

5 Fresnelovy ohybové jevy

- 5.1 Fresnelova difrakce na obdélníkovém otvoru
- 5.2 Fresnelova difrakce na nepropustné polorovině
- 5.3 Fresnelova difrakce na štěrbině v nepropustném stínítku
- 5.4 Fresnelova difrakce na nepropustném vlákně
- 5.5 Fresnelova difrakce na dvojštěrbině v nepropustném stínítku
- 5.6 Fresnelova difrakce na pravém úhlu z nepropustného stínítka
- 5.7 Fresnelova difrakce na dokonale transparentní polorovině posouvající fázi o π
- 5.8 Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku
 - 5.8.1 Bod pozorování na ose rotační symetrie
 - 5.8.2 Bod pozorování není osovým bodem
- 5.9 Fresnelova difrakce na nepropustné kruhové překážce

Odvodili jsme, že vlnovou funkci charakterizující Fresnelovy difrakční jevy vyjadřuje difrakční integrál 3.6(3)

$$\psi(x, y, z) = -i \frac{k}{2\pi} \frac{\exp(ikz)}{z} \iint_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2] \right\} dx_M dy_M. \quad (1)$$

Vyjádřuje vlnovou funkci v bodech $P(x, y, z)$ roviny pozorování $z = \text{konst.} > 0$ prostřednictvím vlnové funkce ψ_0 v bodech $M(x_M, y_M, 0)$ roviny $z = 0$. Je-li vlna dopadající na stínítko rovinná nebo kulová, lze integrál (1) analyticky vypočítat pro dva typy difrakčních stínítek:

- (i) Je-li stínítko sestaveno z obdélníků tak, že všechny obdélníky mají rovnoběžné strany a funkce propustnosti v každém obdélníku je konstantní, lze difrakční integrál (1) vyjádřit Fresnelovými integrály.
- (ii) Je-li difrakční stínítko sestaveno z koncentrických mezikruží s konstantní propustností a má-li difrakční jev rotační symetrii (tj. zdroj leží na ose rotační symetrie stínítka), lze difrakční integrál (1) vyjádřit Lommelovými funkcemi.

Bylo by možné provést výpočty pro obecný typ stínítek specifikovaných v (i) nebo (ii). Je to však nepřehledné pro množství potřebných symbolů a indexů. Proto se omezíme na reprezentativní příklady. Vypočteme vlnovou funkci pro Fresnelovu difrakci na obdélníkovém otvoru. Z ní jako speciální případ získáme vlnovou funkci při difrakci na polorovině, štěrbině, vlákně apod. Dále vypočteme vlnovou funkci pro rotačně symetrickou Fresnelovu difrakci na kruhovém otvoru a kruhové překážce. Informace o používaných speciálních funkcích, tj. o Fresnelových integrálech a o Lommelových funkcích, podávají dodatky B a C.

V každém jednotlivém případě se budeme snažit vyjádřit vlnovou funkci ve tvaru

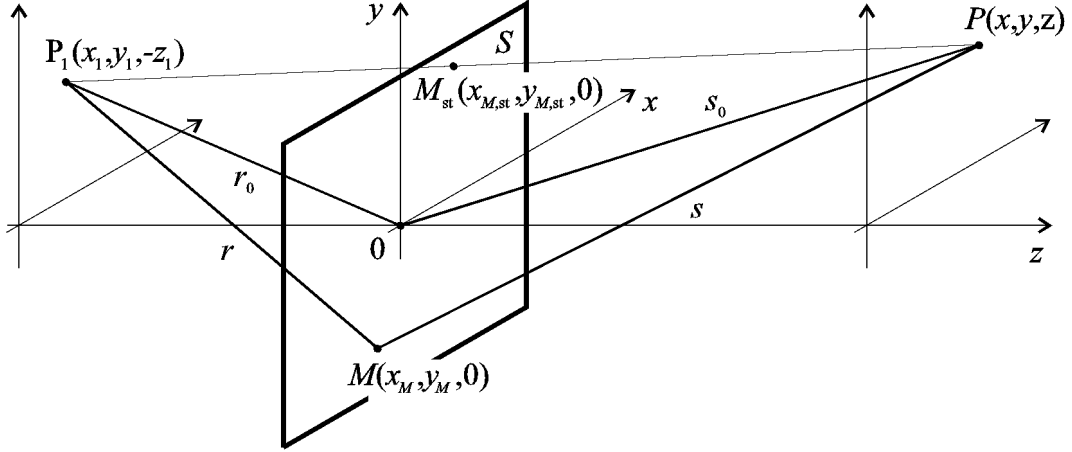
$$\frac{\psi(x, y, z)}{\psi_r(x, y, z)} = \sqrt{I(x, y, z)} \exp[i\phi(x, y, z)], \quad (2)$$

kde $\psi_r(x, y, z)$ je vlna, která by byla v bodě $P(x, y, z)$, kdyby nebylo žádného difrakčního stínítka, tj. nerušená vlna. V příkladech, které budeme počítat, je to kulová vlna, přesně řečeno Fresnelova aproximace kulové vlny. $I(x, y, z)$ je pak relativní intenzita a $\phi(x, y, z)$ fáze vztažená k fázi vlny ψ_r .

5.1 Fresnelova difrakce na obdélníkovém otvoru

Obdélníkový otvor v nepropustném stínítku charakterizuje funkce propustnosti

$$t(x_M, y_M) = \begin{cases} 1, & \text{když } a \leq x_M \leq b, \quad c \leq y_M \leq d, \\ 0, & \text{když je tomu jinak.} \end{cases} \quad (1)$$



Obrázek 1: Geometrické uspořádání při Fresnelově difrakci na obdélníkovém otvoru.

Dopadá-li na tento otvor kulová vlna, jejíž zdroj je v bodě $P_1(x_1, y_1, -z_1)$, $z_1 > 0$, je funkce $\psi_0(x_M, y_M)$ tvaru

$$\psi_0(x_M, y_M) = \frac{\exp(ikr)}{r} t(x_M, y_M), \quad (2)$$

kde $r = \sqrt{(x_1 - x_M)^2 + (y_1 - y_M)^2 + z_1^2}$ (viz obr. 1). Do difrakčního integrálu 5(1) dosadíme Fresnelovu aproximaci kulové vlny ve (2)

$$\frac{\exp(ikr)}{r} \approx \frac{\exp(ikz_1)}{z_1} \exp\left\{\frac{ik}{2z_1} [(x_M - x_1)^2 + (y_M - y_1)^2]\right\} \quad (3)$$

a dvojný integrál 5(1) se faktorizuje:

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= -i \frac{k}{2\pi} \frac{\exp[ik(z_1 + z)]}{z_1 z} \int_a^b \exp\left\{\frac{ik}{2} \left[\frac{(x_M - x_1)^2}{z_1} + \frac{(x - x_M)^2}{z}\right]\right\} dx_M \times \\ &\quad \times \int_c^d \exp\left\{\frac{ik}{2} \left[\frac{(y_M - y_1)^2}{z_1} + \frac{(y - y_M)^2}{z}\right]\right\} dy_M \\ &= -i \frac{k}{2\pi} \frac{\exp[ik(z_1 + z)]}{z_1 z} I_1(x) I_2(y). \end{aligned} \quad (4)$$

Věnujme se výpočtu integrálu $I_1(x)$. Rozvinutím druhých mocnin a vytknutím faktoru nezávislého na integrační proměnné před integrál dostaneme

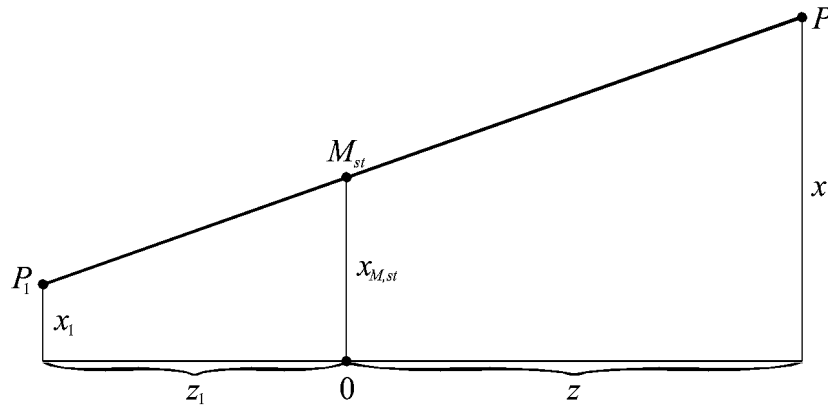
$$I_1(x) = \exp\left[\frac{ik}{2} \left(\frac{x_1^2}{z_1} + \frac{x^2}{z}\right)\right] \int_a^b \exp\left\{\frac{ik}{2} \left[x_M^2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z}\right) - 2x_M \left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{x}{z}\right)\right]\right\} dx_M.$$

Fázor v integrandu obsahuje integrační proměnnou ve druhé a v první mocnině. Takový integrál lze vyjádřit Fresnelovým integrálem. Za tím účelem upravíme integrand do tvaru $\exp[i \text{konst.} (x_M - x_{M,st})^2]$:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \exp\left[\frac{ik}{2} \left(\frac{x_1^2}{z_1} + \frac{x^2}{z}\right)\right] \int_a^b \exp\left[\frac{ik}{2} \frac{z_1 + z}{z_1 z} \left(x_M^2 - 2x_M \frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z}\right)\right] dx_M \\ &= \exp\left\{\frac{ik}{2} \left[\frac{x_1^2}{z_1} + \frac{x^2}{z} - \frac{z_1 + z}{z_1 z} \left(\frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z}\right)^2\right]\right\} \int_a^b \exp\left[\frac{ik}{2} \frac{z_1 + z}{z_1 z} \left(x_M - \frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z}\right)^2\right] dx_M. \end{aligned} \quad (5)$$

Všimněme si geometrického významu výrazu

$$x_{M,st} = \frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z}. \quad (6)$$

Obrázek 2: K výpočtu souřadnice $x_{M,st}$.

