmonických vln (viz odst. 1.6 v dalším textu). Význam představy harmonických vln nesnižuje ani to, že ve skutečnosti neexistují – předpokládají totiž neohraničené trvání a jsou pouze matematickým objektem. Podstatné je, že každou existující vlnu lze vyjádřit jako superpozici harmonických vln (tzv. vlnové klubko), což má nesmírný teoretický i praktický význam.

Požadavkem harmoničnosti jsou do značné míry určeny funkce charakterizující harmonické rovinné a harmonické kulové vlny.

Konkrétně, rovinnou harmonickou vlnu popisuje podle 1.2(7) funkce

$$\Psi(\vec{r}\cdot\vec{n} \mp vt) = a\,\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{v}\right) + \alpha\right], \tag{2}$$

v níž a a α jsou konstanty, znaménko mínus platí pro vlnu šířící se ve směru $\vec{n}$ a znaménko plus pro vlnu šířící se ve směru $-\vec{n}$. Hodnota vlnové funkce (2) v bodech $\vec{r}$ a $\vec{r} + \lambda\vec{n}$ je zřejmě táž, pokud

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega}. \tag{3}$$

Veličina λ se nazývá vlnová délka. Vlnovou délkou tedy rozumíme nejmenší prostorovou periodu rovinné vlny ve směru šíření vlnění. To je podstatné, neboť to vysvětluje, proč veličina, jež ve vztahu k prostorovým proměnným odpovídá úhlové frekvenci ω, je vektor. Nazývá se vlnový vektor a z výrazu (2) je zřejmé, že je účelné ji definovat výrazem

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v}\vec{n}. \tag{4}$$

Dosazením do vztahu (4) za ω/v ze vztahu (3) získáme pro vlnový vektor $\vec{k}$ výraz

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}. \tag{5}$$

Časová perioda T a vlnová délka λ spolu souvisejí vztahem, který dostaneme dosazením do vztahu (3) za ω ze vztahu (1):

$$\lambda = vT. \tag{6}$$

Můžeme tedy s použitím vlnového vektoru $\vec{k}$ přepsat rovinnou harmonickou vlnu (2) do tvaru

$$\Psi(\vec{r}, t) = a\,\cos(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha). \tag{7}$$

Podobně lze postupovat při odvozování výrazů pro kulové harmonické vlny. Musí mít podle 1.3(4) tvar

$$\Psi(r, t) = \frac{a}{r}\,\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{r}{v}\right) + \alpha\right], \tag{8}$$

v němž a a α jsou konstanty, znaménko mínus platí pro divergentní kulovou harmonickou vlnu a znaménko plus pro konvergentní kulovou harmonickou vlnu. Bez ohledu na faktor $1/r$, pouze na základě periodicity funkce kosinus, se zavádí vlnová délka výrazem (3) a platí pro ni vztah (6). Vlnový vektor $\vec{k}$ se u kulových harmonických vln nezavádí, pouze jeho velikost

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{9}$$

(Bylo by ovšem možné i u kulových harmonických vln definovat $\vec{k} = \frac{\omega}{v}\frac{\vec{r}}{r}$, ale nebývá to zvykem a je to zbytečné.) Kulové harmonické vlny tedy charakterizuje výraz

$$\Psi(r, t) = \frac{a}{r}\,\cos(\omega t \mp kr + \alpha). \tag{10}$$

Konstantě a ve výrazech (2), (7), (8) a (10) se říká amplituda. Je však podstatný rozdíl ve fyzikálním významu této konstanty u rovinných vln a u kulových vln. Představuje-li vlnová funkce Ψ nějakou fyzikální veličinu (např. u mechanických vln je to výchylka z rovnovážné polohy), představuje amplituda a u rovinných vln (2) resp. (7) touž veličinu a má samozřejmě týž rozměr (neboť funkce kosinus je bezrozměrná). Naproti tomu v případě kulových vln (8) a (10) má amplituda a rozměr oné fyzikální veličiny, o kterou při vlnění jde, násobený délkou (neboť funkce $\cos(\cdots)/r$ má rozměr délky na mínus prvou). Proto se u kulových vln amplituda a interpretuje jako amplituda harmonických kmitů v jednotkové vzdálenosti od zdroje kulových vln. To je nepraktické, často se na to zapomíná a může to působit komplikace (např. když se opakovaně používá Huygensova-Fresnelova principu při vlnovém popisu optického zobrazení). Chceme-li se tomu vyhnout, musíme charakterizovat kulové harmonické vlny výrazem

$$\Psi(r, t) = \frac{a}{kr}\,\cos(\omega t \mp kr + \alpha). \tag{11}$$

v němž funkce $\cos(\cdots)/(kr)$ je bezrozměrná a amplituda a má – stejně jako u rovinné vlny – rozměr fyzikální veličiny, kterou vlnění představuje. Kromě toho má ve výrazu (11) amplituda a význam amplitudy harmonických kmitů ve vzdálenosti od zdroje, pro níž je $kr = 1$, tj. podle (9) $r = \lambda/(2\pi)$, tedy ve vzdálenosti vztažené k samotnému vlnění, a ne k jednotce délky, jež je ovšem zvolena nezávisle na vlnění.

1.5 Komplexní notace harmonických vln

K popisu periodických dějů se v teorii vlnění užívá místo funkcí kosinus resp. sinus komplexní exponenciální funkce. Tato tzv. komplexní notace má výhodu v tom, že některé matematické operace (jmenovitě násobení, derivování a integrování) se provádějí snadněji a zápis výpočtů a odvozování je mnohem přehlednější. Pokud je to možné (omezení jsou naznačena v závěru tohoto odstavce) - nahrazujeme tedy reálné vlnové funkce komplexními, s nimi provádíme potřebné výpočty a teprve nakonec se vracíme opět k reálným funkcím.

Komplexní notace se používá zhruba od konce 19. století a během doby vznikla i terminologie, která z této notace vychází. Bylo by sice i dnes možné se obejít bez komplexní notace, bylo by to však těžkopádným anachronismem. Určitou nevýhodou, kterou sebou nesou výhody komplexní notace, je, že komplexní notace výpočty poněkud formalizuje a nenutí člověka ustavičně se zamýšlet nad fyzikálním významem jednotlivých matematických obratů. Proto se v tomto a v následujícím odstavci zaměříme zejména na objasnění a zdůvodnění podmínek, které formalismus komplexní notace umožňují.

