3 Huygensův-Fresnelův princip a odvození difrakčních integrálů

3.1 Huygensův princip
3.2 Huygensův-Fresnelův princip
3.3 Příklad. Nerušené šíření rovinné vlny
3.4 Fresnelovy zóny
3.5 Zonální mřížky
3.6 Odvození difrakčních integrálů z Huygensova-Fresnelova principu

Difrakční integrály bývají většinou odvozovány z tzv. Huygensova-Fresnelova principu. Někteří autoři nazývají tento princip pouze Huygensovým jménem [1], což je poněkud paradoxní, neboť Huygens, jak se zdá, difrakční jevy vůbec neidentifikoval ([2], str. 174–177). V jeho slavném „*Pojednání o světle*“ [3] není o difrakci ani zmínky. Tvrzení, že první interpretace difrakčních jevů prováděl Huygens, s nimiž se setkáváme v učebnicové literatuře, jsou asi nepravdivá.

V názvu Huygensova-Fresnelova principu je ovšem Huygensovo jméno právem, jak ukážeme v následujících dvou odstavcích.

3.1 Huygensův princip

Christiaan Huygens je jistě zakladatelem vlnové optiky. Nebyl však první, kdo považoval světlo za nějaký druh vlnění. Že se světlo „alespoň někdy“ projevuje jako vlnění, vyjádřil již F. M. Grimaldi [4] a také J. M. Marci [5]. Nicméně Huygens byl první, kdo na základě vlnové představy kvantitativně vysvětlil šíření světla ve volném prostoru, odraz, lom a dvojlom. Používal k tomu tzv. Huygensovy konstrukce, což je ekvivalentní název pro Huygensův princip.

Huygensův princip obsahuje dvě tvrzení:

(i) Každý bod homogenního a izotropního prostředí, do něhož dospěje vlnění, tj. každý bod čela vlny, je zdrojem sekundární kulové vlny.

(ii) Vlnoplocha v okamžiku $t + \Delta t$ je obálkou sekundárních kulových vln, které vyšly z bodů vlnoplochy v předcházejícím okamžiku t.

Představa vyjádřená prvním tvrzením je přijatelná. (Je zajímavé, že toto tvrzení již před Huygensem vyslovil Marci [5].) Naproti tomu druhé tvrzení je zřejmě nesprávné, neboť odporuje skutečnostem pozorovaným v interferenčních a difrakčních jevech.

3.2 Huygensův-Fresnelův princip

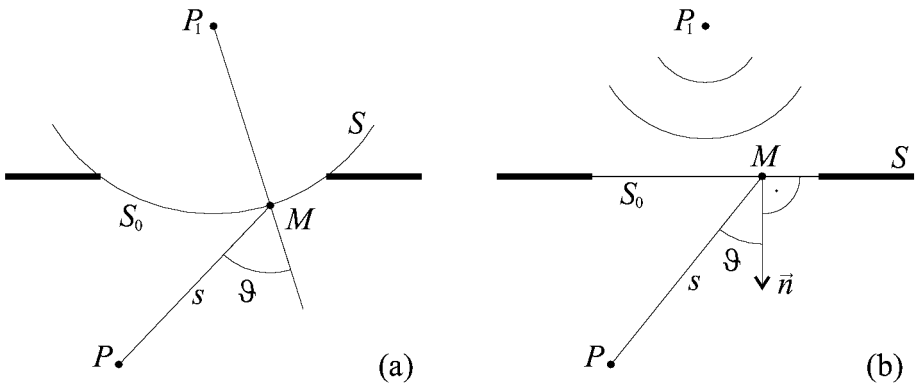
Augustin Jean Fresnel byl prvním, kdo uměl dokonale, tj. do všech tehdy pozorovaných detailů, interpretovat difrakční jevy. Dosáhl toho tím, že změnil druhé tvrzení Huygensova principu ([6], str. 174). V literatuře se často uvádí, že doplnil Huygensův princip tím, že sekundární vlny spolu interferují. To je sice pravda, ale ne celá. Fresnel také specifikoval amplitudu a fázi sekundárních vln. Celou věc ozřejmí matematická formulace Huygensova-Fresnelova principu:

Nechť všechny zdroje vlnění jsou uvnitř prostorové oblasti V (konečné nebo nekonečné) vymezené plochou S a nechť v bodech M této plochy je známa vlnová funkce $\psi_0(M)$. Z každého bodu M plochy S vychází do vnější části prostorové oblasti V sekundární „vlna“

$$\psi(s,\vartheta) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda} K(\vartheta)\psi_0(M)\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s} = \frac{k}{2\pi} K(\vartheta)\psi_0(M)\frac{\exp[\mathrm{i}(ks-\pi/2)]}{s}. \tag{1}$$

Výraz (1) sice nazýváme sekundární vlnou, dokonce sekundární kulovou vlnou, avšak o vlnu ve vlastním smyslu toho slova nemusí vůbec jít. Konkrétní tvar funkce $K(\vartheta)$ může totiž způsobit že výraz (1) není řešením Helmoltzovy rovnice.

Jednotlivé faktory výrazu (1) mají tento význam:



Obrázek 1: K Huygensovu-Fresnelovu principu ve Fresnelově pojetí (a) a ve tvaru nejčastěji používaném při výpočtech (b).

- s je vzdálenost od bodu M.
- $\frac{\exp \mathrm{i}ks}{s}$ je divergentní kulová vlna vycházející z bodu M.
- $\psi_0(M)$ je známá hodnota vlnové funkce v bodech M plochy S. Říkáme jí též primární rozruch. Výraz (1) jím vyjadřuje tvrzení, že amplituda sekundárních vln je úměrná primárnímu rozruchu.
- $-\frac{\mathrm{i}}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}\exp(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})$ je faktor, který vyjadřuje skutečnost, že sekundární vlny mají amplitudu nepřímo úměrnou vlnové délce a že jejich fáze předbíhá o čtvrt periody fázi primárního rozruchu (nebo se za ní o tři čtvrtiny periody opožďuje). Proto se faktoru $-\mathrm{i} = \exp(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2})$ někdy v této souvislosti říká Fresnelův fázový předstih. Při heuristické formulaci Huygensova–Fresnelova principu není původ faktoru $-\mathrm{i}/\lambda$ zřejmý. Fresnel jej zavedl proto, aby dostal správný výsledek pro nerušené šíření vlnění (tj. pro volné šíření za nepřítomnosti jakéhokoli difrakčního stínítka, které by omezovalo nebo nějak modifikovalo dopadající vlnu). V následujícím odstavci 3.3 ozřejmíme nezbytnost tohoto faktoru. Skutečný původ faktoru $-\mathrm{i}/\lambda$ lze nahlédnout teprve při odvozování Kirchhoffova nebo Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu (viz odst. 6.4.9, 6.5.2 až 6.5.4 v dalším textu).
- $K(\vartheta)$ je nejproblematičtějším faktorem výrazu (1). Vyjadřuje skutečnost, že amplituda sekundárních „vln“ závisí na směru šíření vln a říká se mu faktor sklonu. Fresnel volil za plochu S vždy vlnoplochu. Pak úhel ϑ byl úhel mezi normálou k vlnoploše v bodě M a směrem určeným spojnicí bodu M a bodu pozorování P (viz obr. 1(a)) a faktor $K(\vartheta)$ předpokládal ve tvaru

$$K(\vartheta) = \begin{cases} \cos\vartheta & \text{pro } \vartheta \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle, \\ 0 & \text{pro } \vartheta \in \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle. \end{cases} \tag{2}$$

(Podmínka (2) zajišťuje, že sekundární „vlny“ se šíří jen ve směru od zdroje vlnění.) Uvidíme později, že přesné Rayleighovo–Sommerfeldovo odvození difrakčního integrálu (odst. 6.5.3) dává pro faktor sklonu týž výraz (2), zatímco matematický rozporné Kirchhoffovo odvození (viz závěr odst. 6.4.2) dává pro faktor sklonu funkci

$$K(\vartheta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\vartheta). \tag{3}$$

Po pravdě řečeno, pro velkou většinu výpočtů není tvar funkce $K(\vartheta)$ podstatný. V konkrétních aplikacích Fresnel téměř vždy — výjimkou jsou jen úvahy o sumaci příspěvků od Fresnelových zón (srov. odst. 3.4) — kladl

$$K(\vartheta) = 1. \tag{4}$$

Tak se to ostatně v instrumentální optice dělá dodnes a můžeme tedy pro (1) používat termínu sekundární vlny bez uvozovek. Zdůvodnění toho, proč i při tak necitlivém zacházení s faktorem sklonu se dostává — aspoň při výpočtu Fresnelových difrakčních jevů — obdivuhodně přesný souhlas výpočtů s experimentem, dává tzv. metoda stacionární fáze spolu s podmínkami použitelnosti skalární teorie difrakce.