$x_{M,st}$ je x -ová souřadnice bodu M_{st} roviny $z = 0$, který leží na spojnici zdroje P_1 a bodu pozorování P . Je totiž řešením rovnice, která plyne z podobnosti trojúhelníků (viz obr. 2):

$$\frac{x_{M,st} - x_1}{z_1} = \frac{x - x_{M,st}}{z}.$$

Fáze integrandu integrálu (5) je v bodě M_{st} stacionární.

Upravíme ještě výraz v hranaté závorce v argumentu fázoru před integrálem v (5)

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2}{z_1} + \frac{x^2}{z} - \frac{(x_1z + xz_1)^2}{(z_1 + z)z_1z} &= \frac{x_1^2}{z_1} + \frac{x^2}{z} - \frac{x_1^2z}{(z_1 + z)z_1} - \frac{x^2z_1}{(z_1 + z)z} - 2\frac{x_1x}{z_1 + z} \\ &= \frac{x_1^2}{z_1} \left(1 - \frac{z}{z_1 + z}\right) + \frac{x^2}{z} \left(1 - \frac{z_1}{z_1 + z}\right) - 2\frac{x_1x}{z_1 + z} \\ &= \frac{1}{z_1 + z} (x_1^2 + x^2 - 2x_1x) \\ &= \frac{(x - x_1)^2}{z_1 + z}. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$I_1(x) = \exp \left[\frac{ik(x - x_1)^2}{2(z_1 + z)} \right] \int_a^b \exp \left[\frac{ik}{2} \frac{z_1 + z}{z_1z} \left(x_M - \frac{x_1z + xz_1}{z_1 + z} \right)^2 \right] dx_M. \quad (7)$$

Abychom vyjádřili $I_1(x)$ prostřednictvím Fresnelových integrálů, zavedeme do (7) substituci

$$\frac{k}{2} \frac{z_1 + z}{z_1z} \left(x_M - \frac{x_1z + xz_1}{z_1 + z} \right)^2 = \frac{\pi}{2} v^2,$$

konkrétně

$$\sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1z}} \left(x_M - \frac{x_1z + xz_1}{z_1 + z} \right) = -v. \quad (8)$$

Znaménko mínus na pravé straně rovnice (8) volíme proto, abychom zajistili, že proměnná v roste s rostoucím x . Takže

$$dx_M = -\frac{dv}{\sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1z}}}$$

a

$$I_1(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{k} \frac{z_1z}{z_1 + z}} \exp \left[\frac{ik(x - x_1)^2}{2(z_1 + z)} \right] \int_{v_a}^{v_b} \exp \left(i\frac{\pi}{2} v^2 \right) dv, \quad (9)$$

kde

$$v_a = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z}} \left(\frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z} - a \right), \quad (10)$$

$$v_b = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z}} \left(\frac{x_1 z + x z_1}{z_1 + z} - b \right). \quad (11)$$

Zcela obdobně se vypočte druhý z integrálů ve (4)

$$I_2(y) = -\sqrt{\frac{\pi}{k} \frac{z_1 z}{z_1 + z}} \exp \left[\frac{ik(y - y_1)^2}{2(z_1 + z)} \right] \int_{u_c}^{u_d} \exp \left(i \frac{\pi}{2} u^2 \right) du, \quad (12)$$

kde

$$u_c = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z}} \left(\frac{y_1 z + y z_1}{z_1 + z} - c \right), \quad (13)$$

$$u_d = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z}} \left(\frac{y_1 z + y z_1}{z_1 + z} - d \right). \quad (14)$$

Dosadíme-li součin

$$I_1(x)I_2(y) = \frac{\pi}{k} \frac{z_1 z}{z_1 + z} \exp \left\{ \frac{ik}{2(z_1 + z)} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \right\} \int_{v_a}^{v_b} \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv \int_{u_c}^{u_d} \exp \left(i \frac{\pi}{2} u^2 \right) du$$

do výrazu (4), dostaneme

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & -\frac{i}{2} \int_{v_a}^{v_b} \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv \int_{u_c}^{u_d} \exp \left(i \frac{\pi}{2} u^2 \right) du \times \\ & \times \frac{\exp[ik(z_1 + z)]}{z_1 + z} \exp \left\{ \frac{ik}{2(z_1 + z)} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Ve shodě s cílem našeho snažení (srov. 5(2)) poznáváme v části výrazu (15) nerušenou vlnu ψ_r , která by byla v bodě $P(x, y, z)$ za nepřítomnosti jakéhokoli stínítka. Je jí kulová vlna vycházející ze zdroje $P_1(x_1, y_1, -z_1)$ ve Fresnelově aproximaci

$$\psi_r(x, y, z) = \frac{\exp[ik(z_1 + z)]}{z_1 + z} \exp \left\{ \frac{ik}{2(z_1 + z)} [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] \right\} \approx \frac{\exp(ikR)}{R}, \quad (16)$$

kde $R = \overline{P_1 P} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2}$ (viz obr. 1). Podle 5(2) tedy přepíšeme rovnici (15) do tvaru

$$\frac{\psi(x, y, z)}{\psi_r(x, y, z)} = \sqrt{I(x, y, z)} \exp[i\phi(x, y, z)] = -\frac{i}{2} \int_{v_a}^{v_b} \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv \int_{u_c}^{u_d} \exp \left(i \frac{\pi}{2} u^2 \right) du. \quad (17)$$

(Fresnelovy integrály závisejí na souřadnicích x, y, z bodu pozorování P prostřednictvím mezí integrace (10), (11), (13), (14).)

Při nerušeném šíření vlny musí být $\psi/\psi_r = 1$, tj. $I(x, y, z) = 1$, $\phi(x, y, z) = 0$. Přesvědčme se o tom. Nekonečně velkému obdélníku odpovídá $a = -\infty$, $b = \infty$, $c = -\infty$, $d = \infty$. Podle (10), (11), (13), (14) z toho vyplývá, že $v_a = \infty$, $v_b = -\infty$, $u_c = \infty$, $u_d = -\infty$. Je tedy

$$\frac{\psi}{\psi_r} = -\frac{i}{2} \left[\int_{\infty}^{-\infty} \exp \left(i \frac{\pi}{2} t^2 \right) dt \right]^2 = \frac{-i}{2} (1 + i)^2 = 1.$$

Vraťme se k Fresnelově difrakci na obdélníkovém otvoru. Abychom mohli napsat výraz pro intenzitu, musíme integrály v (17) vyjádřit prostřednictvím jejich reálné a imaginární části a tyto části vyjádřit prostřednictvím Fresnelových integrálů $S(x)$ a $C(x)$. Dolní integrační mez v definici Fresnelových integrálů je nula, a proto provedeme tuto úpravu:

$$\begin{aligned} \int_{v_a}^{v_b} \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv &= \left[\int_{v_a}^0 + \int_0^{v_b} \right] \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv = \left[\int_0^{v_b} - \int_0^{v_a} \right] \exp \left(i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv = \\ &= C(v_b) + iS(v_b) - C(v_a) - iS(v_a) = C(v_b) - C(v_a) + i[S(v_b) - S(v_a)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Podobně

$$\int_{u_c}^{u_d} \exp\left(i\frac{\pi}{2}u^2\right) du = C(u_d) - C(u_c) + i[S(u_d) - S(u_c)]. \quad (19)$$

Dosadíme-li (18) a (19) do (17) a upravíme-li takto vzniklý výraz tak, aby byla oddělena jeho reálná část od imaginární části, dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{\psi_r} = & \frac{1}{2} \{ [C(v_b) - C(v_a)][S(u_d) - S(u_c)] + [S(v_b) - S(v_a)][C(u_d) - C(u_c)] \} + \\ & + \frac{i}{2} \{ [S(v_b) - S(v_a)][S(u_d) - S(u_c)] - [C(v_b) - C(v_a)][C(u_d) - C(u_c)] \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Odtud — součtem čtverců reálné a imaginární části — dostaneme relativní intenzitu

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{4} \{ [C(v_b) - C(v_a)]^2 [C(u_d) - C(u_c)]^2 + [S(v_b) - S(v_a)]^2 [S(u_d) - S(u_c)]^2 + \\ & + [C(v_b) - C(v_a)]^2 [S(u_d) - S(u_c)]^2 + [S(v_b) - S(v_a)]^2 [C(u_d) - C(u_c)]^2 \} \end{aligned} \quad (21)$$

a fázi jako arkustangens podílu imaginární a reálné části

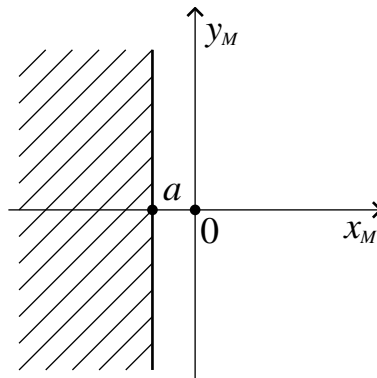
$$\phi = \text{Arctg} \frac{[S(v_b) - S(v_a)][S(u_d) - S(u_c)] - [C(v_b) - C(v_a)][C(u_d) - C(u_c)]}{[C(v_b) - C(v_a)][S(u_d) - S(u_c)] + [S(v_b) - S(v_a)][C(u_d) - C(u_c)]}. \quad (22)$$

(Symbolem $\text{Arctg } x$ značíme všechny větve funkce arkustangens. Hlavní větev značíme symbolem $\text{arctg } x$, takže platí $\text{Arctg } x = \text{arctg } x + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Pomocí vztahu (21) by bylo možné vypočítat rozložení intenzity v difrakčních jevech na obr. 2.5. Nebudeme to dělat. Místo toho vypočteme rozložení intenzity a fáze v důležitých speciálních případech, které lze z obdélníku odvodit (polorovina, štěrbina atd.), a upozorníme na zajímavosti těchto jevů.