Základem komplexní notace je Eulerova formule (viz např. [1], str. 15, 169)

$$\exp(\pm \mathrm{i}\varphi) = \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{1}$$

Budeme v dalším textu předpokládat, že φ je reálnou veličinou. Pak podle Eulerovy formule je kosinus reálnou částí komplexní exponenciální funkce. Výrazu $a\exp(\pm\mathrm{i}\varphi)$, v němž a je konstanta a φ může být funkcí nějakých proměnných, se říká fázor. Je zřejmé, že fázor je periodickou funkcí proměnné φ s periodou 2π a že absolutní hodnota fázoru je rovna jedné pro všechny hodnoty proměnné φ. Sečtením resp. odečtením obou eventualit vyjádřených znaménky v Eulerově formuli (1) vyjádříme reálnou funkci $\cos\varphi$ resp. $\sin\varphi$ pomocí fázorů:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}\left[\exp(\mathrm{i}\varphi) + \exp(-\mathrm{i}\varphi)\right], \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\exp(\mathrm{i}\varphi) - \exp(-\mathrm{i}\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Rovinné harmonické vlny 1.4(7) můžeme tedy s použitím Eulerovy formule (1) psát ve tvaru

$$\Psi(\vec{r},t) = a\,\mathrm{Re}\Big\{\exp\Big[\pm\mathrm{i}(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\Big]\Big\}$$

a dokonce, učiníme-li úmluvu, že rozruchem budeme vždycky rozumět reálnou část komplexní vlnové funkce, nemusíme ani psát symbol Re, ale charakterizovat rovinné harmonické vlny pouze fázorem

$$\Psi(\vec{r},t) = a\,\exp\Big[\pm\mathrm{i}(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\Big]. \tag{3}$$

Podobně kulové harmonické vlny 1.4(11) píšeme ve tvaru

$$\Psi(r,t) = \frac{a}{kr}\,\exp\left[\pm\mathrm{i}(\omega t \mp kr + \alpha)\right]. \tag{4}$$

Při této úmluvě je z Eulerovy formule (1) zřejmé, že ve výrazech (3) a (4) nezáleží na znaménku u imaginární jednotky. Např. o tom, zda kulová vlna je divergentní nebo konvergentní, rozhoduje pouze to, zda znaménka u ωt a kr v argumentu fázoru výrazu (4) jsou opačná nebo stejná, a není důležité, jaké je znaménko u imaginární jednotky. Je tedy vhodné učinit další úmluvu a důsledně používat jedné z obou možností. Rozhodneme se pro znaménko mínus. (Důvod pro tuto volbu vyplyne z textu za vztahem (13) tohoto odstavce.)

Rovinné resp. kulové harmonické vlny (3) resp. (4) pak charakterizují výrazy

$$\Psi(\vec{r},t) = a\,\exp\Big[\mathrm{i}(\pm\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t - \alpha)\Big] = A\,\exp(\pm\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t), \tag{5}$$

resp.

$$\Psi(r,t) = \frac{a}{kr}\,\exp\left[\mathrm{i}(\pm kr - \omega t - \alpha)\right] = \frac{A}{kr}\,\exp(\pm\mathrm{i}kr)\exp(-\mathrm{i}\omega t), \tag{6}$$

kde

$$A = a\ \exp(-\mathrm{i}\alpha) \tag{7}$$

je komplexní amplituda obsahující informaci o počáteční fázi α.

Podle definice harmonických vln a s použitím komplexní notace musí harmonickou vlnu charakterizovat vlnová funkce ve tvaru součinu

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}\omega t), \tag{8}$$

v němž $\psi(\vec{r})$ je funkcí jen prostorových proměnných. Rovinné a kulové harmonické vlny (5) a (6) jsou toho příkladem. Tato faktorizace výrazu pro harmonické vlny do tvaru součinu funkce polohy a funkce času je velkou předností komplexní notace. Vyplývá z ní například, že lineární kombinace harmonických vln $\Psi_j(\vec{r}, t)$ určité frekvence ω je touž lineární kombinací funkcí $\psi_j(\vec{r})$ závislých jen na souřadnicích násobenou fázorem $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$:

$$A_1\Psi_1(\vec{r}, t) + \cdots + A_n\Psi_n(\vec{r}, t) = [A_1\psi_1(\vec{r}) + \cdots + A_n\psi_n(\vec{r})] \exp(-\mathrm{i}\omega t). \tag{9}$$

Při difrakci vlnění nedochází ke změnám frekvence. Můžeme tedy při výpočtu difrakčních jevů harmonických vln počítat jen s faktorem vlnové funkce, jenž závisí pouze na prostorových proměnných, a považovat za samozřejmé, že časovou závislost charakterizuje fázor $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ a vůbec jej nepsat.

Podle těchto úmluv charakterizuje tedy výraz

$$\psi(\vec{r}) = A \exp(\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) \tag{10}$$

rovinnou harmonickou vlnu postupující ve směru vlnového vektoru $\vec{k}$, kdežto výraz

$$\psi(\vec{r}) = A \exp(-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) \tag{11}$$

představuje rovinnou harmonickou vlnu postupující proti směru vektoru $\vec{k}$. Podobně výraz

$$\psi(\vec{r}) = A\, \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{kr} \tag{12}$$

charakterizuje divergentní kulovou harmonickou vlnu, zatímco výraz

$$\psi(\vec{r}) = A\, \frac{\exp(-\mathrm{i}kr)}{kr} \tag{13}$$

představuje konvergentní kulovou harmonickou vlnu.

Je zřejmé, že uvedená interpretace výrazů (10) až (13) je důsledkem toho, že jsme zvolili záporné znaménko u imaginární jednotky ve fázorech výrazů (3) a (4). Udělali jsme to proto, že při této volbě je kladné znaménko v argumentu rovinné harmonické vlny (10) postupující ve směru $\vec{k}$ a v argumentu fázoru divergentní kulové harmonické vlny (12). Většina současných autorů volí rovněž záporné znaménko u imaginární jednotky v (3) a (4). Bohužel, ne všichni. Zejména v prvních desetiletích dvacátého století se autoři často rozhodovali pro znaménko plus a i dnes se s touto volbou nezřídka setkáváme (viz např. [2], str. 8, [3], str. 47, [4], str. 51).

Představme si nyní, že máme vypočítat nějakou fyzikální veličinu, jež je lineární kombinací (konečného či nekonečného počtu) vlnových funkcí Ψ_j. Uvažme, že lineární kombinace reálných částí funkcí Ψ_j je reálnou částí lineární kombinace funkcí Ψ_j:

$$\sum_j b_j \mathrm{Re}\,(\Psi_j) = \mathrm{Re} \sum_j b_j\Psi_j, \qquad b_j = \text{reálné koeficienty}. \tag{14}$$

Použijeme tedy komplexní vyjádření vlnových funkcí Ψ_j a vytvoříme jejich lineární kombinaci. Ta představuje komplexní vyjádření počítané veličiny. Z ní pak vezmeme jen její reálnou část, neboť jen ta odpovídá fyzikální realitě. Tohoto postupu budeme v dalším mnohokrát používat při matematickém popisu interferencí (součet konečného počtu vlnových funkcí) a difrakčních jevů (součet nekonečně mnoha vlnových funkcí, tj. difrakční integrál).

Jinak je tomu, počítáme-li fyzikální veličinu, jež souvisí s jednou nebo několika vlnovými funkcemi jinak než lineárně, např. druhou mocninou nebo součinem. V těchto případech ovšem neplatí, že např. součin reálných částí vlnových funkcí je reálnou částí součinu vlnových funkcí. Proto nelze jednoduše používat komplexní vlnové funkce, a musíme počítat s reálnými vlnovými funkcemi (byť třeba vyjádřenými pomocí komplexních funkcí, jako např. ve výrazech (2)). Výpočty pak bývají mnohem komplikovanější.

Naštěstí jedinou veličinou tohoto typu, s níž se budeme setkávat, je intenzita vlnění. Pojednáme o ní hned v následujícím odstavci a podáme tak příklad, jak se počítají veličiny, jež s vlnovou funkcí souvisejí nelineárně.