Zbývá ještě se zmínit o ploše S, v jejíchž bodech M je znám primární rozruch $\psi_0(M)$. Z textu předcházejícího výraz (1) je zřejmé, že nemusí jít o čelo vlny (jako u Huygense) ba ani o vlnoplochu. Z praktických důvodů však není účelné ani možné „volit“ tuto plochu příliš obecně. Uvedli jsme již, že Fresnel volil za plochu S vždy vlnoplochu vlnění vycházejícího z bodového nebo čárového zdroje, tedy kulovou nebo válcovou plochu. Tak tomu také bývá ve starších monografiích (viz např. [7], str. 152, [8], kap. 13, 14). V současné době se za plochu S volí rovina určená rovinným difrakčním stínítkem (viz obr. 1(b)) a eventuálně uzavřená částí koule o nekonečném poloměru.

Uvidíme v kap. 6 a 7, že pouze v případě, kdy plocha S je rovinou, přestává být Huygensův-Fresnelův princip principem ve vlastním smyslu toho slova, a lze jej považovat za aproximaci difrakčního integrálu získaného matematicky korektním způsobem z vlnové rovnice (pouze v případě roviny je znám explicitní tvar Greenovy funkce 6.5(8)). Sekundární „vlny“ mají v tomto případě tvar (viz 6.5(13))

$$\psi(s,\vartheta) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\cos\vartheta\,\psi_0(M)\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{ks}\right). \tag{5}$$

I zde nejde ovšem o vlny ve vlastním smyslu toho slova, neboť výraz (5) není řešením Helmholtzovy rovnice 1.7(7). Je zřejmé že pro $s \gg \lambda$, tj. $ks \gg 1$, je výraz (1), (2), používaný Fresnelem, dobrým přiblížením přesnému výrazu (5).

V případě, že plocha S není vlnoplochou, je otázka, jaký tvar má faktor sklonu $K(\vartheta)$, neboť směr šíření vlnění nemusí být totožný se směrem normály k ploše S. Jak jsme se již zmínili, Rayleighovo-Sommerfeldovo odvození difrakčního integrálu však v případě, že plocha S je rovina, dává faktor sklonu $K(\vartheta)$ ve tvaru (2) (viz odst. 6.5.3 a 6.5.4).

Představme si nyní, že vyšetřujeme difrakci na nějakém difrakčním stínítku a že plocha S vyplňuje otvory v difrakčním stínítku. Označme S_0 část plochy S, která není zastíněna nepropustnými částmi difrakčního stínítka (viz obr. 1). Podle Fresnela je vlnová funkce v bodě P vně plochy S dána součtem všech sekundárních vln vycházejících z bodů plochy S_0, tedy integrálem

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{S_0}\psi_0(M)\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}\cos\vartheta\,\mathrm{d}S_0. \tag{6}$$

Tento integrál je matematickým zápisem Huygensova-Fresnelova principu.

Na integrálu (6) — tak jak je napsán — je nepříjemné, že se s ním nedá téměř nic analyticky vypočítat. Použijeme-li ho totiž — bez různých aproximací integrandu — k výpočtu konkrétních difrakčních jevů, shledáme, že integrace nelze provést nebo že příslušný integrál neexistuje. Proto se dělají aproximativní úpravy integrandu. Konkrétně kulová vlna $\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}$ se aproximuje paraxiální aproximací 1.10(6) a $\cos\vartheta$ se položí roven jedné. Tím se však ještě více setře představa kulových sekundárních vln, která je tolik zdůrazňovaná při recitacích Huygensova-Fresnelova principu.

Jednou z mála výjimek, kdy integrál (6) lze analyticky vypočítat, je nerušené šíření rovinné vlny. V následujícím odstavci 3.3 tento příklad propočítáme. Přinese nám to dvojí užitek. Poznáme v náznaku potíže, s nimiž se při analytických výpočtech integrálu (6) setkáváme a ozřejmí se důvod, proč musí být v amplitudě sekundárních vln (1) faktor $-\mathrm{i}/\lambda = -\mathrm{i}k/2\pi$.

3.3 Příklad. Nerušené šíření rovinné vlny

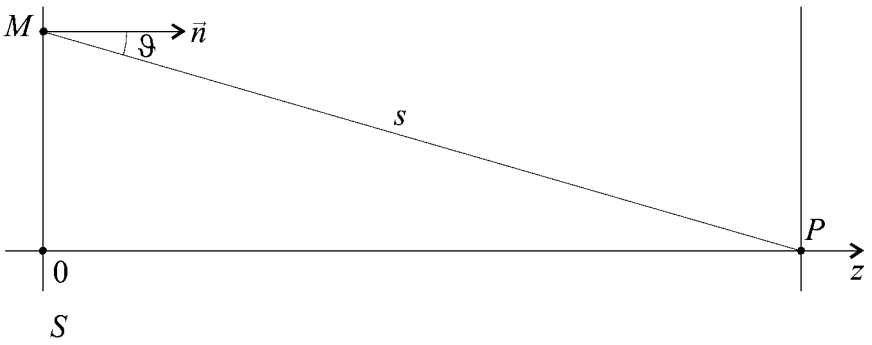
Zvolme směr šíření rovinné vlny za osu z kartézské soustavy souřadnic. V každém bodě prostoru má tedy vlnová funkce tvar fázoru $\exp(\mathrm{i}kz)$. Za plochu S v Huygensově-Fresnelově principu zvolme rovinu $z = 0$ (viz obr. 2), v níž je vlnová funkce $\psi_0(M) = 1$. Ve všech bodech P roviny $z =$ konst. je vlnová funkce $\psi(P) = \exp(\mathrm{i}kz)$ a tento výsledek musíme dostat výpočtem integrálu 3.2(6).

Bez újmy na obecnosti zvolíme bod P na ose z. Souřadnice bodů M a P jsou $M(x_M, y_M, 0)$, $P(0,0,z)$, $\cos\vartheta = z/s$ a integrál 3.2(6) má tvar

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}\frac{z}{s}\,\mathrm{d}x_M\,\mathrm{d}y_M. \tag{1}$$

Vyjádříme tento integrál v polárních souřadnicích

$$x_M = \rho_M\cos\varphi_M, \qquad y_M = \rho_M\sin\varphi_M.$$



Obrázek 2: Nerušené šíření rovinné vlny.