5.2 Fresnelova difrakce na nepropustné polorovině

Předpokládejme, že okraj nepropustné poloroviny je rovnoběžný s osou y_M a že polorovina zastiňuje oblast $x_M \leq a$ roviny (O, x_M, y_M) (viz obr. 3). Chceme-li považovat propustnou část roviny (O, x_M, y_M) za obdélník, musíme položit



Obrázek 3: Nepropustná polorovina zastiňující část $x_M < a$ roviny (O, x_M, y_M) .

$$a = a, \quad b = \infty, \quad c = -\infty, \quad d = \infty. \quad (1)$$

Podle 5.1(10) až 5.1(14) tomu odpovídají proměnné Fresnelových integrálů

$$v_a = v_a, \quad v_b = -\infty, \quad u_c = \infty, \quad u_d = -\infty, \quad (2)$$

takže Fresnelovy integrály nabývají hodnot

$$C(v_a), \quad S(v_a), \quad C(v_b) = S(v_b) = -1/2, \quad C(u_c) = S(u_c) = 1/2, \quad C(u_d) = S(u_d) = -1/2. \quad (3)$$

Dosazením výrazů (3) do 5.1(21) a 5.1(22) se dostane rozložení intenzity a fáze ve výsledném tvaru (6) a (7) uvedeném níže. Z cvičných důvodů však dosadíme hodnoty (2) do 5.1(17) a upravíme tak získaný výraz pro vlnovou funkci:

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{\psi_r} &= -\frac{i}{2} \int_{v_a}^{-\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \int_{\infty}^{-\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}u^2\right) du = \\ &= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{v_a} \exp\left(i\frac{\pi}{2}v^2\right) dv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\frac{\pi}{2}u^2\right) du = \\ &= -\frac{i}{2} \left[\int_{-\infty}^0 + \int_0^{v_a} \right] \exp\left(i\frac{\pi}{2}v^2\right) dv (1+i) = \\ &= -\frac{i(1+i)}{2} \left[\frac{1+i}{2} + C(v_a) + iS(v_a) \right] = \\ &= \frac{1-i}{2} \left\{ \frac{1}{2} + C(v_a) + i \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \right\} = \\ &= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} + C(v_a) + i \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \right\} = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right]^2 \right\}} \exp \left\{ i \left[\operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{2} + S(v_a)}{\frac{1}{2} + C(v_a)} - \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (5)$$

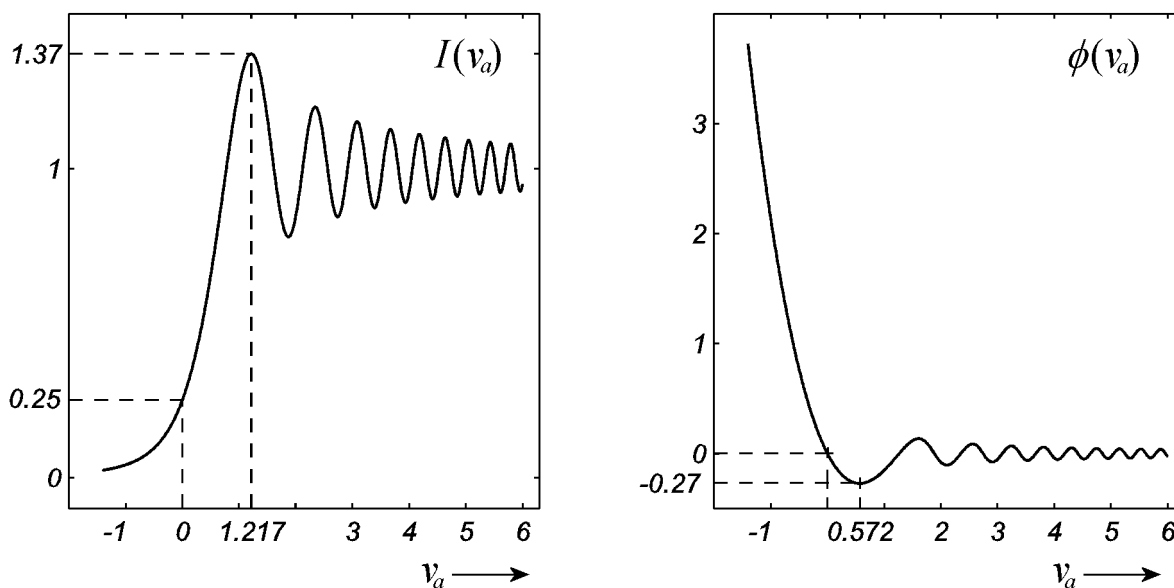
Rozložení intenzity ve Fresnelově difrakčním jevu na nepropustné polorovině tedy charakterizuje funkce

$$I(v_a) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right]^2 \right\}, \quad (6)$$

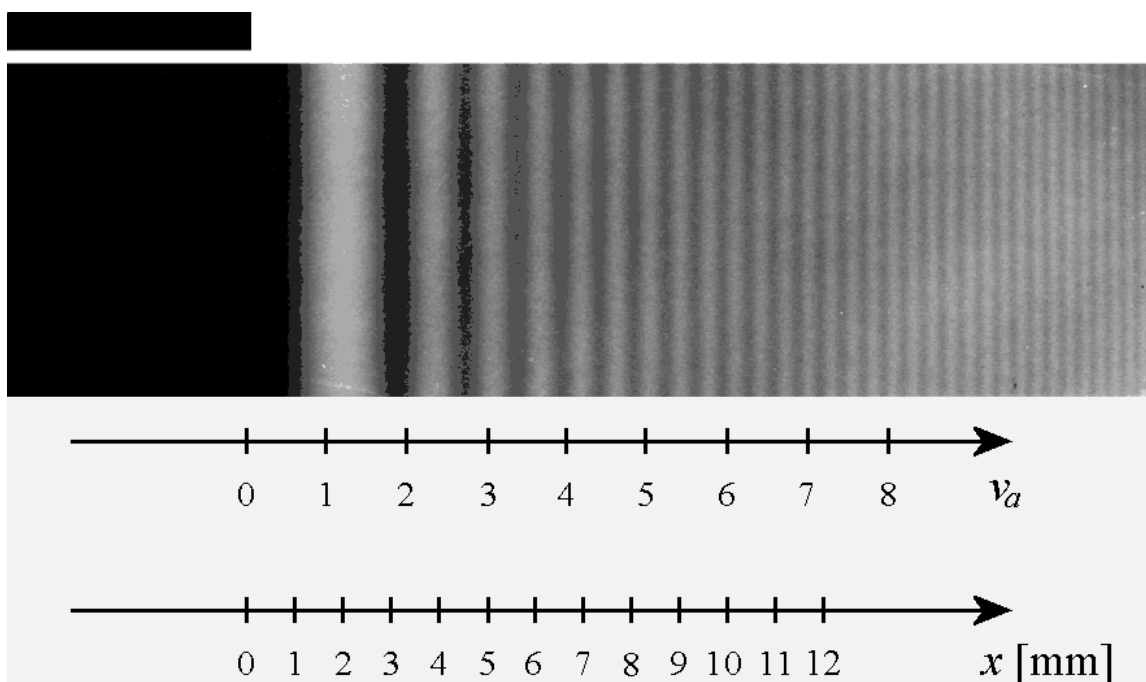
jejíž graf je na obr. 4. Fotografie difrakce na polorovině je na obr. 5. Rozložení fáze v difrakčním jevu charakterizuje funkce

$$\phi(v_a) = \operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{2} + S(v_a)}{\frac{1}{2} + C(v_a)} - \frac{\pi}{4}, \quad (7)$$

jejíž graf je na obr. 4.



Obrázek 4: Relativní intenzita $I(v_a)$ (viz 5.2(6)) a fáze $\phi(v_a)$ (viz 5.2(7)) ve Fresnelově difrakci na nepropustné polorovině.



Obrázek 5: Fotografie Fresnelovy difrakce na nepropustné polorovině ($z_1 = 1$ m, $z = 2,5$ m, $x_1 = a = 0$, $\lambda = 6,328 \cdot 10^{-7}$ m).

Ze vztahů (6) a (7) je vidět, že rozložení intenzity i fáze ve Fresnelově difrakčním jevu na nepropustné polorovině závisí na jediném parametru v_a . Všechny parametry experimentálního uspořádání ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, x_1 , z_1 , a , x , y , z) totiž podle 5.1(10) vytvoří jediný parametr v_a . Z toho vyplývá, že všechny Fresnelovy difrakční jevy na nepropustné polorovině — získané při jakýchkoliv parametrech experimentálního uspořádání — jsou si geometricky podobné. Vypočteme-li tedy rozložení intenzity a fáze jako funkci parametru v_a , dostaneme ona rozložení jako funkce souřadnice x v rovině pozorování $z = \text{konst.}$ podle vztahu 5.1(10), z něhož vyplývá

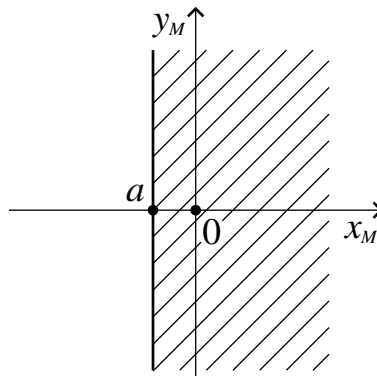
$$x = v_a \sqrt{\frac{\pi}{k} z \left(1 + \frac{z}{z_1}\right)} + a + (a - x_1) \frac{z}{z_1}.$$

Z geometrie uspořádání lze pomocí podobnosti nahlédnout, že geometrickému stínu okraje poloroviny odpovídá hodnota souřadnice $x = a + (a - x_1)z/z_1$, tj. $v_a = 0$. Hodnotám $v_a > 0$ odpovídá tedy osvětlená část roviny pozorování, hodnotám $v_a < 0$ zastíněná část. Z obr. 4 je vidět, že v osvětlené části roviny pozorování relativní intenzita I osciluje s klesající amplitudou a rostoucí frekvencí kolem jedné, a fáze ϕ osciluje obdobným způsobem kolem nuly. Naproti tomu v zastíněné části roviny pozorování relativní intenzita klesá asymptoticky k nule, kdežto fáze neomezeně vzrůstá. Matematicky lze tyto skutečnosti názorně a přitom s dobrým přiblížením vyjádřit elementárními funkcemi: Dosadíme-li do výrazů (6) a (7) asymptotická vyjádření Fresnelových integrálů B.4(12) a B.4(13), vypočteme (viz B.4(16) až B.4(21)), že v osvětlené části roviny pozorování pro $v_a > 2$ s dobrým přiblížením platí (srov. obr. 9 a 10 v dodatku B)

$$I(v_a) \approx 1 + \frac{\sqrt{2}}{\pi v_a} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(v_a^2 - \frac{1}{2} \right) \right], \quad \phi(v_a) \approx -\frac{\sqrt{2}}{2\pi v_a} \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(v_a^2 - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (8)$$

a v zastíněné oblasti roviny pozorování je pro $v_a < -2$ (srov. obr. 9 a 10 v dodatku B)

$$I(v_a) \approx \frac{1}{2(\pi v_a)^2}, \quad \phi(v_a) \approx \frac{\pi}{2} \left(v_a^2 + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$



Obrázek 6: Nepropustná polorovina zastiňující část $x_M > a$ roviny (O, x_M, y_M) .