1.6 Intenzita vlnění a výpočet intenzity harmonických vln

Při pozorování a registraci difrakčních jevů je daleko nejdůležitější veličinou tzv. intenzita světla nebo obecně intenzita vlnění I. Její vyjádření prostřednictvím komplexní vlnové funkce je – aspoň v případě harmonických vln – velmi jednoduché. Intenzita je totiž úměrná čtverci modulu prostorové části $\psi(\vec{r})$ vlnové funkce. Konstanta této úměrnosti není pro difrakci významná, a proto klademe

$$I(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2 = \psi(\vec{r})\,\psi^*(\vec{r}). \tag{1}$$

Tuto skutečnost nyní zdůvodníme.

Především uvedeme, co je to intenzita vlnění. Jak je známo z fyziky (viz např. [5], §34.5, [6], §7.2), je intenzita vlnění skalární veličina představující časovou střední hodnotu hustoty výkonu vlnění. Jinými slovy, je to časová střední hodnota velikosti hustoty toku energie vlnění. U elektromagnetického vlnění je to časová střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru. Z praktického hlediska je podstatné, že intenzita vlnění je v naprosto převažujícím počtu případů tou veličinou, kterou detekujeme. Konkrétně, měříme-li výkon vlnění nějakým detektorem s malou vstupní aperturou a je-li plocha detektoru rovinná a kolmá na směr šíření vlnění, je intenzita vlnění v místě detektoru časovou střední hodnotou výkonu dělenou velikostí vstupní plochy. Při pozorování difrakce světla je intenzita světla tou veličinou, která je úměrná jasu matnice. Při fotografování difrakčních jevů souvisí zčernání fotografické emulze s intenzitou světla prostřednictvím tzv. osvitu (expozice), což je součin intenzity světla a expoziční doby.

Pro nás je důležité, že u všech druhů vlnění je intenzita vlnění úměrná kvadrátu (reálné) vlnové funkce. U harmonických vln má podle 1.5(8) tento kvadrát tvar

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathrm{Re}\big[\Psi(\vec{r},t)\big]\Big\}^2 &= \Big\{\mathrm{Re}\,[\psi(\vec{r})\exp(-\mathrm{i}\omega t)]\Big\}^2 = \Big\{\mathrm{Re}\big\{\big[\mathrm{Re}\,[\psi(\vec{r})] + \mathrm{i}\mathrm{Im}\,[\psi(\vec{r})]\big]\ (\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)\big\}\Big\}^2 \\
&= \Big\{\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\ \cos\omega t + \mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\sin\omega t\Big\}^2 = \\
&= \Big\{\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2\cos^2\omega t + \Big\{\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2\sin^2\omega t + 2\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\sin\omega t\cos\omega t.
\end{aligned}$$

Vyjádřením trigonometrických funkcí funkcemi dvojnásobného argumentu dostaneme

$$\begin{aligned}
\Big\{\mathrm{Re}\big[\Psi(\vec{r},t)\big]\Big\}^2 &= \frac{1}{2}\left[\Big\{\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2 + \Big\{\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\Big\{\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2 - \Big\{\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2\right]\cos 2\omega t + \mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\sin 2\omega t.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ze vztahu (2) je vidět, že kvadrát (reálné) vlnové funkce – a tedy i hustota výkonu harmonických vln – má složku na čase nezávislou a složku periodicky se měnící s časem. U většiny typů vlnění není možné tuto periodicky se měnící složku sledovat ani okem ani žádnými přístroji. (Frekvence viditelného světla je téměř 10^{15} Hz, rentgenového záření dokonce 10^{18} Hz.) Jsme schopni detekovat pouze časovou střední hodnotu hustoty výkonu, tj. veličinu úměrnou výrazu

$$\overline{\Big\{\mathrm{Re}\big[\Psi(\vec{r},t)\big]\Big\}^2} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \Big\{\mathrm{Re}\big[\Psi(\vec{r},t)\big]\Big\}^2\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Snadno nahlédneme, že

$$\overline{\Big\{\mathrm{Re}\big[\Psi(\vec{r},t)\big]\Big\}^2} = \frac{1}{2}\left[\Big\{\mathrm{Re}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2 + \Big\{\mathrm{Im}\big[\psi(\vec{r})\big]\Big\}^2\right]. \tag{4}$$

Střední hodnota zbývajících dvou sčítanců ve (2) je totiž nulová, neboť

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos 2\omega t\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{\sin 2\omega\tau}{2\omega\tau}=0,$$
$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin 2\omega t\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1-\cos 2\omega\tau}{2\omega\tau}=0.$$

Je tedy intenzita harmonického vlnění úměrná čtverci modulu prostorové části $\psi(\vec{r})$ komplexní vlnové funkce. Konstanta úměrnosti není při popisu difrakčních jevů důležitá, a proto se pod pojmem intenzita I vlnění rozumí pouze čtverec modulu prostorové části vlnové funkce, jak to odpovídá vztahu (1). Možná toto vypuštění konstanty úměrnosti spolu s častým používáním slova intenzita v různých oborech vedlo některé autory učebnic k tomu, aby pro veličinu I určenou vztahem (1) volili jiné názvy. Používá se např. jas (brightness), ozáření (irradiance), osvětlení (illumination) atd. My však budeme veličinu I důsledně nazývat intenzitou.

Z výrazů 1.5(10) a 1.5(11) je vidět, že intenzita rovinné harmonické vlny je nezávislá na poloze bodu pozorování: $I = AA^* =$ konst. Naproti tomu z 1.5(12) a 1.5(13) vyplývá, že intenzita kulové harmonické vlny klesá se čtvercem vzdálenosti od zdroje resp. od bodu konvergence: $I = AA^*/(kr)^2$. Tak tomu také musí být podle zákona zachování energie.

1.7 Helmholtzova rovnice

Budeme nyní hledat řešení vlnové rovnice 1.1(1) metodou separace proměnných. Konkrétně, vyjádříme řešení $\Psi(\vec{r},t)$ ve tvaru superpozice partikulárních řešení $\Psi_m(\vec{r},t)$ a o těchto partikulárních řešeních budeme předpokládat, že jsou součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na prostorových souřadnicích $\vec{r}$ a druhá pouze na čase t. Symbolicky zapíšeme tuto superpozici součtem

$$\Psi(\vec{r},t)=\sum_m \Psi_m(\vec{r},t), \tag{1}$$

kde

$$\Psi_m(\vec{r},t)=\psi_m(\vec{r})\tau_m(t). \tag{2}$$

Výraz (1) je vskutku jen symbolický zápis superpozice partikulárních řešení $\Psi_m(\vec{r},t)$. V tuto chvíli nespecifikujeme, zda jde o součet nebo o integrál, ani meze sčítání či integrace. To vše se vyjasní až v průběhu hledání partikulárních řešení ve faktorizovaném tvaru (2).

Je hodno pozoru, že požadavek faktorizace partikulárních řešení implikuje rozklad vlnové funkce $\Psi(\vec{r},t)$ do harmonických vln. Dosadíme-li totiž do vlnové rovnice 1.1(1) partikulární řešení ve tvaru (2), dostaneme

$$\nabla^2\psi_m(\vec{r})\tau_m(t)=\frac{1}{v^2}\psi_m(\vec{r})\frac{\mathrm{d}^2\tau_m(t)}{\mathrm{d}t^2}.$$

Podělíme-li tuto rovnici partikulárním řešením (2), dostaneme rovnici

$$\frac{\nabla^2\psi_m(\vec{r})}{\psi_m(\vec{r})}=\frac{1}{v^2}\frac{\frac{\mathrm{d}^2\tau_m(t)}{\mathrm{d}t^2}}{\tau_m(t)}, \tag{3}$$

jejíž levá strana závisí pouze na souřadnicích, kdežto pravá strana pouze na čase. Protože tato rovnice musí platit pro všechny polohy $\vec{r}$ a v každém okamžiku t, je zřejmé, že ji lze splnit jen tak, že její pravá i levá strana jsou rovny téže konstantě. Označme tuto konstantu κ.