Dostaneme

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}kz}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s^2}\,\mathrm{d}\varphi_M\ \rho_M\,\mathrm{d}\rho_M.$$

Vzhledem k rotační symetrii integrandu je integrál podle úhlové proměnné φ_M roven 2π, takže

$$\psi(P) = -\mathrm{i}kz\int_0^\infty\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s^2}\rho_M\,\mathrm{d}\rho_M. \tag{2}$$

Uvažme, že $s^2 = z^2+\rho_M^2$ a přejděme od integrační proměnné ρ_M k integrační proměnné s. Vzhledem k tomu, že $s\,\mathrm{d}s = \rho_M\,\mathrm{d}\rho_M$ přejde integrál (2) do tvaru

$$\psi(P) = -\mathrm{i}kz\int_z^\infty\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}\,\mathrm{d}s\ . \tag{3}$$

Primitivní funkci integrandu ve (3) nelze — jak známo — vyjádřit v uzavřeném tvaru, tj. jako součet konečného počtu elementárních funkcí. Vyjádříme proto integrál (3) prostřednictvím integrálního sinu $\mathrm{Si}(x)$ a integrálního kosinu $\mathrm{Ci}(x)$:

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$\mathrm{Ci}(x) = \int_\infty^x\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x>0. \tag{5}$$

Za tím účelem provedeme v integrálu (3) substituci $ks = t$:

$$\begin{aligned}\psi(P) &= -\mathrm{i}kz\int_{kz}^\infty\frac{\exp(\mathrm{i}t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}kz\left[\int_{kz}^\infty\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_{kz}^\infty\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right]\\ &= -\mathrm{i}kz\left\{-\mathrm{Ci}(kz)+\mathrm{i}[\mathrm{Si}(\infty)-\mathrm{Si}(kz)]\right\}.\end{aligned} \tag{6}$$

Pro hodnoty proměnné $x \geq 2\pi$ je integrální sinus a integrální kosinus s dostatečnou přesností vyjádřen asymptotickým výrazem

$$\mathrm{Si}(x) \approx \frac{\pi}{2}-\frac{\cos x}{x}, \tag{7}$$

$$\mathrm{Ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}. \tag{8}$$

Dosadíme-li tyto asymptotické výrazy do (6), dostaneme

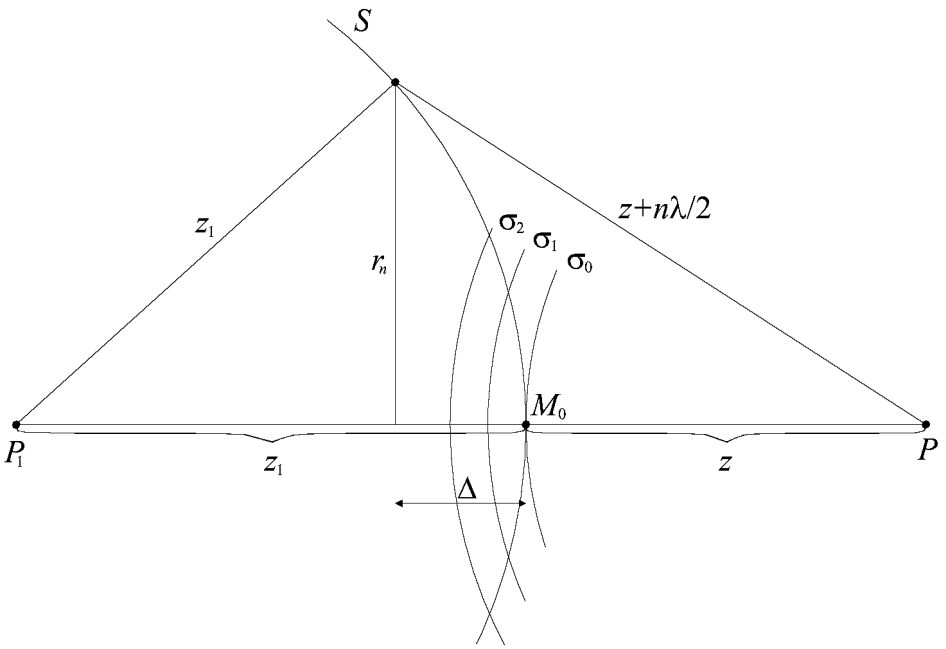
$$\begin{aligned}\psi(P) &\approx -\mathrm{i}kz\left\{-\frac{\sin kz}{kz}+\mathrm{i}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\cos kz}{kz}\right]\right\} =\\ &= kz\left\{\frac{\cos kz}{kz}+\mathrm{i}\frac{\sin kz}{kz}\right\} = \exp(\mathrm{i}kz).\end{aligned} \tag{9}$$

Dostali jsme tedy již pro $kz \geq 2\pi$, tj. $z \geq \lambda$, požadovaný výsledek. Z výpočtu je zřejmé, že k získání výsledku (9) bylo nezbytné opatřit amplitudu sekundárních „vln“ 3.2(1) faktorem $-\mathrm{i}k/2\pi$.

3.4 Fresnelovy zóny

Po celé 18. století dominovala tzv. korpuskulární teorie světla připisovaná Newtonovi nad Huygensovou vlnovou teorií. Podle korpuskulární teorie „jsou paprsky světla velmi malé částice vyzařované svítícími látkami“ ([9], str. 370). Newton sice vyslovil tento názor formou otázky, ale jeho autorita způsobila, že byl nekriticky akceptován a ještě v prvním desetiletí 19. století byly odmítány Youngovy představy o světle jako o vlnění. Teprve Fresnel svou teorií difrakce a svými difrakčními experimenty velmi přispěl k tomu, že světlo bylo opět (130 let po Huygensovi) považováno za vlnění. Hlavní tehdejší námitkou stoupenců korpuskulární teorie proti vlnové teorii bylo: Proč se světlo šíří v podstatě přímočaře, když má být vlněním? Fresnel na ni reagoval tzv. zonální konstrukci ([6], str. 208) a zavedl to, čemu dnes říkáme Fresnelovy zóny. V tomto odstavci podrobně ozřejmíme pojem Fresnelových zón, neboť představa o Fresnelových zónách vysvětluje takřka bez počítání mnohé zajímavosti difrakčních jevů, je důležitá při plánování difrakčních experimentů, pro pochopení fokusace záření (např. rentgenového) zonálními (Soretovými) mřížkami a jinde.

Představme si, že z bodového zdroje P_1 vychází kulová vlna a vybereme jednu z vlnoploch S, tj. kouli o poloměru z_1. Ve vzdálenosti $z_1 + z$ od zdroje P_1 zvolme bod pozorování P (obr. 3). Okolo bodu P opišme



Obrázek 3: K odvození výrazu pro poloměr r_n n-té Fresnelovy zóny.

kulové plochy $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ o poloměrech $z, z + \lambda/2, z + 2\lambda/2, \ldots$, které rozčleňují vlnoplochu S do zón. Označme $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ součty sekundárních vln došlých do bodu P z první, druhé, třetí,... zóny. Je zřejmé, že ψ_2 má opačnou fázi ve srovnání s ψ_1, ψ_3 má opačnou fázi ve srovnání s ψ_2 atd. Prostě součty ψ_{2n-1} sekundárních vln od lichých zón mají touž fázi pro všechna n a opačnou ve srovnání se součty ψ_{2n} sekundárních vln od sudých zón.

Vyjádřeme nyní vnější poloměr r_n n-té zóny. Z Pythagorovy věty plyne (viz obr. 3)

$$(z_1 - \Delta)^2 + r_n^2 = z_1^2,$$

$$(z + \Delta)^2 + r_n^2 = (z + n\lambda/2)^2.$$

Po vyloučení Δ z těchto rovnic a po úpravě dostaneme

$$r_n^2 = \frac{n\lambda z_1 z}{z_1 + z}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n\lambda}{2}\right)\frac{z_1^2 + z_1 z - z^2}{z_1 z(z_1 + z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{n\lambda}{2}\right)^2 \frac{1}{z_1(z_1 + z)} - \frac{1}{8}\left(\frac{n\lambda}{2}\right)^3 \frac{1}{z_1 z(z_1 + z)}\right]. \qquad (1)$$

Zvolíme-li si pro kvantitativní představu hodnoty

$$z_1 = z = 1 \text{ m}, \qquad \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \qquad n = 1, \qquad (2)$$

nahlédneme, že druhý člen v hranaté závorce je řádu 10^{-7}, třetí řádu 10^{-14} a čtvrtý řádu 10^{-21}. S vysokou přesností tedy platí

$$r_n = \sqrt{\frac{n\lambda z_1 z}{z_1 + z}}. \tag{3}$$

Z toho plyne, že jednotlivé zóny na vlnoploše S jsou s velmi dobrým přiblížením rovnoploché:

$$\pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right) = \pi\frac{\lambda z_1 z}{z_1 + z}. \tag{4}$$

Abychom si udělali představu o velikosti Fresnelových zón, dosaďme do (3) a (4) hodnoty (2). Dostaneme

$$r_n = \sqrt{n}\ 5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}, \qquad \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right) \doteq 8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2. \tag{5}$$

Průměr prvních Fresnelových zón bývá tedy v optice viditelného světla při běžném experimentálním uspořádání řádově 1 mm.