Uvažujme nyní o komplementárním stínítku, tj. o polorovině, která zastiňuje část $x_M < a$ roviny (O, x_M, y_M) (viz obr. 6). Označíme-li vlnovou funkci charakterizující Fresnelovu difrakci na takové polorovině ψ_{compl} , musí platit

$$\frac{\psi}{\psi_r} + \frac{\psi_{\text{compl}}}{\psi_r} = 1, \quad (10)$$

kde $\frac{\psi}{\psi_r}$ je vlnová funkce (4) resp. (5) charakterizující difrakci na polorovině podle obr. 3. Rovnice (10) vyjadřuje skutečnost, že součtem difrakčních jevů na opačně orientovaných nepropustných polorovinách se společným okrajem je nerušené šíření vlny.

Dosadíme-li do (10) výraz (4), dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_{\text{compl}}}{\psi_r} &= 1 - \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} + C(v_a) + i \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \right\} = \\
&= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} - C(v_a) - \frac{i}{2} - iS(v_a) \right] = \\
&= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} - C(v_a) + i \left[\frac{1}{2} - S(v_a) \right] \right\} = \\
&= \sqrt{I_{\text{compl}}(v_a)} \exp[i\phi_{\text{compl}}(v_a)],
\end{aligned} \tag{11}$$

kde

$$I_{\text{compl}}(v_a) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(v_a) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} - S(v_a) \right]^2 \right\}, \tag{12}$$

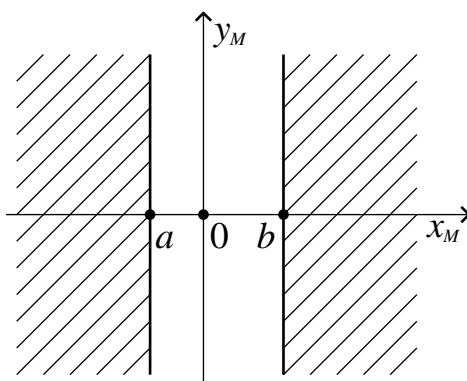
$$\phi_{\text{compl}}(v_a) = \text{Arctg} \frac{\frac{1}{2} - S(v_a)}{\frac{1}{2} - C(v_a)} - \frac{\pi}{4}. \tag{13}$$

Porovnáme-li (12) s (6) a (13) se (7) a uvážíme-li, že Fresnelovy integrály $C(v_a)$ a $S(v_a)$ jsou liché funkce, shledáme, že rozložení intenzity i fáze v difrakčních jevech na komplementárních polorovinách jsou zrcadlově symetrická podle přímky geometrického stínu okraje polorovin. To je ovšem výsledek, který je zřejmý z názoru i bez počítání.

Fresnelova difrakce na nepropustné polorovině je vůbec prvním precizně interpretovaným difrakčním jevem. Její podrobný popis tvoří podstatnou část slavného Fresnelova „Mémoire sur la diffraction de la lumière“ z r. 1818 nazývaného „Mémoire couronné“ (viz [1], str. 247–382), neboť byl v roce 1819 oceněn francouzskou Akademií.

5.3 Fresnelova difrakce na štěrbině v nepropustném stínítku

Předpokládejme, že štěrbinu je rovnoběžná s osou y_M a že její okraje mají souřadnici $x_M = a$ a $x_M = b$ (viz obr. 7). Považujeme ji za nekonečně dlouhý obdélník a klademe $c = -\infty$, $d = \infty$. Podle 5.1(10) až 5.1(14) tomu odpovídají proměnné Fresnelových integrálů



Obrázek 7: Štěrbina v nepropustném stínítku.

$$v_a = v_a, \quad v_b = v_b, \quad u_c = \infty, \quad u_d = -\infty, \tag{1}$$

takže Fresnelovy integrály nabývají hodnot

$$C(v_a), \quad S(v_a), \quad C(v_b), \quad S(v_b), \quad C(u_c) = S(u_c) = \frac{1}{2}, \quad C(u_d) = S(u_d) = -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

Dosazením těchto hodnot do 5.1(17) dostaneme vlnovou funkci ψ_s charakterizující Fresnelovu difrakci na štěrbíně:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_s}{\psi_r} &= -\frac{i}{2} [-(1+i)] \int_{v_a}^{v_b} \exp\left(i \frac{\pi}{2} v^2\right) dv = \\ &= \frac{-1+i}{2} \left[\int_{v_a}^0 + \int_0^{v_b} \right] \exp\left(i \frac{\pi}{2} v^2\right) dv = \\ &= \frac{-1+i}{2} [C(v_b) + iS(v_b) - C(v_a) - iS(v_a)] = \\ &= \frac{\exp\left(i \frac{3}{4} \pi\right)}{\sqrt{2}} \left\{ C(v_b) - C(v_a) + i[S(v_b) - S(v_a)] \right\} = \\ &= \sqrt{I_s} \exp(i\phi_s), \end{aligned} \quad (3)$$

kde

$$I_s(v_a, v_b) = \frac{1}{2} \left\{ [C(v_b) - C(v_a)]^2 + [S(v_b) - S(v_a)]^2 \right\} \quad (4)$$

a

$$\phi_s(v_a, v_b) = \text{Arctg} \frac{S(v_b) - S(v_a)}{C(v_b) - C(v_a)} - \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

představují rozložení intenzity I_s a fáze ϕ_s v rovině pozorování.

Intenzita I_s i fáze ϕ_s závisejí na dvou proměnných v_a , v_b , které obě mohou nabývat hodnot $-\infty$ až ∞ . Obě jsou lineárními funkcemi souřadnice x v rovině pozorování $z = \text{konst.}$ a tyto lineární funkce se liší pouze absolutními členy. Jejich rozdíl

$$\Delta v = v_a - v_b = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z}} (b - a) \quad (6)$$

proto nezávisí na souřadnici x a je úměrný šířce $(b - a)$ štěrbiny.

Geometrickému stínu okrajů štěrbiny odpovídají v rovině pozorování souřadnice

$$\begin{aligned} x_a &= a \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) - x_1 \frac{z}{z_1}, & \text{tj. } v_a = 0, \quad v_b = -\Delta v, \\ x_b &= b \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) - x_1 \frac{z}{z_1}, & \text{tj. } v_b = 0, \quad v_a = \Delta v. \end{aligned}$$

Střed difrakčního obrazce má souřadnici

$$x_m = \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{z}{z_1}\right) - x_1 \frac{z}{z_1} \quad (7)$$

a proměnné v_a a v_b nabývají ve středu difrakčního obrazce hodnot

$$v_a = \frac{\Delta v}{2}, \quad v_b = -\frac{\Delta v}{2}. \quad (8)$$

Proto se jeví být vhodné vyjádřit intenzitu I_s i fázi ϕ_s pomocí proměnné

$$v = \frac{v_a + v_b}{2} = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1}{z(z_1 + z)}} (x - x_m), \quad (9)$$

jež nabývá nulové hodnoty ve středu difrakčního obrazce (a je tedy úměrná vzdálenosti $(x - x_m)$ od středu difrakčního obrazce) a parametru

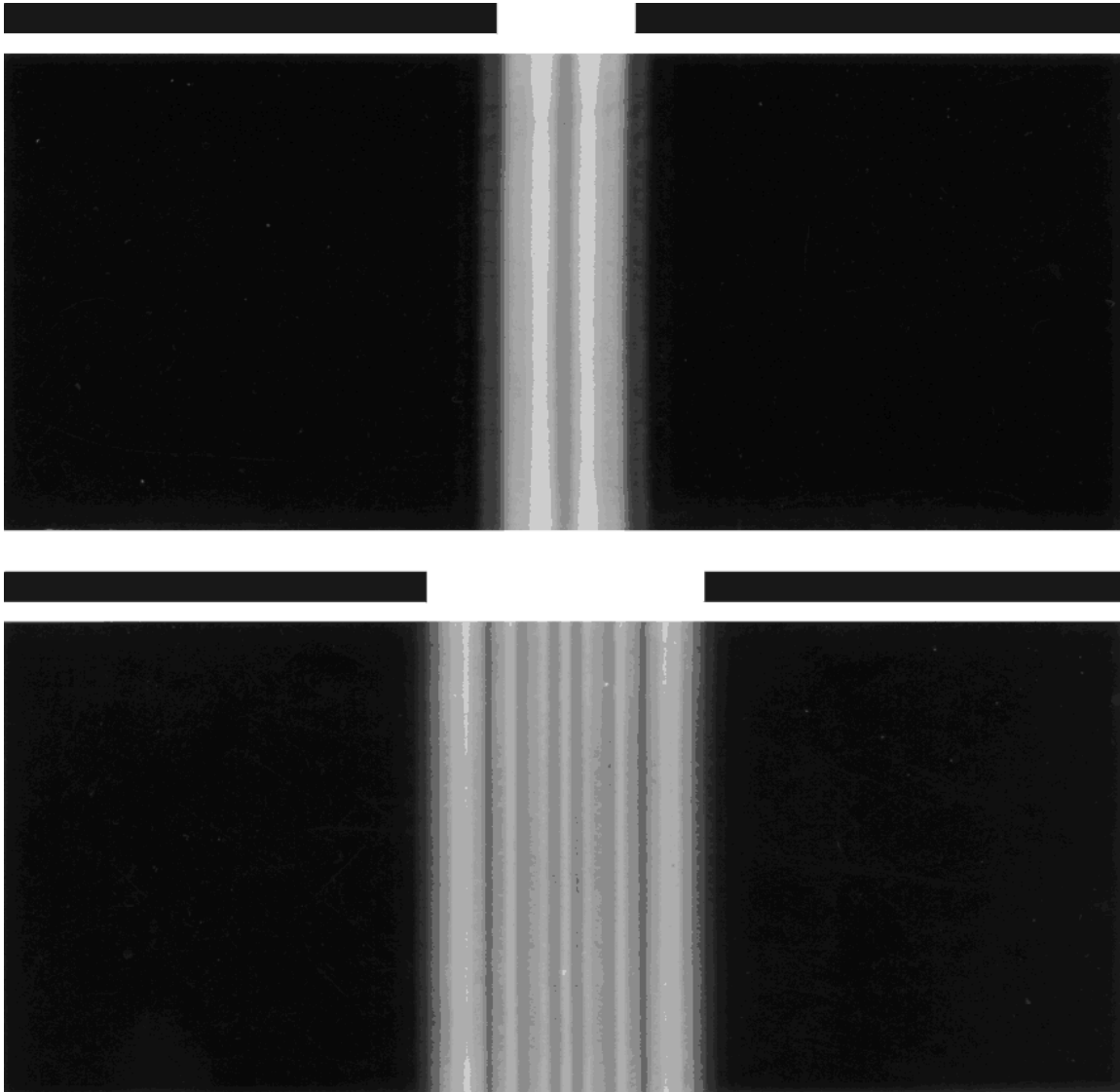
$$\frac{\Delta v}{2} = \frac{v_a - v_b}{2} = \sqrt{\frac{k}{\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z} \frac{b - a}{2}}, \quad (10)$$