Pravá strana rovnice (3) tedy vede na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\tau_m(t)}{\mathrm{d}t^2}=v^2\kappa\tau_m(t), \tag{4}$$

z níž je zřejmé, že separační konstanta κ má fyzikální rozměr délky na méně druhou. Řešeními rovnice (4) jsou funkce $\exp(v\sqrt{\kappa}t)$ a $\exp(-v\sqrt{\kappa}t)$. Protože máme co činit s vlněním v neabsorbujícím prostředí, je smysluplné předpokládat, že tato řešení jsou periodickými funkcemi času. Tomu odpovídá reálná a záporná hodnota separační konstanty κ. Položíme tedy $\kappa = -k^2$, tj. $\sqrt{\kappa} = \pm \mathrm{i}k$, kde k je veličina s rozměrem délky na mínus prvou a s nezápornou hodnotou. Každé takové hodnotě k přísluší výše uvedená dvojice řešení. Je to tedy právě hodnota k, která partikulární řešení (2) specifikuje, a proto ji použijeme místo indexu m. Časově závislý faktor partikulárního řešení (2) má tedy tvar

$$\tau_k(t) = C_1 \exp(\mathrm{i}vkt) + C_2 \exp(-\mathrm{i}vkt), \tag{5}$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty. Je zřejmé, že nezáporná konstanta k souvisí s kruhovou frekvencí ω vztahem

$$vk = \omega, \qquad \text{tj.} \qquad k = \frac{\omega}{v}. \tag{6}$$

Také levá strana rovnice (3) je rovna konstantě $-k^2$, čímž dostáváme tzv. Helmholtzovu rovnici nazývanou též stacionární vlnová rovnice:

$$\nabla^2 \psi_k(\vec{r}) + k^2 \psi_k(\vec{r}) = 0. \tag{7}$$

V bodech homogenního, izotropního a neabsorbujícího prostředí neobsahujících zdroje vlnění musí tedy faktor $\psi_k(\vec{r})$ partikulárního řešení $\Psi_k(\vec{r}, t)$, který závisí pouze na prostorových souřadnicích, splňovat Helmholtzovu rovnici (7).

V E_1 je Helmholtzova rovnice (7) obyčejnou diferenciální rovnicí, jejíž řešení jsou funkce $\exp(\mathrm{i}kr)$ a $\exp(-\mathrm{i}kr)$. V prostorech vyšší dimenze však řešení do té míry závisí na okrajových podmínkách, že nelze uvést nějaký výraz zahrnující všechny možné případy. Něco obecného však o tvaru řešení $\psi_k(\vec{r})$ v prostorech libovolné dimenze říci lze:

Řešení $\psi_k(\vec{r})$ Helmholtzovy rovnice (7) lze vždy vyjádřit ve tvaru

$$\psi_k(\vec{r}) = \psi(k\vec{r}) = \psi(\vec{\rho}), \tag{8}$$

kde $\psi(\vec{\rho})$ je řešení tzv. normalizované Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2_{\vec{\rho}} \psi(\vec{\rho}) + \psi(\vec{\rho}) = 0. \tag{9}$$

Označíme-li totiž v (9) $\vec{\rho} = k\vec{r}$, je

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\rho}} \psi(\vec{\rho}) &= \frac{1}{k} \nabla_{\vec{r}} \psi(k\vec{r}), \\ \nabla^2_{\vec{\rho}} \psi(\vec{\rho}) &= \frac{1}{k^2} \nabla^2_{\vec{r}} \psi(k\vec{r}), \end{aligned}$$

takže

$$\nabla^2_{\vec{\rho}} \psi(\vec{\rho}) + \psi(\vec{\rho}) = \frac{1}{k^2} \nabla^2_{\vec{r}} \psi(k\vec{r}) + \psi(k\vec{r}) = \frac{1}{k^2} \left[\nabla^2_{\vec{r}} \psi(k\vec{r}) + k^2 \psi(k\vec{r}) \right] = 0.$$

Z toho je vidět, že funkce $\psi_k(\vec{r})$ i $\psi(k\vec{r})$ jsou řešeními téže Helmholtzovy rovnice (stejné k^2), takže platí (8).

Při specifikovaných okrajových podmínkách má Helmholtzova rovnice (7) dvě řešení $\psi(k\vec{r})$ a $\psi(-k\vec{r})$. Každé hodnotě $k \geq 0$ přísluší tedy čtyři partikulární řešení (2) vlnové rovnice 1.1(1), a sice

$$\psi(k\vec{r}) \exp(\mathrm{i}kvt), \qquad \psi(k\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}kvt), \qquad \psi(-k\vec{r}) \exp(\mathrm{i}kvt) \qquad \text{a} \qquad \psi(-k\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}kvt).$$

Řešení (1) vlnové rovnice 1.1(1) má tedy tvar superpozice harmonických vln vyjádřené integrály:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \int_0^\infty \psi(k\vec{r}) \exp(\mathrm{i}kvt)\, \mathrm{d}k + \int_0^\infty \psi(k\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}kvt)\, \mathrm{d}k \;+ \\ &+ \int_0^\infty \psi(-k\vec{r}) \exp(\mathrm{i}kvt)\, \mathrm{d}k + \int_0^\infty \psi(-k\vec{r}) \exp(-\mathrm{i}kvt)\, \mathrm{d}k. \end{aligned} \tag{10}$$

V dalším se budeme vždy zabývat monochromatickými vlnami. Nebudeme tedy potřebovat integrály (10) a pro řešení Helmholtzovy rovnice (7) budeme používat symbolu $\psi(\vec{r})$ (tj. budeme psát $\psi(\vec{r})$ místo $\psi(k\vec{r}) = \psi_k(\vec{r})$).

1.8 Poznámka o polárním tvaru řešení Helmholtzovy rovnice

V monografiích se často vyskytují formulace vzbuzující dojem, že reálná část výrazu

$$\Psi(\vec{r},t) = a(\vec{r})\exp\Big\{-\mathrm{i}\big[\omega t - \varphi(\vec{r})\big]\Big\}, \tag{1}$$

v němž $a(\vec{r}) \geq 0$ a $\varphi(\vec{r})$ značí reálné funkce, vždy charakterizuje harmonickou vlnu (viz např. [6], vztah (23) v odst. 1.3.3, [4], vztah 2.2-1). Funkce

$$\psi(\vec{r}) = a(\vec{r})\exp\big[\mathrm{i}\varphi(\vec{r})\big] \tag{2}$$

však nemůže – bez dalších podmínek – být prostorovou částí harmonické vlny, neboť jde o obecnou komplexní funkci reálných proměnných zapsanou v polárním tvaru. Má-li být prostorovou částí harmonické vlny, musí funkce (2) vyhovovat Helmholtzově rovnici. Dosadíme ji tedy do Helmholtzovy rovnice a dostaneme podmínky, které musí splňovat reálné funkce $a(\vec{r})$ a $\varphi(\vec{r})$, aby funkce (2) představovala prostorovou část harmonické vlny.