Z toho, že Fresnelovy zóny jsou rovnoploché, vyplývá, že součty ψ_i sekundárních vln došlých od jednotlivých zón do bodu pozorování P mají touž absolutní hodnotu. Jestliže tedy propustíme nepropustným stínítkem s kruhovým otvorem právě dvě první zóny vlnoplochy S, bude vlnová funkce v bodě P nulová, neboť součty ψ_1 a ψ_2 mají touž absolutní hodnotu a opačnou fázi, takže $\psi_1 + \psi_2 = 0$. Stejně tomu bude, kdykoli propustíme přesně sudý počet sousedících zón. Je tedy intenzita v bodě P rovna nule a tuto skutečnost lze snadno experimentálně ověřit (viz obr. 4). Tento fakt — totiž nulovou intenzitu ve středu difrakčního obrazce na kruhovém otvoru propouštějícím sudý počet zón — je vhodné velmi zdůraznit. Je to totiž jediný případ, kdy se ve Fresnelově difrakci na prázdných otvorech v nepropustném stínítku pozoruje nulová intenzita.

Naskýtá se otázka, jaká je intenzita v bodě pozorování P, propustíme-li jednu Fresnelovu zónu, resp. lichý počet zón. Představme si, že rozevíráme kruhový otvor ve stínítku od nulového průměru. Ze způsobu konstrukce Fresnelových zón vyplývá, že modul amplitudy vlnové funkce, a tedy i intenzita v bodě pozorování vzrůstá a nabývá maximální hodnoty, když je propuštěna právě první zóna. Při dalším zvětšování otvoru klesá až nabude minima, konkrétně nulové hodnoty, když jsou propuštěny právě dvě zóny. Potom opět roste a nabývá maximální hodnoty, když jsou propuštěny tři zóny, atd. Vidíme tedy, že intenzita v bodě pozorování je maximální, je-li propuštěn lichý počet Fresnelových zón. Jaká však je tato maximální intenzita? Odpověď nelze dostat pouhým uvažováním o zónách. V odst. 5.8.1 ji však zjistíme výpočtem: Je-li kruhovým otvorem ve stínítku propuštěn právě lichý počet zón, je intenzita v bodě pozorování čtyřnásobná ve srovnání s intenzitou, která by byla v bodě pozorování, kdyby vlnoplochu S nic neomezovalo.

Je-li intenzita v bodě pozorování při jedné propuštěné zóně čtyřnásobně větší než při neomezeném šíření vlny, tj. velikost amplitudy je dvojnásobná, znamená to, že kdybychom vlnu propustili přibližně polovinu první zóny, dostali bychom v bodě pozorování P touž intenzitu jako při neomezeném šíření vlny. Tento výsledek Fresnel vytušil a podpořil úvahou, jejíž nekorektnosti si byl vědom. Sečetl příspěvky ψ_i jednotlivých zón takto:

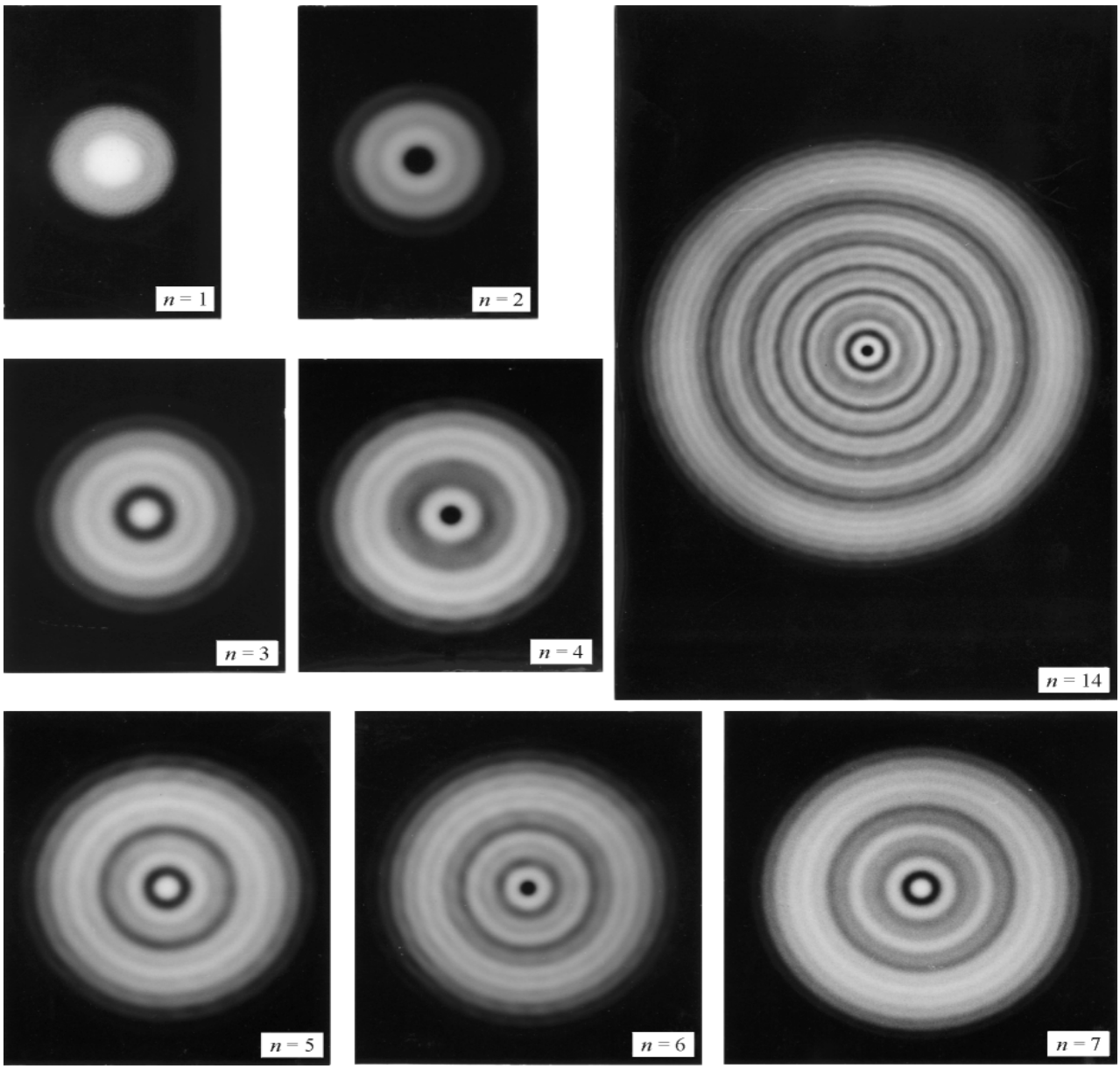
$$\psi(P) = \frac{1}{2}\psi_1 + \left(\frac{1}{2}\psi_1 + \psi_2 + \frac{1}{2}\psi_3\right) + \cdots + \psi_\vartheta = \frac{1}{2}\psi_1 \tag{6}$$

a polovinu příspěvku poslední zóny

$$\psi_\vartheta = \frac{1}{2}\psi_n, \quad \text{resp.} \quad \psi_\vartheta = \frac{1}{2}\psi_{n-1} + \psi_n$$

zanedbal, což zdůvodnil nulovou hodnotou faktoru sklonu $K(\vartheta) = \cos\vartheta$ při $\vartheta = \pi/2$. Prostě příspěvek k vlnové funkci od každé sudé zóny kompenzoval příspěvky od poloviny sousedních lichých zón. (Tento postup je ovšem nekorektní, neboť bychom stejně oprávněně mohli příspěvek každé sudé zóny kompenzovat řekněme desetinou příspěvku nižší liché zóny a devíti desetinami příspěvku vyšší liché zóny a dostali bychom $\psi = 0,9\ \psi_1$.) V literatuře lze nalézt řadu úvah zjemňujících Fresnelův způsob sumace (viz např. [10], § 44, [11], § 8.2).