který nezávisí na souřadnici x v rovině pozorování a je tedy pro určitý difrakční jev konstantou. Výrazy (4) a (5) pro intenzitu I_s a fázi ϕ_s ve Fresnelově difrakčním jevu na štěrbině v nepropustném stínítku přepíšeme do tvaru

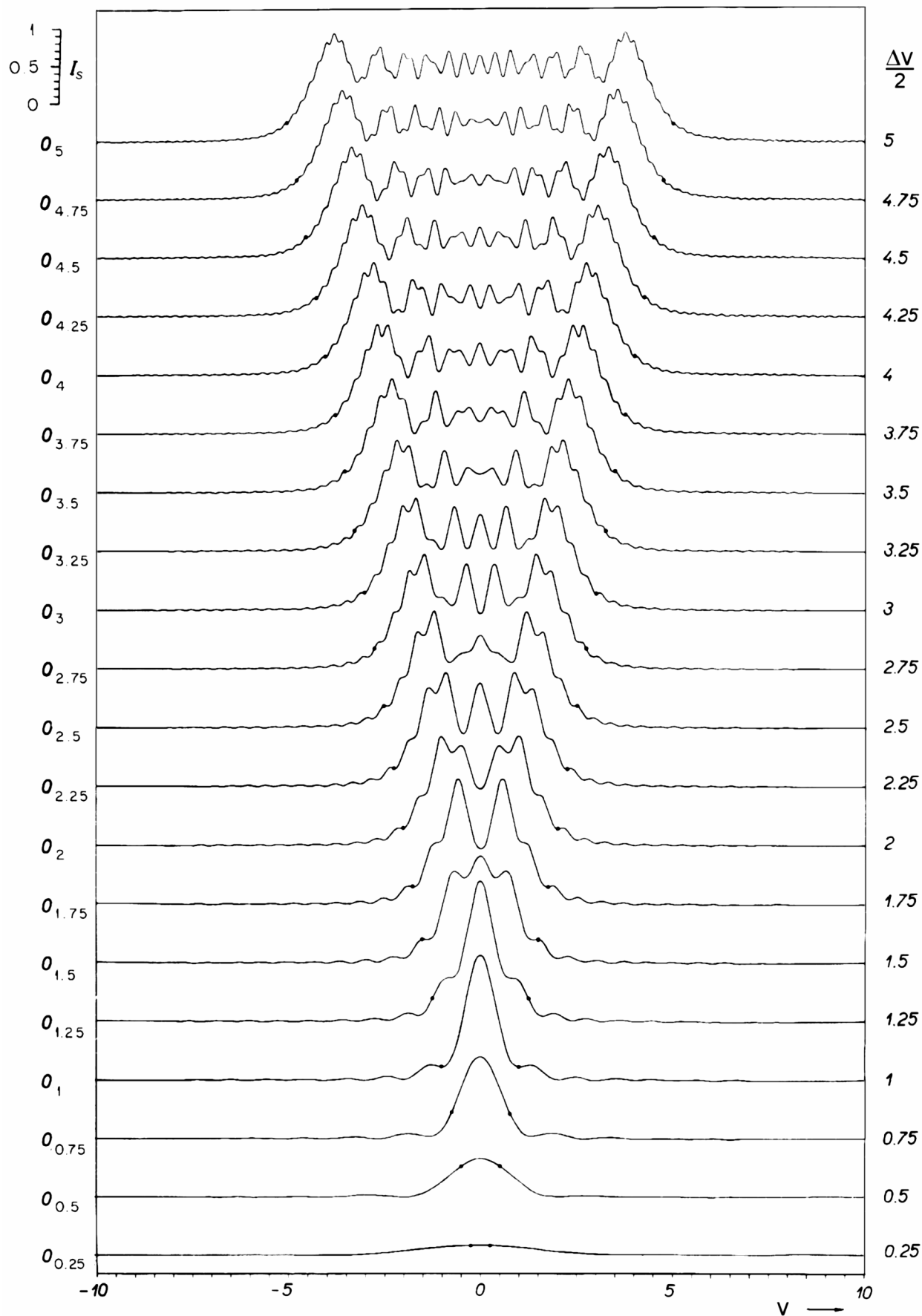
$$I_s \left(v, \frac{\Delta v}{2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left[C \left(v - \frac{\Delta v}{2} \right) - C \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right) \right]^2 + \left[S \left(v - \frac{\Delta v}{2} \right) - S \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right) \right]^2 \right\}, \quad (11)$$

$$\phi_s \left(v, \frac{\Delta v}{2} \right) = \text{Arctg} \frac{S \left(v - \frac{\Delta v}{2} \right) - S \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right)}{C \left(v - \frac{\Delta v}{2} \right) - C \left(v + \frac{\Delta v}{2} \right)} - \frac{\pi}{4}. \quad (12)$$

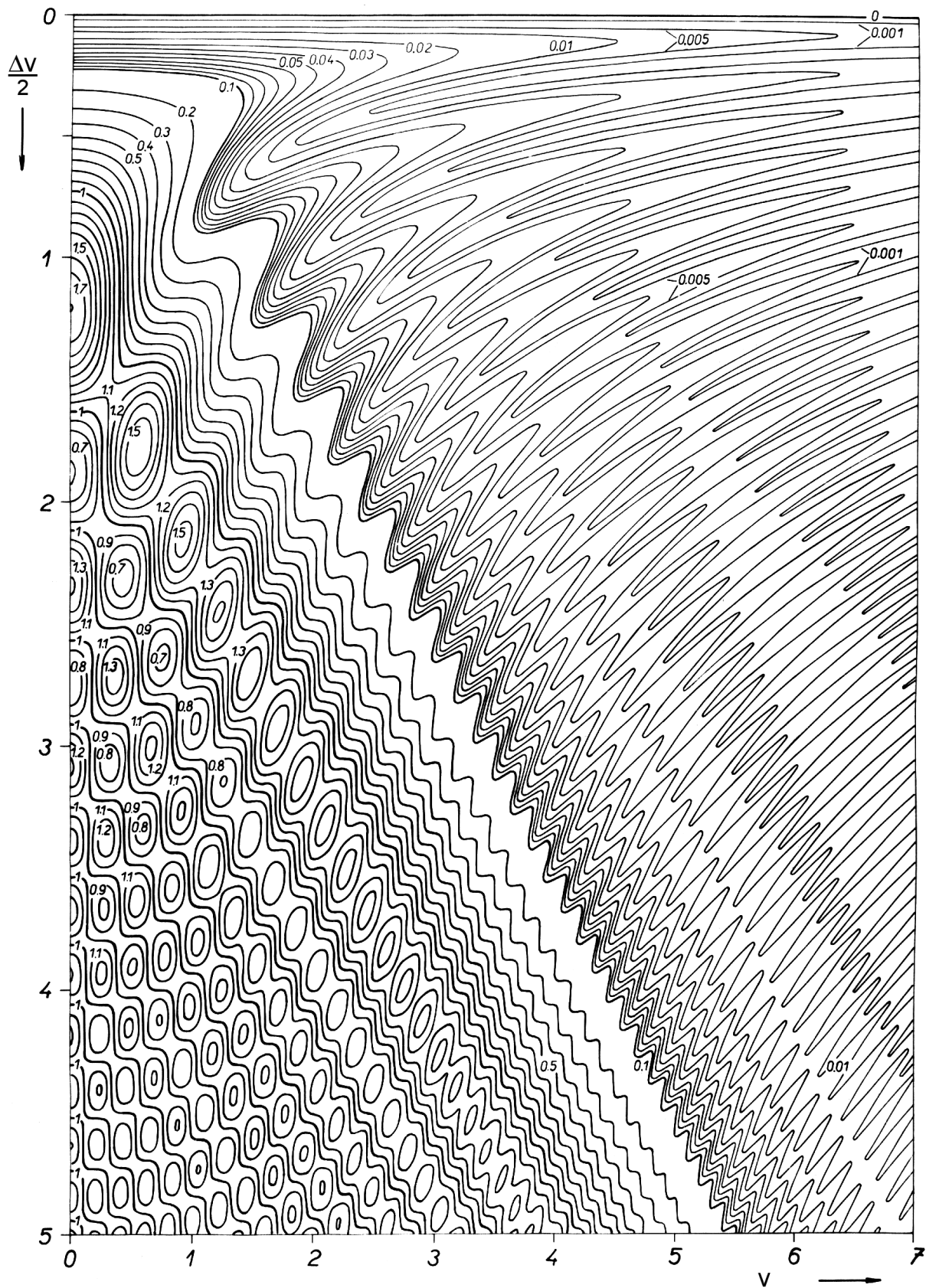
Fotografie dvou Fresnelových difrakčních jevů na štěrbině v nepropustném stínítku jsou na obrázku 8. Grafy funkcí (11) a (12) jsou na obrázcích 9, 10 a 11.