Derivováním vypočteme:

$$\begin{aligned}
\nabla\psi(\vec{r}) &= \exp\big[\mathrm{i}\varphi(\vec{r})\big]\nabla a(\vec{r}) + \mathrm{i}\psi(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r}),\\
\nabla^2\psi(\vec{r}) &= \exp\big[\mathrm{i}\varphi(\vec{r})\big]\nabla^2 a(\vec{r}) - \psi(\vec{r})\big[\nabla\varphi(\vec{r})\big]^2 + \mathrm{i}\Big\{2\exp\big[\mathrm{i}\varphi(\vec{r})\big]\nabla a(\vec{r})\nabla\varphi(\vec{r}) + \psi(\vec{r})\nabla^2\varphi(\vec{r})\Big\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dosazením výrazu (3) do Helmholtzovy rovnice dělené funkcí (2), tj. do rovnice $\nabla^2\psi(\vec{r})/\psi(\vec{r}) + k^2 = 0$ a oddělením reálné a imaginární části dostaneme hledané podmínky:

$$\frac{\nabla^2 a(\vec{r})}{a(\vec{r})} - \big[\nabla\varphi(\vec{r})\big]^2 + k^2 = 0, \tag{4}$$

$$2\,\frac{\nabla a(\vec{r})}{a(\vec{r})}\,\nabla\varphi(\vec{r}) + \nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0. \tag{5}$$

Při odvozování základního vztahu geometrické optiky, rovnice o eikonalu (viz např. [4], str. 58), je důležitý vztah vyplývající ze (4)

$$|\nabla\varphi(\vec{r})| = \sqrt{k^2 + \frac{\nabla^2 a(\vec{r})}{a(\vec{r})}}. \tag{6}$$

Přesvědčíme se, že vztahy (5) a (6) jsou splněny pro rovinnou a kulovou harmonickou vlnu.

V případě rovinné harmonické vlny je (viz 1.5(10) a (11)) $a(\vec{r}) = A = \text{konst.}$ a $\varphi(\vec{r}) = \pm\vec{k}\cdot\vec{r}$. Je tedy $\nabla a(\vec{r}) = \vec{0}$, $\nabla^2 a(\vec{r}) = 0$, $\nabla\varphi(\vec{r}) = \pm\vec{k}$, $\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0$, takže vztahy (5) a (6) jsou splněny.

V případě kulové harmonické vlny je (viz 1.5(12) a (13)) $a(\vec{r}) = A/(kr)$, $\varphi(\vec{r}) = \pm kr$. Je tedy $\nabla a(\vec{r}) = \mp A\vec{r}/(kr^3)$, $\nabla^2 a(\vec{r}) = 0$, $\nabla\varphi(\vec{r}) = \pm k\vec{r}/r$, $\nabla^2\varphi(\vec{r}) = \pm 2k/r$, takže vztahy (5) a (6) jsou splněny.

Rovinné a kulové harmonické vlny bývají uváděny jako příklady tzv. homogenních harmonických vln, u nichž jsou místa konstantní fáze totožná s místy konstantní amplitudy (viz např. [6], §§ 1.3.3, 11.4.2). U rovinné harmonické vlny je fáze konstantní v rovině kolmé na vlnový vektor a amplituda je konstantní v celém prostoru. U kulové harmonické vlny je amplituda i fáze konstantní na každé kulové ploše se středem ve zdroji kulové vlny. Výraz (1) resp. (2) za splnění podmínek (5) a (6) však může představovat obecnější typ vlny, kdy plochy konstantní amplitudy $a(\vec{r}) = \text{konst.}$ nemusí být totožné s plochami konstantní fáze $\varphi(\vec{r}) = \text{konst.}$ Takové vlny se nazývají nehomogenní harmonické vlny. Ve smyslu definice z odst. 1.1 vlnoplocha v případě nehomogenních harmonických vln neexistuje. V literatuře se však v případě harmonických vln pod pojmem vlnoplocha rozumí plocha konstantní fáze (viz např. [4], str. 51) a v tomto významu budeme nadále pojmu vlnoplocha používat.

Příkladem nehomogenních vln jsou tzv. evanescentní vlny. Jsou to např. vlny, které při totálním odrazu „prosakují“ do opticky řidšího prostředí. Ve skalární teorii difrakce se s evanescentními vlnami setkáme při rozkladu vlnové funkce do rovinných vln (viz závěr odst. 7.3). O evanescentních vlnách a jejich aplikacích pojednává např. stať [7] a monografie [8].

Zmínka o evanescentních vlnách by mohla vzbudit dojem, že nehomogenní vlny jsou něčím mimořádným a ojedinělým a že většinu vlnových jevů popisuje homogenní vlna. Není tomu tak, spíše opak je pravdou. Vezměme si například superpozici dvou rovinných harmonických vln o stejné amplitudě a vlnové délce šířících se ve směrech určených jednotkovými vektory $\vec{n}_1$ a $\vec{n}_2$:

$$\psi(\vec{r}) = a \exp(\mathrm{i}k\vec{n}_1 \cdot \vec{r}) + a \exp(\mathrm{i}k\vec{n}_2 \cdot \vec{r}).$$

Vyjádřeme tuto komplexní vlnovou funkci ψ v polárním tvaru. Vytknutím faktoru $a \exp\left(\mathrm{i}k\frac{\vec{n}_1+\vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right)$ dostaneme

$$\psi(\vec{r}) = a \exp\left(\mathrm{i}k\frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right) \left[\exp\left(\mathrm{i}k\frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right) + \exp\left(-\mathrm{i}k\frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right)\right],$$

tj.

$$\psi(\vec{r}) = 2a \cos\left(k\frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right) \exp\left(\mathrm{i}k\frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}{2} \cdot \vec{r}\right).$$

Z tohoto polárního tvaru vlnové funkce je vidět, že plochy konstantní amplitudy jsou roviny kolmé k vektoru $\vec{n}_1 - \vec{n}_2$, zatímco plochy konstantní fáze jsou roviny kolmé k vektoru $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$. Obě soustavy rovin nejen že nejsou totožné, ale jsou dokonce na sebe kolmé. Tento příklad superpozice dvou rovinných vln naznačuje jednak že interferenční a difrakční jevy představují vždy nehomogenní vlnu, jednak že dělení harmonických vln na homogenní a nehomogenní vlny může být jen „školská moudrost“ postrádající praktického významu.