Výsledek (6), i když byl získán matematicky nekorektním způsobem, pozoruhodně vystihuje skutečnost. Fresnel z toho vyvodil závěr, že pro rozruch ψ v bodě P je rozhodující jen malý kroužek kolem bodu M_0, jehož plocha nepřevyšuje polovinu plochy první zóny, tedy kroužek, který má při hodnotách (2) poloměr 0,3 mm (a tedy plochu $3 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^2$). V tom spatřoval zdůvodnění toho, že se světlo šíří v podstatě přímočaře. My v tom můžeme spatřovat pěknou ilustraci významu okolí bodu M_0 (bod stacionární fáze) pro vlnovou funkci v bodě pozorování P. Výše uvedené výsledky, zejména vztah (6) odůvodníme matematicky čistším



Obrázek 4: Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku při různém počtu n propuštěných zón.

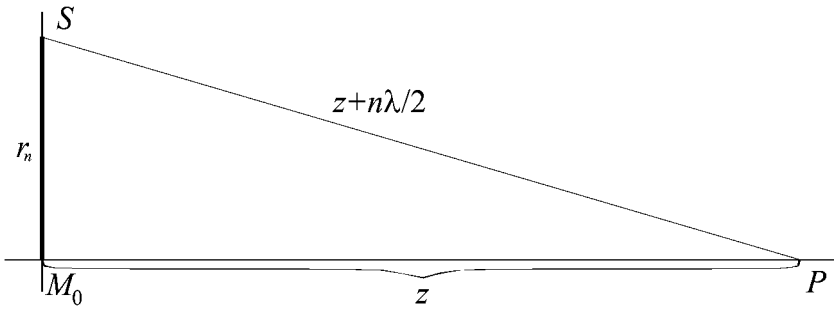
způsobem v odst. 5.8.1, v němž se počítá vlnová funkce charakterizující Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru v bodech osy rotační symetrie.

Je-li dopadající vlna rovinná, je plocha S rovina (obr. 5) a z Pythagorovy věty plyne pro vnější poloměr r_n n–té Fresnelovy zóny výraz

$$r_n = \sqrt{n\lambda z}\sqrt{1 + \frac{n\lambda}{4z}}. \tag{7}$$

S vysokou přesností tedy je

$$r_n = \sqrt{n\lambda z}. \tag{8}$$



Obrázek 5: Poloměr r_n n-té Fresnelovy zóny na rovinné vlnoploše S.

Zajímavá je situace ve sbíhavé kulové vlně (obr. 6). Opět aplikací Pythagorovy věty lze nalézt, že — ať bod pozorování P leží vně nebo uvnitř poloměru M_0P_1 vlnoplochy S — platí vždy

$$r_n = \sqrt{\frac{n\lambda z_1 z}{|z_1 - z|}}. \tag{9}$$

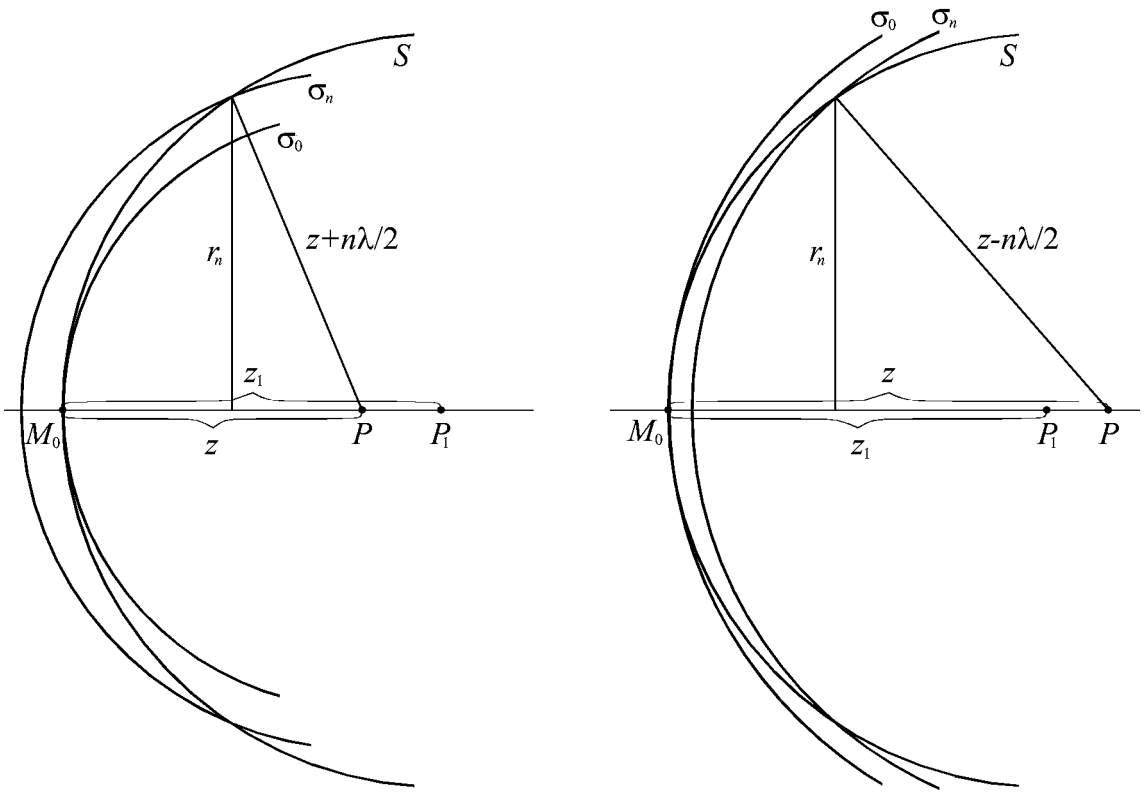
Z toho je vidět, že když se bod pozorování P blíží středu P_1 sbíhavé vlny, tj. když $z_1 - z \longrightarrow 0$, roste poloměr r_1 první Fresnelovy zóny „nade všechny meze“ (ve skutečnosti je celá vlnoplocha S obsažena v první Fresnelově zóně). To znamená, že bod M_0 není stacionárním bodem vlnoplochy. Pro vlnovou funkci ve středu P_1 sbíhavé kulové vlny jsou všechny body vlnoplochy stejně významné. Jako je existence stacionárního bodu typickým znakem Fresnelovy difrakce, je absence stacionárního bodu, tedy stejná významnost všech bodů vlnoplochy, typickým znakem Fraunhoferovy difrakce.

Nulová intenzita uprostřed difrakčního obrazce od kruhového otvoru propouštějícího sudý počet zón je jistě dosti udivující. Fresnelova zonální konstrukce však vysvětluje ještě další paradoxní jev: světlou stopu uprostřed Fresnelova difrakčního obrazce na nepropustné kruhové překážce (tzv. Fresnelova-Aragova-Poissonova stopa, viz obr. 7). Dopadá-li na nepropustný kruh kulová vlna se středem P_1 na ose rotační symetrie nepropustného kruhu (nebo rovinná vlna šířící se ve směru osy), je ve všech bodech P osy rotační symetrie za stínítkem táž intenzita, jako kdyby nic nebránilo volnému šíření vlny. Výklad tohoto paradoxu lze založit na tom, že Fresnelovy zóny začneme konstruovat nikoli od osového bodu, ale od okraje B kruhové překážky (viz obr. 8). Táž argumentace (6) pak vede k závěru, že stejně jako při nerušeném šíření světla, je intenzita v osovém bodě rovna čtvrtině intenzity od první Fresnelovy zóny, tedy táž, jako při nerušeném šíření vlny. V odst. 5.9 podložíme tuto skutečnost výpočtem a ukážeme také, že průměr světlé stopy uprostřed difrakčního obrazce je nepřímo úměrný průměru kruhové překážky.