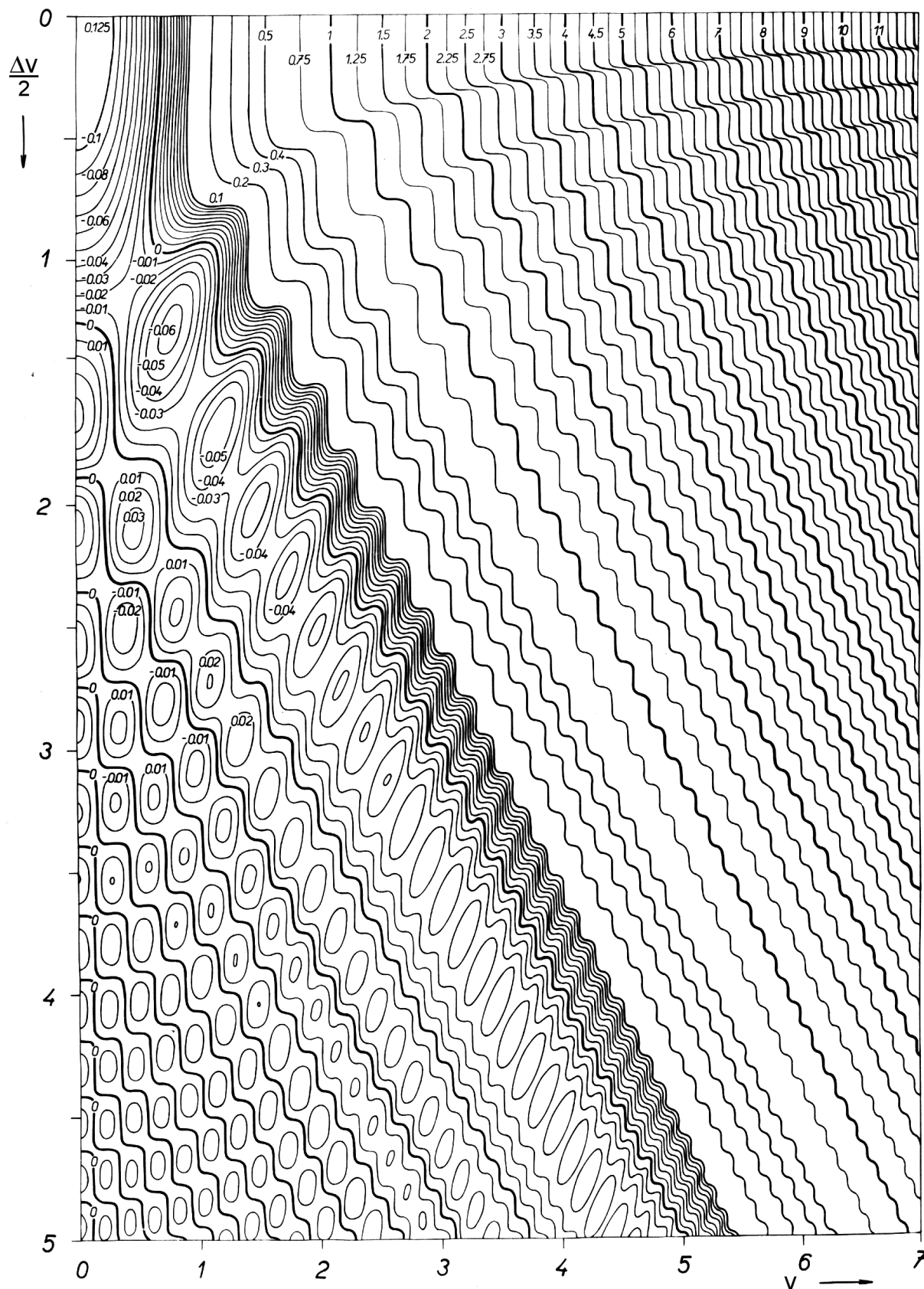
Obrázek 8: Fotografie Fresnelovy difrakce na štěrbině v nepropustném stínítku.



Obrázek 9: Relativní intenzita $I_s(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.3(11)) Fresnelových difrakčních jevů na štěrbinách různých šířek v nepropustném stínítku. Nuly s indexy $\frac{\Delta v}{2}$ (u levého okraje) značí polohy nulové intenzity příslušné křivky. Plné kroužky na křivkách označují relativní intenzitu v geometrickém stínu okrajů štěrbin.



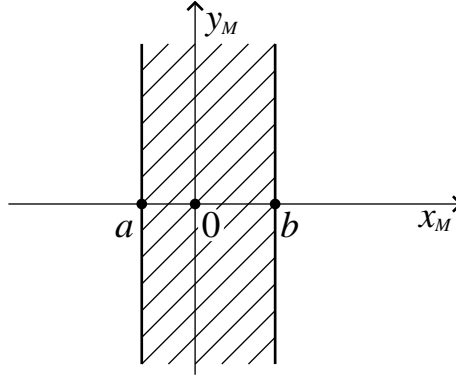
Obrázek 10: Graf funkce $I_s(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.3(11)) udávající relativní intenzitu ve Fresnelově ohybovém jevu na štěrbině v nepropustném stínítku. Křivky v předcházejícím obr. 9 představují řezy plochou $I_s(v, \frac{\Delta v}{2})$ rovinami $\frac{\Delta v}{2} = \text{konst.}$. Geometrický stín okraje štěrbině je určen podmínkou $v = \frac{\Delta v}{2}$.



Obrázek 11: Graf funkce $\frac{1}{2\pi} \phi_s(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.3(12)) charakterizující fázi ve Fresnelově ohybovém jevu na štěrbině v nepropustném stínítku. Geometrický stín okraje štěrbině je určen podmínkou $v = \frac{\Delta v}{2}$.

5.4 Fresnelova difrakce na nepropustném vlákně

Vlnovou funkci $\psi_f(x, y, z)$ charakterizující Fresnelovou difrakci na nepropustném vlákně lze získat několika způsoby. Z cvičných důvodů uvedeme dva z nich.



Obrázek 12: Nepropustné vlákno.

(i) Vlákno na obr. 12 je komplementárním stínítkem ke štěrbině na obr. 7. Musí tedy platit

$$\frac{\psi_f}{\psi_r} + \frac{\psi_s}{\psi_r} = 1. \quad (1)$$

Dosadíme-li do (1) za ψ_s/ψ_r výraz 5.3(3), vypočteme

$$\begin{aligned} \frac{\psi_f}{\psi_r} &= 1 - \frac{-1+i}{2} [C(v_b) + iS(v_b) - C(v_a) - iS(v_a)] = \\ &= \frac{1-i}{2} \{1 + i + C(v_b) - C(v_a) + i[S(v_b) - S(v_a)]\} = \\ &= \frac{\exp(-i\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} \{1 + C(v_b) - C(v_a) + i[1 + S(v_b) - S(v_a)]\} = \\ &= \sqrt{I_f(v_a, v_b)} \exp(i\phi_f(v_a, v_b)), \end{aligned} \quad (2)$$

kde

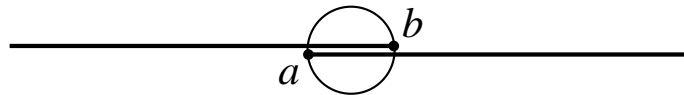
$$I_f(v_a, v_b) = \frac{1}{2} \left\{ [1 + C(v_b) - C(v_a)]^2 + [1 + S(v_b) - S(v_a)]^2 \right\} \quad (3)$$

a

$$\phi_f(v_a, v_b) = \text{Arctg} \frac{1 + S(v_b) - S(v_a)}{1 + C(v_b) - C(v_a)} - \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

představují rozložení relativní intenzity I_f a fáze ϕ_f ve Fresnelově ohybovém jevu na nepropustném vlákně.

(ii) Poněkud jiným způsobem lze získat vztahy (2) až (4), představíme-li si difrakci na vlákně jako superpozici dvou difrakčních jevů na opačně orientovaných polorovinách překrývajících se o šířku vlákna (viz obr. 13). Difrakci na polorovině zastiňující oblast $-\infty < x_M \leq b$ charakterizuje funkce 5.2(4), v níž je ovšem třeba nahradit proměnnou v_a proměnnou v_b , difrakci na polorovině zastiňující oblast $a \leq x_M < \infty$ charakterizuje funkce 5.2(11). Jejich součtem dostáváme



Obrázek 13: K difrakci na vlákně pojaté jako superpozice dvou difrakčních jevů na polorovinách překrývajících se o šířku vlákna.

$$\begin{aligned} \frac{\psi_f}{\psi_r} &= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} + C(v_b) + i \left[\frac{1}{2} + S(v_b) \right] + \frac{1}{2} - C(v_a) - i \left[\frac{1}{2} - S(v_a) \right] \right\} = \\ &= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + C(v_b) - C(v_a) + i [1 + S(v_b) - S(v_a)] \right\}, \end{aligned}$$