1.9 Paraxiální vlna a paraxiální Helmholtzova rovnice

Uvažujme o harmonické vlně, která se šíří v nějakém směru, např. o vlně, která odpovídá světelnému svazku šířícímu se ve směru souřadnicové osy x_3. Ve velké vzdálenosti od zdrojů (tj. ve vzdálenosti mnoha vlnových délek) se může taková vlna podobat rovinné vlně. (Výjimkou jsou případy typu průchod vlnění ohniskem.) Proto se často taková vlna charakterizuje výrazem

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) \exp(\mathrm{i}kx_3), \tag{1}$$

v němž „silnou“ závislost na x_3 vyjadřuje rovinná vlna $\exp(\mathrm{i}kx_3)$ a komplexní funkce $\psi_0(\vec{r})$ tuto rovinnou vlnu pouze moduluje. To znamená, že se předpokládá, že $\psi_0(\vec{r})$ je pomalu se měnící funkcí souřadnice x_3. Konkrétně se předpokládá, že v rozmezí vlnové délky je modul změny funkce $\psi_0(\vec{r})$ malý ve srovnání s $|\psi_0(\vec{r})|$ a rovněž modul změny derivace $\partial\psi_0/\partial x_3$ je v rozmezí vlnové délky malý ve srovnání s $|\partial\psi_0/\partial x_3|$:

$$|\psi_0(x_1, x_2, x_3 + \lambda) - \psi_0(x_1, x_2, x_3)| \approx \left|\lambda \frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right| \ll |\psi_0(\vec{r})|,$$

$$\left|\lambda \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}\right| \ll \left|\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|.$$

Častěji se tyto podmínky zapisují ve tvaru

$$\left|\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right| \ll k\,|\psi_0(\vec{r})|, \qquad \left|\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}\right| \ll k \left|\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|. \tag{2}$$

Výraz (1) splňující podmínky (2), resp. harmonická vlna, kterou tento výraz charakterizuje, se v literatuře nazývá paraxiální vlnou (viz např. [4], str. 55). Ukážeme však v další části tohoto odstavce, že podmínky (2) pro funkci $\psi_0(\vec{r})$ nestačí k tomu, aby výraz (1) byl rozumnou aproximací vlny, a že funkce $\psi_0(\vec{r})$ musí ještě splňovat tzv. paraxiální Helmholtzovu rovnici (5), tj. podmínku (9). V této souvislosti je vhodné upozornit na dvě skutečnosti.

(i) Výraz (1) není speciálním případem výrazu 1.8(2), neboť funkce $\psi_0(\vec{r})$ může být komplexní, kdežto amplituda ve výrazu 1.8(2) je reálnou a nezápornou funkcí.

(ii) V aplikacích se často volí konkrétní tvar funkce $\psi_0(\vec{r})$ na základě intuice nebo nějaké aproximace a nevěnuje se pozornost tomu, zda funkce (1) vyhovuje Helmholtzově rovnici. Není tedy divu, že téměř vždy funkce (1) Helmholtzovu rovnici nesplňuje, takže – přísně vzato – necharakterizuje prostorovou část harmonické vlny. Tak je tomu i s tzv. Fresnelovou aproximací kulové vlny, která má veliký význam v teorii difrakce a kterou se budeme zabývat v následujícím odstavci.

Odvodíme nyní podmínku, kterou musí splňovat funkce $\psi_0(\vec{r})$, aby funkce (1) byla řešením Helmholtzovy rovnice. Za tím účelem počítejme

$$\begin{aligned}\nabla\psi(\vec{r}) &= \exp(\mathrm{i}kx_3)\left[\nabla\psi_0(\vec{r}) + \mathrm{i}k\psi_0(\vec{r})\vec{i}_3\right],\\ \nabla^2\psi(\vec{r}) &= \exp(\mathrm{i}kx_3)\left[\nabla^2\psi_0(\vec{r}) - k^2\psi_0(\vec{r}) + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right],\end{aligned} \tag{3}$$

kde jsme použili toho, že $\nabla\psi_0\cdot\vec{i}_3 = \partial\psi_0/\partial x_3$. Dosadíme nyní výraz (3) do Helmholtzovy rovnice:

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = \exp(\mathrm{i}kx_3)\left[\nabla^2\psi_0(\vec{r}) + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right] = 0.$$

Má-li tedy být funkce (1) řešením Helmholtzovy rovnice, musí komplexní funkce $\psi_0(\vec{r})$ splňovat rovnici

$$\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3} = 0. \tag{4}$$

Funkce $\psi_0(\vec{r})$ zvolené intuitivně nebo na základě nějaké aproximace však rovnici (4) nesplňují. Přísně vzato paraxiální vlna (1) pak vůbec žádnou vlnou není. Aby bylo možné považovat paraxiální vlnu (1) za smysluplnou aproximaci nějaké vlny, požaduje se většinou, aby funkce $\psi_0(\vec{r})$ vyhovovala tzv. paraxiální Helmholtzově rovnici

$$\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2} + 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3} = 0. \tag{5}$$

Vyjasníme nyní, v jakém smyslu je paraxiální Helmholtzova rovnice (5) aproximací rovnice (4). Je zřejmé, že rovnice (5) se získá ze (4) zanedbáním sčítance $\partial^2\psi_0/\partial x_3^2$. Jak se však dá takové zanedbání zdůvodnit? Nic přece není malé ve srovnání s nulou, tedy ani $|\partial^2\psi_0/\partial x_3^2|$. Zanedbání sčítance $\partial^2\psi_0/\partial x_3^2$ zdůvodňujeme takto: Levou stranu rovnice (4) tvoří tři sčítanci

$$\text{(i)}\qquad \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2}, \tag{6}$$

$$\text{(ii)}\qquad \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}, \tag{7}$$

$$\text{(iii)}\qquad 2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}. \tag{8}$$

Z druhé nerovnosti (2) vyplývá, že modul sčítance (7) je velmi malý ve srovnání s modulem sčítance (8). Má-li však platit rovnice (4), musí být modul sčítance (7) také velmi malý ve srovnání s modulem sčítance (6). (Obě tyto skutečnosti je třeba při intuitivní volbě funkce $\psi_0(\vec{r})$ ověřit.) Součet sčítanců (6) a (8) tvoří levou stranu paraxiální Helmholtzovy rovnice (5). Na její pravé straně by měl být výraz $-\partial^2\psi_0(\vec{r})/\partial x_3^2$, jehož modul je velmi malý ve srovnání s moduly obou sčítanců na levé straně a v tomto smyslu je paraxiální Helmholtzova rovnice (5) smysluplnou aproximací rovnice (4).

Má-li tedy výraz (1) představovat paraxiální vlnu, musí funkce $\psi_0(\vec{r})$ splňovat nejen podmínky (2), ale také podmínku

$$\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2} \approx -2\mathrm{i}k\frac{\partial\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3} \tag{9}$$

a tím – s přihlédnutím k podmínce (2) – také

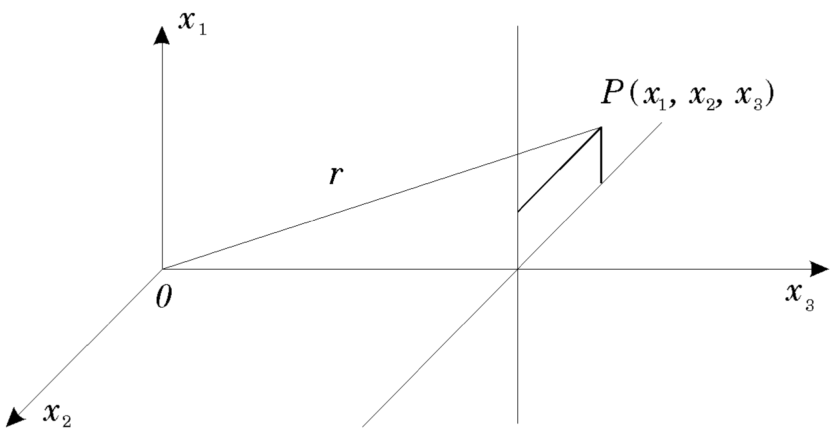
$$\left|\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2}\right|. \tag{10}$$

V následujícím odstavci tyto skutečnosti ozřejmíme na konkrétním příkladě.

1.10 Fresnelova aproximace kulové harmonické vlny

Uvažujme o kulové vlně vycházející z počátku soustavy souřadnic (obr. 2), tj. o vlně

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}. \tag{1}$$



Obrázek 2: K odvození Fresnelovy aproximace kulové vlny.