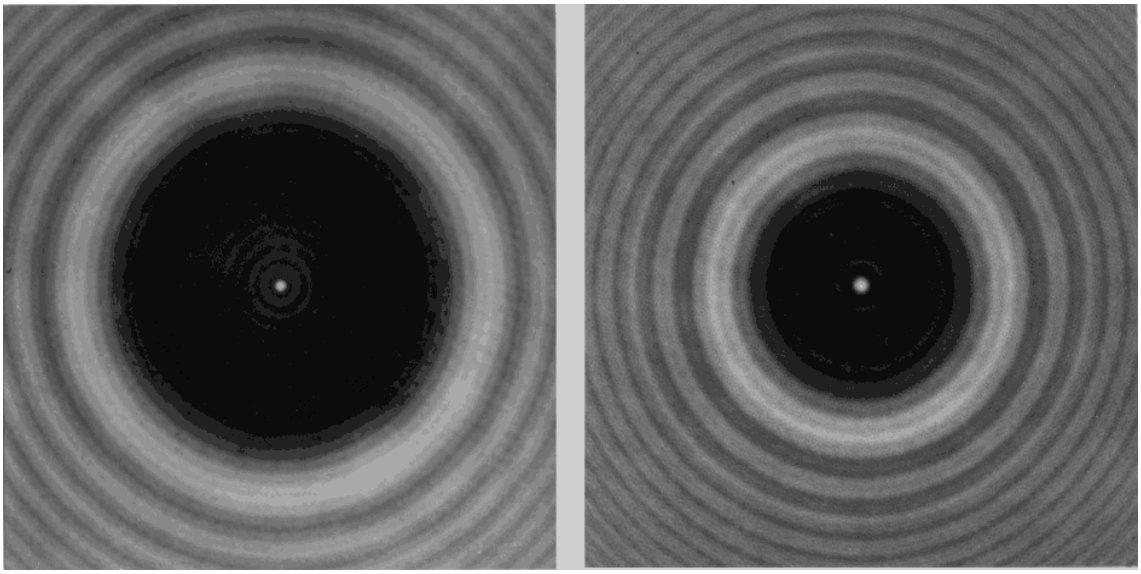
Světlá stopa uprostřed stínu za nepropustnou kruhovou překážkou je typický vlnový jev, který sehrál významnou úlohu při prosazování vlnové povahy světla. Siméon Denis Poisson posuzoval v r. 1818 Fresnelovu práci jako oficiální oponent francouzské Akademie a odvodil z ní, že ve všech bodech osy za diskem musí být světlá stopa. Spatřoval v tom rozpor s experimentem a vůbec se zkušeností, který vyvrací Fresnelovu teorii. Fresnelův přítel a ochránce Dominique François Arago však pokus provedl a existenci světlé stopy prokázal. Poissonova předpověď paradoxního jevu, původně formulovaná jako námitka proti Fresnelově vlnové teorii, tak tuto teorii nejen nevyvrátila, ale velmi posílila. (Pokus lze poměrně snadno provést, použijeme-li místo disku ložiskovou kuličku nalepenou na skleněnou planparalelní destičku.)

3.5 Zonální mřížky

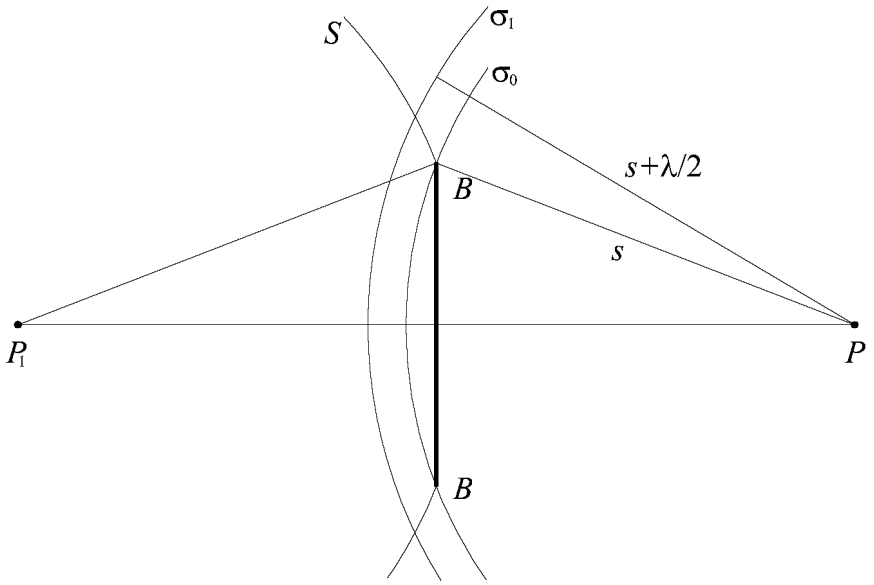
Fresnel pravděpodobně zonální konstrukce vícekrát nepoužil. Trvalým majetkem vlnové optiky se však stala velmi názorná a užitečná představa, která tvoří jádro Fresnelovy konstrukce: Vlnoplochu sférické nebo rovinné vlny lze rozdělit na oblasti (zóny), jejichž příspěvky k amplitudě v bodě pozorování jsou stejné, avšak střídavě se sčítají a odečítají. Zastínění oblastí jednoho druhu (např. lichých zón) tedy způsobí vzrůst amplitudy světelné vlny v bodě pozorování. Právě tato úvaha pravděpodobně vedla Rayleigha [12] k návrhu zonální mřížky. Prvním, kdo experiment se zonální mřížkou a jeho interpretaci publikoval, byl J. L. Soret [13] [14], [15] v r. 1875. Zastínil (tj. učinil nepropustnými) všechny sudé nebo všechny liché zóny (viz obr. 9). Jsou-li zastíněny např. všechny sudé zóny a liché zůstanou propustné, znamená to, že příspěvky ψ_{2n+1} od lichých



Obrázek 6: Poloměr Fresnelovy zóny na vlnoploše sbíhavé kulové vlny.

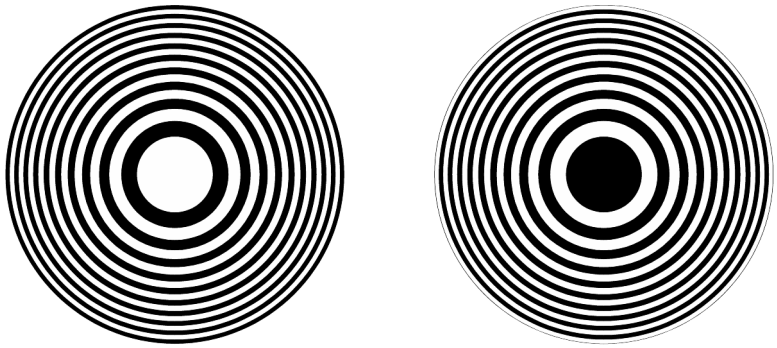


Obrázek 7: Fresnelova-Aragova-Poissonova stopa ve středu difrakčního obrazce při Fresnelově difrakci na nepropustném kruhovém disku.



Obrázek 8: K výkladu Fresnelovy-Aragovy-Poissonovy stopy.

zón nejsou kompenzovány příspěvky ψ_{2n} od sudých zón. Poněvadž přicházejí do bodu pozorování se stejnou fází, je amplituda vlnové funkce v bodě pozorování veliká, obdobně jako v obrazu zdroje vlnění vytvořeném čočkou. Zonální mřížky lze tedy používat jako čočky. To má veliký aktuální význam, neboť zonální mřížka může být zobrazovacím prvkem např. pro rentgenové záření, resp. obecně pro záření, pro něž neexistuje prostředí s indexem lomu výrazně různým od jedné, takže nelze vyrobit obvyklý typ čočky.



Obrázek 9: Zonální mřížky.

Zonální mřížky mají řadu pozoruhodných vlastností a aplikací. Pojednává o nich referativní článek [16]. Zde se jen zmíníme o několika z nich.