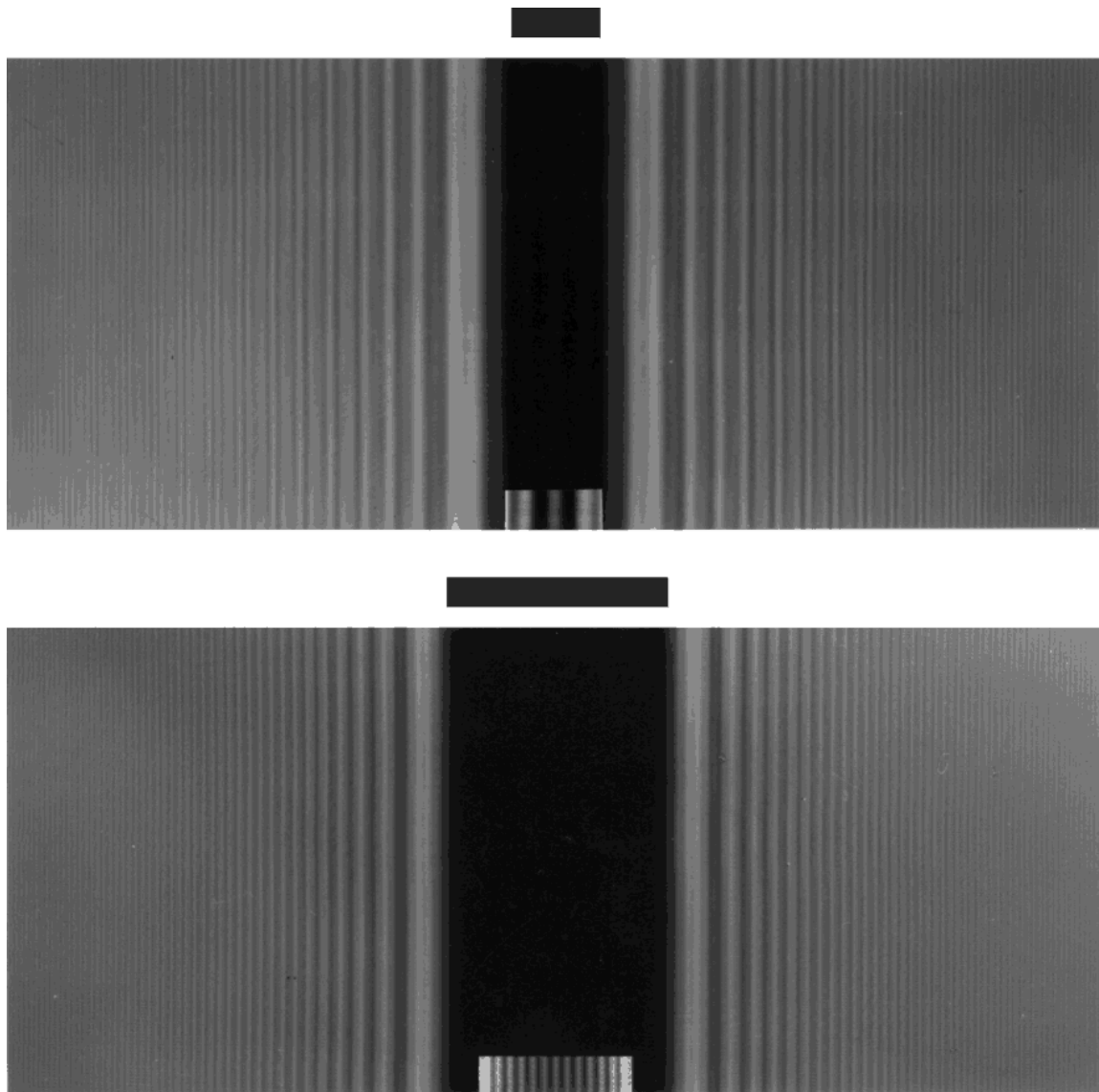
což je vlnová funkce ve tvaru (2).

Vlnová funkce ψ_f a tedy i rozložení intenzity I_f a fáze ψ_f při difrakci na vlákně závisí na dvou parametrech v_a, v_b . Podobně jako v případě štěrbiny bývá účelné vyjádřit intenzitu i fázi prostřednictvím proměnné v ve tvaru 5.3(9), jež nabývá nulové hodnoty ve středu difrakčního obrazce a parametru $\frac{\Delta v}{2}$ ve tvaru 5.3(10), jež nezávisí na souřadnici x v rovině pozorování. Rozložení intenzity (3) a fáze (4) ve Fresnelově difrakčním jevu na nepropustném vlákně tak získá tvar

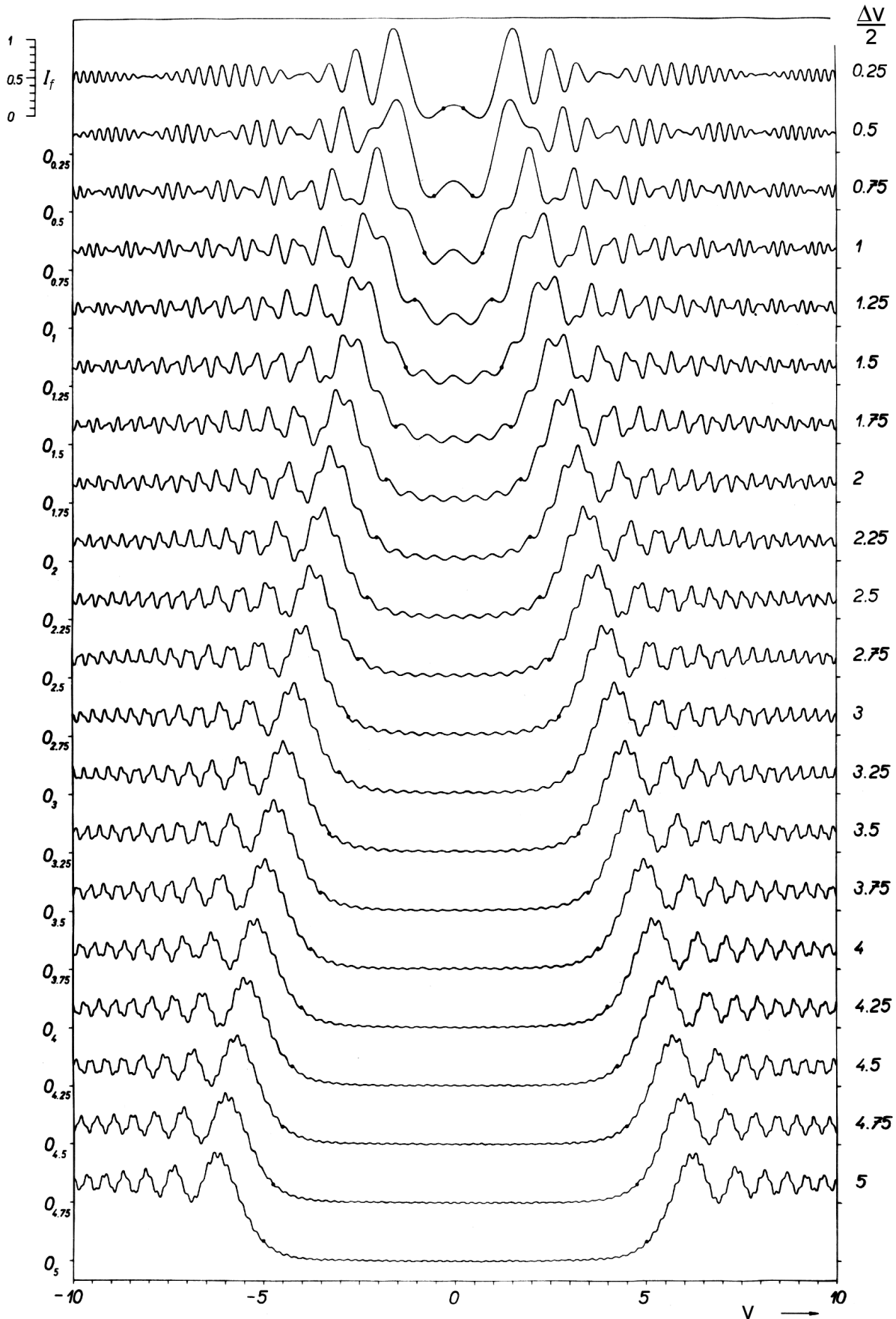
$$I_f\left(v, \frac{\Delta v}{2}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + C\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) - C\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \right]^2 + \left[1 + S\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) - S\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \right]^2 \right\}, \quad (5)$$

$$\phi_f\left(v, \frac{\Delta v}{2}\right) = \text{Arctg} \frac{1 + S\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) - S\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)}{1 + C\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right) - C\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)} - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

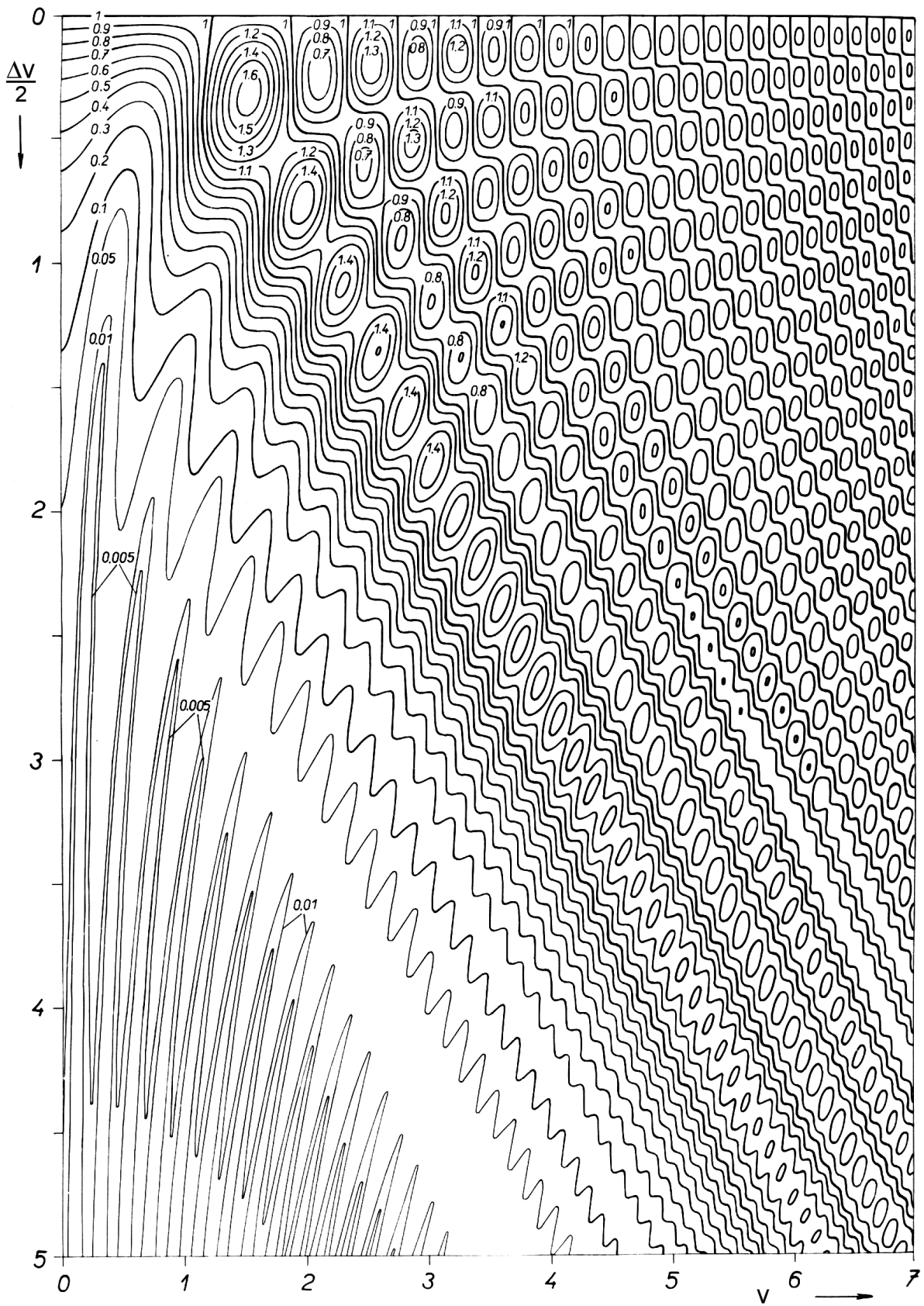
Fotografie dvou Fresnelových difrakčních jevů na nepropustném vlákně jsou na obr. 14. Grafy funkcí (5) a (6) jsou na obrázcích 15, 16 a 17. Připomínáme také obrázek 2.2(c), jež ukazuje Fresnelův ohybový jev získaný elektrony o vlnové délce $\lambda = 4,33 \cdot 10^{-12}$ m na vlákně o průměru $4,15 \cdot 10^{-7}$ m při vzdálenostech $z_1 = 0,1432$ m a $z = 3,38 \cdot 10^{-2}$ m.