Chceme-li vyjádřit kulovou vlnu v bodech $P(x_1, x_2, x_3)$ blízkých ose x_3, tj. v bodech, jejichž souřadnice splňují podmínku

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} = \epsilon \ll 1,$$

můžeme délku r aproximovat prvními několika členy mocninného rozvoje

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = x_3\sqrt{1+\epsilon^2} = x_3\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^4}{8} + \cdots\right) = x_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3} - \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{8x_3^3} + \cdots . \tag{2}$$

Abychom si udělali představu, na kolik členů mocninného rozvoje se můžeme omezit, zvolme hodnoty $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m},\ x_3 = 1\,\mathrm{m},\ k = 1 \cdot 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$, tj. $\lambda \doteq 6,3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Ve jmenovateli kulové vlny (1) můžeme s relativní přesností $\epsilon^2/2$ položit

$$r \approx x_3. \tag{3}$$

Při zvolených hodnotách je relativní přesnost této aproximace $5 \cdot 10^{-5}$. V čitateli kulové vlny je třeba použít přesnější aproximaci. Fázor $\exp(\mathrm{i}kr)$ je totiž periodickou funkcí, a proto můžeme zanedbat jen ty členy rozvoje (2), jejichž součet Δ splňuje podmínku

$$k\Delta \ll 2\pi,\ \text{tj. } \Delta \ll \lambda. \tag{4}$$

Druhý člen rozvoje (2) má při zvolených hodnotách velikost

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3} = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m},$$

a proto jej nelze zanedbat. Třetí člen rozvoje (2) má však hodnotu

$$\frac{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}{8x_3^3} = 1,25 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} \ll 6,3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = \lambda,$$

takže jej už zanedbat lze. Budeme tedy fázor ve výrazu (1) aproximovat takto:

$$\exp(\mathrm{i}kr) \approx \exp\left[\mathrm{i}k\left(x_3 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3}\right)\right] = \exp(\mathrm{i}kx_3)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2x_3}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]. \tag{5}$$

Kulovou vlnu (1) pak v bodech blízkých ose x_3 můžeme aproximovat výrazem

$$\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \approx \frac{\exp(\mathrm{i}kx_3)}{x_3} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2x_3}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]. \tag{6}$$

Ekvivalentní formy této aproximace použil Fresnel v r. 1818 při interpretaci Fresnelových difrakčních jevů, a proto se jí říká Fresnelova aproximace. V teorii difrakce se jí používá velmi často. Výraz na pravé straně je paraxiální vlnou, v níž funkce $\psi_0(\vec{r})$ modulující rovinnou vlnu $\exp(\mathrm{i}kx_3)$ má tvar

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{x_3} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2x_3}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right]. \tag{7}$$

Přesvědčme se, že tato funkce splňuje požadavky potřebné k tomu, aby pravá strana rovnice (6) mohla být považována za paraxiální vlnu. Za tím účelem počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_1} &= \mathrm{i}k\frac{x_1}{x_3}\psi_0(\vec{r}), \\ \frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} &= -k^2\psi_0(\vec{r})\frac{x_1^2}{x_3^2} + \mathrm{i}k\psi_0(\vec{r})\frac{1}{x_3} \end{aligned}$$

a podobně pro $\partial\psi_0/\partial x_2$ a $\partial^2\psi_0/\partial x_2^2$. Je tedy

$$\frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_2^2} = -k^2\psi_0(\vec{r})\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + 2\mathrm{i}k\psi_0(\vec{r})\frac{1}{x_3} = -k^2\psi_0(\vec{r})\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}\left[1 - 2\mathrm{i}\frac{x_3}{k(x_1^2 + x_2^2)}\right]. \tag{8}$$

Dále počítejme derivaci podle x_3:

$$\frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3} = -\mathrm{i}k\psi_0(\vec{r})\frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3^2}\left[1 - 2\mathrm{i}\frac{x_3}{k(x_1^2 + x_2^2)}\right], \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2} = -\frac{k^2}{4}\psi_0(\vec{r})\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}\right)^2\left\{\left[1 - \frac{8}{k^2x_3^2}\left(\frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^2\right] - \mathrm{i}\frac{5}{kx_3}\frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2}\right\}. \tag{10}$$

Nerovnosti 1.9(2) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\left|\frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|}{k|\psi_0(\vec{r})|} \ll 1, \quad \frac{\left|\frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}\right|}{k\left|\frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|} \ll 1$$

a dosadíme do nich výrazy (9) a (10) a výše uvedené numerické hodnoty. Dostaneme

$$\frac{\left|\frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|}{k|\psi_0(\vec{r})|} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3^2}\sqrt{1 + 4\frac{x_3^2}{k^2(x_1^2 + x_2^2)^2}} = 5\cdot 10^{-5}\sqrt{1 + 4\cdot 10^{-6}} \ll 1, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left|\frac{\partial^2 \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3^2}\right|}{k\left|\frac{\partial \psi_0(\vec{r})}{\partial x_3}\right|} &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_3^2}\frac{\sqrt{1 + \frac{9}{k^2x_3^2}\left(\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2}\right)^2 + \frac{64}{k^4x_3^4}\left(\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2}\right)^4}}{\sqrt{1 + 4\frac{x_3^2}{k^2(x_1^2+x_2^2)^2}}} = \\ &= 5\cdot 10^{-5}\,\frac{\sqrt{1 + 9\cdot 10^{-6} + 6{,}4\cdot 10^{-12}}}{\sqrt{1 + 4\cdot 10^{-6}}} \ll 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Vztahy (11) a (12) ukazují, že podmínky 1.9(2) kladené na funkci $\psi_0(\vec{r})$ jsou v případě Fresnelovy aproximace kulové vlny a při zvolených numerických hodnotách splněny. Z výrazů (8) a (9) je zřejmé, že funkce $\psi_0(\vec{r})$ ve tvaru (7) je řešením paraxiální Helmholtzovy rovnice 1.9(5), a tím splňuje podmínky 1.9(9) a 1.9(10). Helmholtzovu rovnici 1.9(4) funkce (7) ovšem nesplňuje.

Fresnelova aproximace (6) kulové vlny je tedy dobrou paraxiální aproximací, přísně vzato však nereprezentuje vlnu, neboť pravá strana rovnice (6) nevyhovuje Helmholtzově rovnici.

1.11 Důležitá věta o řešení Helmholtzovy rovnice

Pro teorii difrakce, konkrétně pro formulaci okrajových podmínek, má velký význam tato věta:

Buď $\psi(\vec{r})$ řešením Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \tag{1}$$

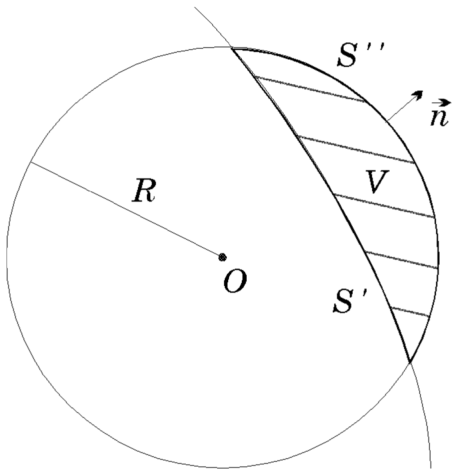
v E_3. Nechť dále platí, že

$$\psi(\vec{r}) = 0, \quad \nabla\psi(\vec{r}) \cdot \vec{n} = 0 \tag{2}$$

v bodech libovolně malé, avšak konečné části S' nějaké plochy v E_3. Pak je $\psi(\vec{r}) = 0$ v celém prostoru E_3.