(i) Zonální mřížka má mnoho ohnisek. Např. z 3.4(8) vyplývá, že při fokusaci rovinné vlny zonální mřížkou existují kromě hlavního ohniska ještě vedlejší ohniska s ohniskovou vzdáleností 1/3, 1/5, 1/7,... hlavní ohniskové vzdálenosti. Je to způsobeno tím, že při těchto vzdálenostech každé propustné mezikruží mřížky propouští 3, 5, 7,... zón.

(ii) V hlavním ohnisku zonální mřížky je intenzita $1/\pi^2 \doteq 0,1$ intenzity v ohnisku ideální čočky stejného průměru a stejné ohniskové vzdálenosti.

(iii) Rozlišovací schopnost při zobrazení zonální mřížkou je rovna šířce posledního vnějšího propustného mezikruží, tj. $\sqrt{\lambda z}/(2\sqrt{n})$.

(iv) Koeficient barevné vady zonálních mřížek má opačné znaménko ve srovnání s koeficientem barevné vady skleněných čoček. Zonálních mřížek lze tedy využít ke kompenzaci barevné vady standardních čoček.

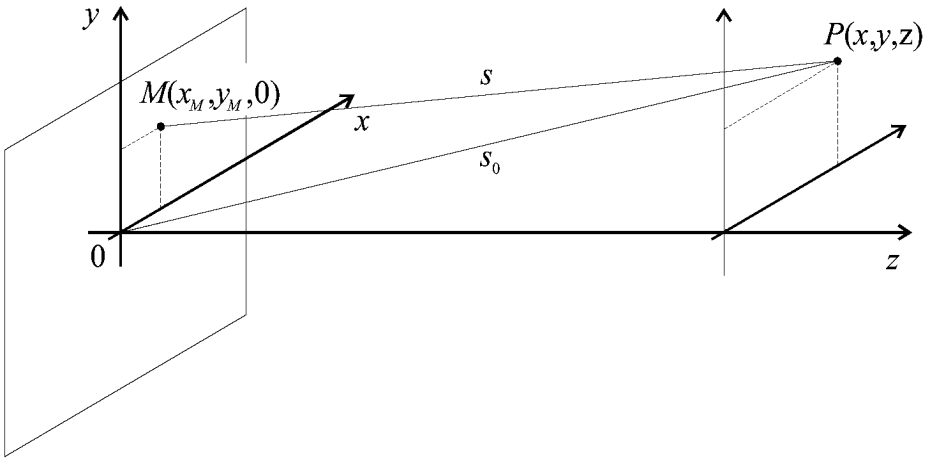
(v) Místo zastiňování zón je možné obracet fázi světla prošlého původně nepropustnými zónami [17]. Intenzita v ohnisku tím vzroste čtyřikrát, takže je $0,4$ intenzity v ohnisku ideální čočky stejného průměru a stejné ohniskové vzdálenosti.

Kniha [18] obsahuje výběr 74 významných článků o Soretových mřížkách.

3.6 Odvození difrakčních integrálů z Huygensova-Fresnelova principu

Odvodíme nyní difrakční integrály 2.3(1) pro Fraunhoferovu difrakci a 2.3(2) pro Fresnelovu difrakci z Huygensova-Fresnelova principu 3.2(6).

Uvedli jsme již, že za integrační obor S_0 v integrálu 3.2(6) se vždy volí buď nezastíněná část vlnoplochy nebo roviny difrakčního stínítka, nebo jiné vhodné roviny (viz např. [1], § 60). Starší autoři brávali za plochu S_0 část vlnoplochy, avšak aproximace, jichž při výpočtu integrálu používali, způsobily, že hned po počátečních úpravách dostávali vztahy identické s těmi, které se získají, když se za obor integrace zvolí část roviny. Budeme tedy za obor integrace S_0 brát část roviny odpovídající propustným částem difrakčního stínítka a tuto rovinu zvolíme za souřadnicovou rovinu $z = 0$ (viz obr. 10). Dále — opět s odvoláním na metodu stacionární fáze



Obrázek 10: Význam symbolů v rozvojích (3) a (4).

— položíme faktor sklonu $K(\vartheta) = 1$. Integrál 3.2(6) se tím redukuje do tvaru

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint\limits_{S_0} \psi_0(x_M, y_M) \frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s} \,\mathrm{d}x_M \,\mathrm{d}y_M. \tag{1}$$

Je zřejmé, že dosadíme-li do tohoto integrálu za kulovou vlnu její Fresnelovu aproximaci 1.10(6)

$$\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s} \approx \frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z} \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2\right]\right\} \tag{2}$$

a klademe-li $\psi_0(x_M, y_M) = 0$ v bodech nepropustné části stínítka, dostáváme difrakční integrál 2.3(2) pro Fresnelovy difrakční jevy:

$$\psi(x, y, z) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \psi_0(x_M, y_M) \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left[(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2\right]\right\} \mathrm{d}x_M \,\mathrm{d}y_M. \tag{3}$$

Z tohoto difrakčního integrálu budeme vycházet v kap. 5, při analytickém výpočtu vlnové funkce charakterizující některé typické Fresnelovy difrakční jevy. Tyto analytické výpočty nebývají zcela jednoduché, neboť většinou používají speciální funkce (Fresnelovy integrály, Besselovy funkce, Lommelovy funkce).

Také numerické výpočty difrakčního integrálu (3) nebývají jednoduché, neboť, jak víme, integrand je rychle oscilující funkcí polohy bodu $M(x_M, y_M)$ v rovině difrakčního stínítka. Existuje však snadný způsob,

jak vyjádřit difrakční integrál (3) Fourierovým integrálem. K tomu stačí rozvést druhé mocniny v argumentu fázoru, vytknout před integrál fázor nezávisející na integračních proměnných a drobná úprava:

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z) = &-\mathrm{i}\frac{k}{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z}\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right]\times\\ &\times\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_0(x_M,y_M)\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x_M^2+y_M^2\right)\right]\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k}{z}\left(xx_M+yy_M\right)\right]\mathrm{d}x_M\,\mathrm{d}y_M.\end{aligned}\tag{4}$$

Vlnová funkce charakterizující Fresnelovu difrakci je tak vyjádřena Fourierovou transformací součinu vlnové funkce ψ_0 v rovině difrakčního stínítka a fázoru $\exp[\frac{\mathrm{i}k}{2z}(x_M^2+y_M^2)]$. K numerickému výpočtu Fresnelovy difrakce tak lze využít metod vypracovaných pro Fourierovu transformaci. Je hodno pozoru, že před integrálem je Fresnelova aproximace sekundární kulové vlny vycházející z počátku ve Fresnelově aproximaci:

$$\frac{\exp(\mathrm{i}ks_0)}{s_0}\approx\frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z}\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right].\tag{5}$$

Odvození difrakčního integrálu 2.3(1) pro Fraunhoferovu difrakci z Huygensova–Fresnelova principu není elegantní. Je však v literatuře tak rozšířené (viz např. [10], str. 153,154, [11], §8.3.3, [19], [20], str. 1094–1051, [21], [22], [23]), že je uvedeme i zde. (Mnohem jednodušší a přirozenější odvození podáváme v kapitole 7 (srov. vztah 7.3(3), resp. 7.4(1)).)

Kulovou vlnu $\exp(\mathrm{i}ks)/s$ v Huygensově–Fresnelové principu (1) nyní aproximujeme poněkud jiným způsobem než Fresnelovou aproximací (2). Rozvineme vzdálenost $s=\overline{MP}$ v mocninnou řadu v integračních proměnných x_M, y_M (viz obr. 10):

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+z^2}\\
&= \sqrt{z^2+x^2+y^2-2(x\,x_M+y\,y_M)+x_M^2+y_M^2}\\
&= \sqrt{s_0^2-2(x\,x_M+y\,y_M)+x_M^2+y_M^2}\\
&= s_0\sqrt{1-2\frac{x\,x_M+y\,y_M}{s_0^2}+\frac{x_M^2+y_M^2}{s_0^2}}\\
&= s_0\left\{1-\frac{x\,x_M+y\,y_M}{s_0^2}+\frac{x_M^2+y_M^2}{2s_0^2}-\frac{(x\,x_M+y\,y_M)^2}{2s_0^4}+\cdots\right\}\\
&= s_0-\frac{1}{s_0}(x\,x_M+y\,y_M)+\frac{1}{2s_0}(x_M^2+y_M^2)-\frac{1}{2s_0^3}(x\,x_M+y\,y_M)^2+\cdots\\
&= s_0-x_M\frac{x}{s_0}-y_M\frac{y}{s_0}+\frac{1}{2s_0}\left\{x_M^2\left[1-\left(\frac{x}{s_0}\right)^2\right]+y_M^2\left[1-\left(\frac{y}{s_0}\right)^2\right]-2x_My_M\frac{x}{s_0}\frac{y}{s_0}\right\}+\cdots
\end{aligned}\tag{6}$$

Má-li funkce $\psi_0(x_M,y_M)$ nenulové hodnoty jen v okolí počátku O, jak tomu může být např. v případě prázdných otvorů v nepropustném stínítku, konkrétně je-li

$$\left.\frac{k(x_M^2+y_M^2)}{2s_0}\right|_{\max}\ll 2\pi,\qquad\text{tj.}\qquad\left.\sqrt{x_M^2+y_M^2}\right|_{\max}\ll\sqrt{2\lambda s_0}\,,\tag{7}$$

můžeme v exponenciele kulové vlny zanedbat členy obsahující integrační proměnné ve druhé a vyšších mocninách a aproximovat kulovou vlnu výrazem

$$\frac{\exp(\mathrm{i}ks)}{s}\approx\frac{\exp(\mathrm{i}ks_0)}{s_0}\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x}{s_0}\,x_M+\frac{y}{s_0}\,y_M\right)\right].\tag{8}$$

S použitím (8) má difrakční integrál (1) tvar Fourierovy transformace

$$\psi(P)=-\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}ks_0)}{s_0}\iint_{S_0}\psi_0(x_M,y_M)\exp\left[-\mathrm{i}k\left(\frac{x}{s_0}\,x_M+\frac{y}{s_0}\,y_M\right)\right]\mathrm{d}x_M\,\mathrm{d}y_M,\tag{9}$$

tentokrát však (narozdíl od (4)) přímo vlnové funkce $\psi_0(x_M, y_M)$ charakterizující vlnění v rovině difrakčního stínítka. Uvážíme-li, že

$$\frac{x}{s_0} = n_x, \qquad \frac{y}{s_0} = n_y. \tag{10}$$

kde $(n_x, n_y, \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2})$ jsou směrové kosiny směru $\overrightarrow{OP}$ a že při splnění podmínky (7) je výraz před integrálem (9) konstantní,

$$-\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\,\frac{\exp(\mathrm{i}ks_0)}{s_0} = C, \tag{11}$$

je vlnová funkce ψ funkcí směrových kosinů n_x, n_y a má tvar 2.3(1):

$$\psi(n_x, n_y) = C \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M) \exp\left[-\mathrm{i}k\left(n_x x_M + n_y y_M\right)\right] \mathrm{d}x_M\, \mathrm{d}y_M. \tag{12}$$

Vraťme se ještě k podmínce (7). Porovnáme-li ji s výrazem 3.4(8) pro poloměry Fresnelových zón, shledáme, že s Fraunhoferovou difrakcí máme co činit, když lineární rozměry propustné oblasti difrakčního stínítka jsou velmi malé ve srovnání s průměrem dvou (a tedy i jedné) Fresnelových zón. V této souvislosti je vhodné uvést definici tzv. Fresnelova čísla

$$N_f = \frac{a^2}{\lambda z}, \tag{13}$$

kde a je poloměr kružnice zahrnující oblasti kde má difrakční stínítko nenulové hodnoty funkce propustnosti a z je vzdálenost difrakčního stínítka od roviny pozorování. Fresnelova čísla se používá k odhadům o jaký typ difrakce při určitém experimentálním uspořádání jde. Je-li Fresnelovo číslo $N_f \geq 1$, jde většinou o Fresnelův difrakční jev, je-li $N_f < 1$, nebo raději $N_f \ll 1$, jde většinou o Fraunhoferovu difrakci. (Výjimkou bývají případy, kdy rovinou pozorování je rovina geometrického obrazu zdroje.)

V kapitole 7 uvidíme, že vlnová funkce (12) má význam amplitudy rovinné vlny vzniklé difrakcí a šířící se ve směru $(n_x, n_y, \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2})$. V příští kapitole vypočteme integrál (12) pro typické Fraunhoferovy difrakční jevy (difrakce na obdélníkovém a na kruhovém otvoru).

Reference

[1] Landau L. D., Lifšic E. M.: *Těorija polja.* Izdatěľstvo Nauka, Moskva 1973, § 59.

[2] Bell A. E.: *Christian Huygens and the developmnent of science in the seventeenth century.* Edward Arnold & Co, London 1947.

[3] Huygens Ch.: *Traité de la lumière.* Leyde 1690.

[4] Grimaldi F. M.: *Physico-mathesis de lumine, coloribus et iride.* Bononiae 1665.

[5] Marci J. M.: *Thaumantias. Liber de arcu coelesti deque colorum apparentium natura, ortu et causis.* Pragae 1648.

[6] Fresnel J. A.: *Œuvres complètes d'Augustin Fresnel,* Vol. 1. (H. de Senarmont, É. Verdet, L. Fresnel, eds.) Imprimerie Impériale, Paris 1866.

[7] Wood R. W.: *Physical Optics.* The Macmillan Company, London 1905.

[8] Bouasse H., Carrière Z.: *Diffraction.* Libraire Delagrave, Paris 1923.

[9] Newton I.: *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light.* Dover Publications, Inc., New York 1952.

[10] Born M.: *Optik.* Springer Verlag, Berlin 1933.

[11] Born M., Wolf E.: *Principles of Optics.* 7th ed. Cambridge University Press 1999.

[12] Rayleigh J. W.: poznámka z laboratorního deníku z 11. dubna 1871, citovaná v knize: Strutt R. J.: *John William Strutt — Third Baron Rayleigh.* Edward Arnold Co., London 1924, 88.

[13] Soret J. L.: Sur les phénomènes de diffraction produits par les réseaux circulaires. *Arch. Sci. Phys. Natur.* **52** (1875), 320–337.

[14] Soret J. L.: Ueber die durch Kreisgitter erzeugten Diffractionsphänomene. *Pogg. Ann.* **156** (1875), 99-113. Též [18], str. 11–25.

[15] Soret J. L.: Sur les phénomènes de diffraction produits par les réseaux circulaires. *Compt. Rend.* **80** (1875), 483–487.

[16] Chmelík R., Komrska J.: Zobrazování zonálními mřížkami. *Čs. čas. fyz.* **42** (1992), 128–145.

[17] Wood R. W.: Phase–Reversal Zone–Plates, and Diffraction–Telescopes. Philosophical Magazine, Series 5, **45** (1898), 511–523. Též [18], str. 26–37.

[18] Ojeda–Castañeda J., Gómez–Reino C. (editors): Selected Papers on Zone Plates. SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington USA, 1996.

[19] Drude P.: *Lehrbuch der Optik.* Verlag von S. Hirzel, Leipzig 1900, str. 172–175.

[20] Pockels F.: Beugung des Lichtes. In: *Handbuch der Physik,* Bd. VI. (A. Winkelmann, ed.) Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1906, str. 1032–1119.

[21] Laue M. v.: Interferenz und Beugung elektromagnetischer Wellen (mit Ausnahme der Röntgenstrahlen). In: *Handbuch der Experimentalphysik,* Bd. 18. (W. Wien, F. Harms, eds.) Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H., Leipzig 1928, str. 330–331.

[22] Joos G.: *Lehrbuch der theoretischen Physik.* 8. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig 1954, str. 341.

[23] Sommerfeld A.: *Optik.* 2. Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., Leipzig 1959, str. 182–184.