Důkaz vychází z Greenovy formule (viz Dodatek A)

$$\iiint_V \left(\psi\nabla^2\psi_1 - \psi_1\nabla^2\psi\right) \mathrm{d}V = \iint_S (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S, \tag{3}$$



Obrázek 3: Objem V v Greenově větě (6).

v níž V je konečný objem uzavřený po částech hladkou plochou S, $\vec{n}$ je vnější normála k ploše S a $\psi(\vec{r})$ a $\psi_1(\vec{r})$ jsou libovolné funkce spojité se všemi svými prvními derivacemi uvnitř a na ploše S a se všemi druhými derivacemi uvnitř plochy S. Do rovnice (3) dosadíme za ψ řešení Helmholtzovy rovnice (1) a za ψ_1 funkci

$$\psi_1(\vec{r}) = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}, \tag{4}$$

jež je v E_3 řešením Laplaceovy rovnice

$$\nabla^2\psi_1(\vec{r}) = 0. \tag{5}$$

Přitom R značí poloměr kulové plochy $k(O, R)$ specifikované tak (viz obr. 3), že část S'' této kulové plochy spolu s částí plochy S', na níž jsou splněny podmínky (2), vymezuje objem V, v němž a na jehož okraji $S = S' \cup S''$ řešení Helmholtzovy rovnice $\psi(\vec{r})$ nemění znaménko. Toho lze vždy dosáhnout tím, že zvolíme objem V dostatečně malý. Vzhledem k (1), (4) a (5) tím nabude Greenova formule (3) tvaru

$$k^2 \iiint_V \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}V = \iint_S \left[\psi(\vec{r})\nabla\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) - \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\nabla\psi\right] \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{6}$$

Plošný integrál je roven nule na ploše S', na níž jsou splněny podmínky (2). Na části S'' kulové plochy $k(O, R)$ je

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R}=0 \qquad \text{a} \qquad \nabla\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=R}=-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}r}\nabla r\Bigg|_{r=R}=\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\Bigg|_{r=R}=\frac{\vec{n}}{R^2}. \tag{7}$$

Je tedy plošný integrál na pravé straně rovnice (6) roven $(1/R^2)\iint_{S''}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}S''$. Greenova formule (6) se tím redukuje do tvaru

$$k^2\iiint_V\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}V=\frac{1}{R^2}\iint_{S''}\psi(\vec{r})\,\mathrm{d}S''. \tag{8}$$

V objemu V je $R>r$, tj.

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{r}<0. \tag{9}$$

Předpokládali jsme však, že řešení $\psi(\vec{r})$ Helmholtzovy rovnice (1) nemění uvnitř a na okraji objemu V znaménko. Rovnici (8) lze tedy splnit jen tak, že $\psi(\vec{r})=0$ uvnitř a na okraji objemu V.

Objem V, pro nějž je věta dokázána, můžeme nyní dále zvětšovat tak, že připojíme další objem V' ohraničený plochou ležící uvnitř dříve uvažovaného objemu V a částí nové koule $k'(O',R')$. Tak posléze dospějeme k tomu, že $\psi(\vec{r})=0$ v celém prostoru E_3.

Poznámky

1. V důkazu se předpokládá, že řešení $\psi(\vec{r})$ Helmholtzovy rovnice nemění uvnitř a na okraji objemu V znaménko. To znamená, že se předpokládá, že funkce $\psi(\vec{r})$ je reálná. Často však pracujeme s řešeními Helmholtzovy rovnice, která jsou komplexními funkcemi reálné proměnné. Věta ovšem platí také v těchto případech, neboť Helmholtzova rovnice je lineární a komplexní řešení lze považovat za lineární kombinaci $\psi(\vec{r})=Re\,\psi(\vec{r})+\mathrm{i}\,Im\,\psi(\vec{r})$ dvou reálných řešení.

2. Analogická věta platí v prostoru E_N libovolné dimenze $N\geq 2$. V důkazu se volí řešení Laplaceovy rovnice ve tvaru $\psi_1(r)=(1/R^{N-2})-(1/r^{N-2})$, pro $N\geq 3$ a $\psi_1(r)=\ln(r/R)$, pro $N=2$. Uvedený důkaz podal pro E_2 H. Weber [9] v r. 1869 a reprodukoval F. Pockels v monografii [10] z r. 1891. Od těch dob se v literatuře i přes nespornou důležitost věty důkaz neuvádí.

3. Zajímavým, i když možná evidentně ekvivalentním tvrzením s dokázanou větou, je závěr, že je-li řešení Helmholtzovy rovnice rovno nule uvnitř libovolně malého, avšak konečného objemu V, je identicky rovno nule v celém prostoru.

4. Z linearity Helmholtzovy rovnice vyplývají tyto důsledky dokázané věty:
(i) Jsou-li si dvě řešení Helmholtzovy rovnice i jejich derivace ve směru normály rovna v bodech nějaké konečné plošky, jsou si rovna v celém prostoru.
(ii) Jsou-li si dvě řešení Helmholtzovy rovnice rovna v bodech nějakého konečného objemu, jsou si rovna v celém prostoru.

5. Tzv. Kirchhoffovy okrajové podmínky (viz odst. 7.4.1) předpokládají, že prochází-li vlnění otvorem v nepropustném stínítku, je v bodech stínítka na odvrácené straně od zdroje vlnová funkce $\psi=0$ a také derivace ve směru normály $\nabla\psi\cdot\vec{n}=0$. V bodech otvoru ve stínítku se naopak předpokládá, že vlnová funkce i derivace ve směru normály je nenulová a táž jako v případě volného šíření, tj. jako za nepřítomnosti jakéhokoli stínítka. Takové okrajové podmínky jsou často výborným fyzikálním modelem, jsou však zřejmě matematicky rozporné. V praxi se jich nicméně používá a budeme jim v dalších kapitolách věnovat mnoho pozornosti.

Reference

[1] Kvasnica J.: *Matematický aparát fyziky.* Academia 1989.

[2] Cowley J. M.: *Diffraction Physics.* North-Holland, Amsterdam 1975.

[3] Laue M. v.: *Materiewellen und ihre Interferenzen.* 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig, Leipzig 1948.

[4] Saleh B. E. A., Teich M. C.: *Základy fotoniky 1.* Matfyzpress, Praha 1994.

[5] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Fyzika.* Vysoké učení technické v Brně – Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS, Praha 2000.

[6] Born M., Wolf E.: *Principles of Optics.* 7th ed. Cambridge University Press 1999.

[7] Bryngdahl O.: *Evanescent Waves in Optical Imaging.* In Progress in Optics XI. (E. Wolf, ed.), North–Holland Publ. Co., Amsterdam 1973, 167–221.

[8] Fornel F. de: *Evanescent Waves. From Newtonian Optics to Atomic Optics.* Springer, Berlin 2001.

[9] Weber H.: Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. *Mathematische Annalen* **1** (1869), 1–36.

[10] Pockels F.: *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *und deren Auftreten in der mathematischen Physik.* B. G. Teubner, Leipzig 1891, 212.