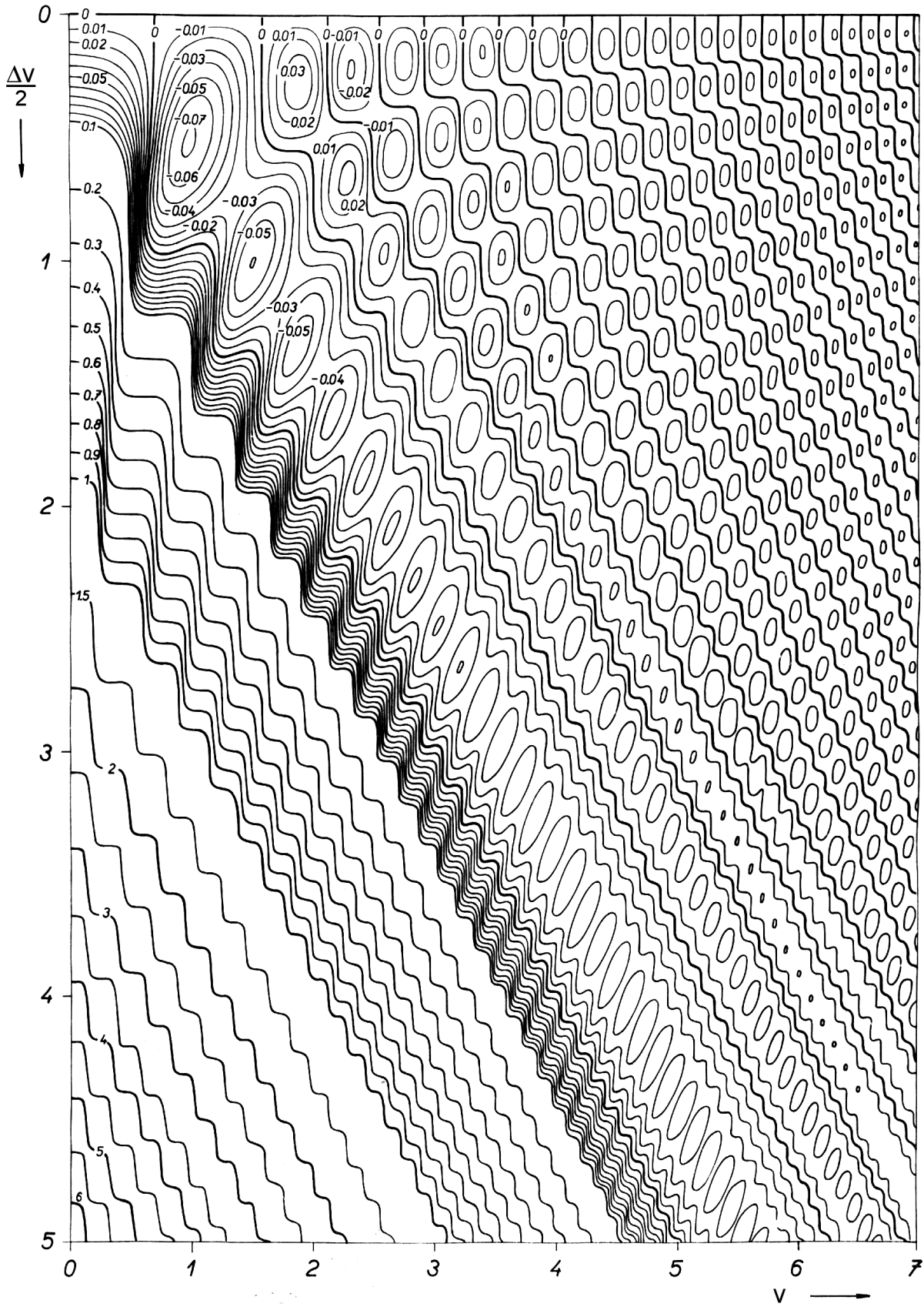
Obrázek 14: Fotografie Fresnelovy difrakce na nepropustném vlákně.



Obrázek 15: Relativní intenzita $I_f(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.4(5)) ve Fresnelových difrakčních jevech na nepropustných vláknech různých šířek. Nuly s indexy $\frac{\Delta v}{2}$ (u levého okraje) značí polohy nulové intenzity příslušné křivky. Plné kroužky na křivkách označují relativní intenzitu v geometrickém stínu okrajů vlákna.



Obrázek 16: Graf funkce $I_f(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.4(5)) udávající relativní intenzitu ve Fresnelově ohybovém jevu na nepropustném vlákně. Křivky v předcházejícím obr. 15 představují řezy plochou $I_f(v, \frac{\Delta v}{2})$ rovinami $\frac{\Delta v}{2} = \text{konst.}$. Geometrický stín okraje vlákna je určen podmínkou $v = \frac{\Delta v}{2}$.



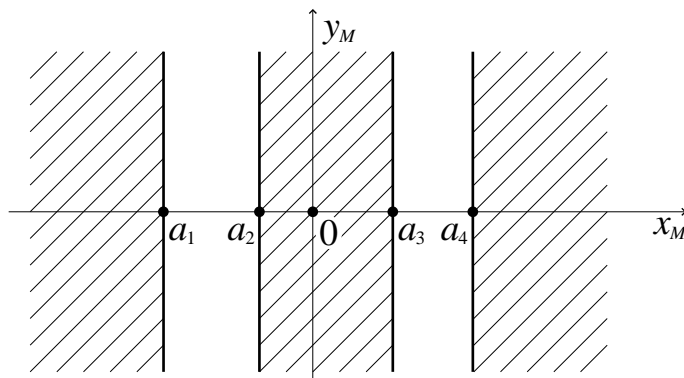
Obrázek 17: Graf funkce $\frac{1}{2\pi} \phi_f(v, \frac{\Delta v}{2})$ (viz 5.4(6)) charakterizující fázi ve Fresnelově ohybovém jevu na nepropustném vlákně. Geometrický stín okraje vlákna je určen podmínkou $v = \frac{\Delta v}{2}$.

5.5 Fresnelova difrakce na dvojštěrbině v nepropustném stínítku

Fresnelova difrakce na dvojštěrbině patří k základním pokusům fyziky. T. Young demonstroval v prvních letech 19. století tímto experimentem [2] interferenci světla, a tím ve fyzikálních teoriích zdomácněl pojem interference vlnění. „Představa interference . . . patří od té doby k nejcenějším statkům fyziky. Kdykoli jsou pochyby o nějakém druhu záření, hledíme vyvolat interferenci; podaří-li se to, je tím dokázána vlnová povaha záření“ [4].

Pro kvantovou mechaniku a její výuku je Fresnelova difrakce na dvojštěrbině významná tím, že jde o „jev, který naprosto nelze vysvětlit žádným klasickým způsobem a který v sobě obsahuje podstatu kvantové mechaniky“ [3]. Není tedy divu, že tento experiment — provedený jednotlivými po sobě jdoucími elektrony — vybrali v roce 2002 čtenáři časopisu *Physics World* za „nejkrásnější experiment“ [5].

Předpokládejme, že obě štěrbiny jsou rovnoběžné s osou y_M a že souřadnice x_M okrajů štěrbin jsou a_1 , a_2 , a_3 , a_4 (viz obr. 18).



Obrázek 18: Dvojštěrbiná v nepropustném stínítku.

Difrakci na dvojštěrbině lze považovat za superpozici dvou difrakčních jevů na jedné štěrbině. Vlnovou funkci tedy získáme součtem dvou vlnových funkcí typu 5.3(3), tj.

$$\frac{\psi}{\psi_r} = \frac{\exp\left(i\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}} \left\{ C(v_{a_2}) - C(v_{a_1}) + C(v_{a_4}) - C(v_{a_3}) + i \left[S(v_{a_2}) - S(v_{a_1}) + S(v_{a_4}) - S(v_{a_3}) \right] \right\}, \quad (1)$$

kde proměnné v_{a_i} souvisejí se souřadnicí x v rovině pozorování lineárními funkcemi typu 5.1(10). Rozložení intenzity a fáze charakterizují funkce

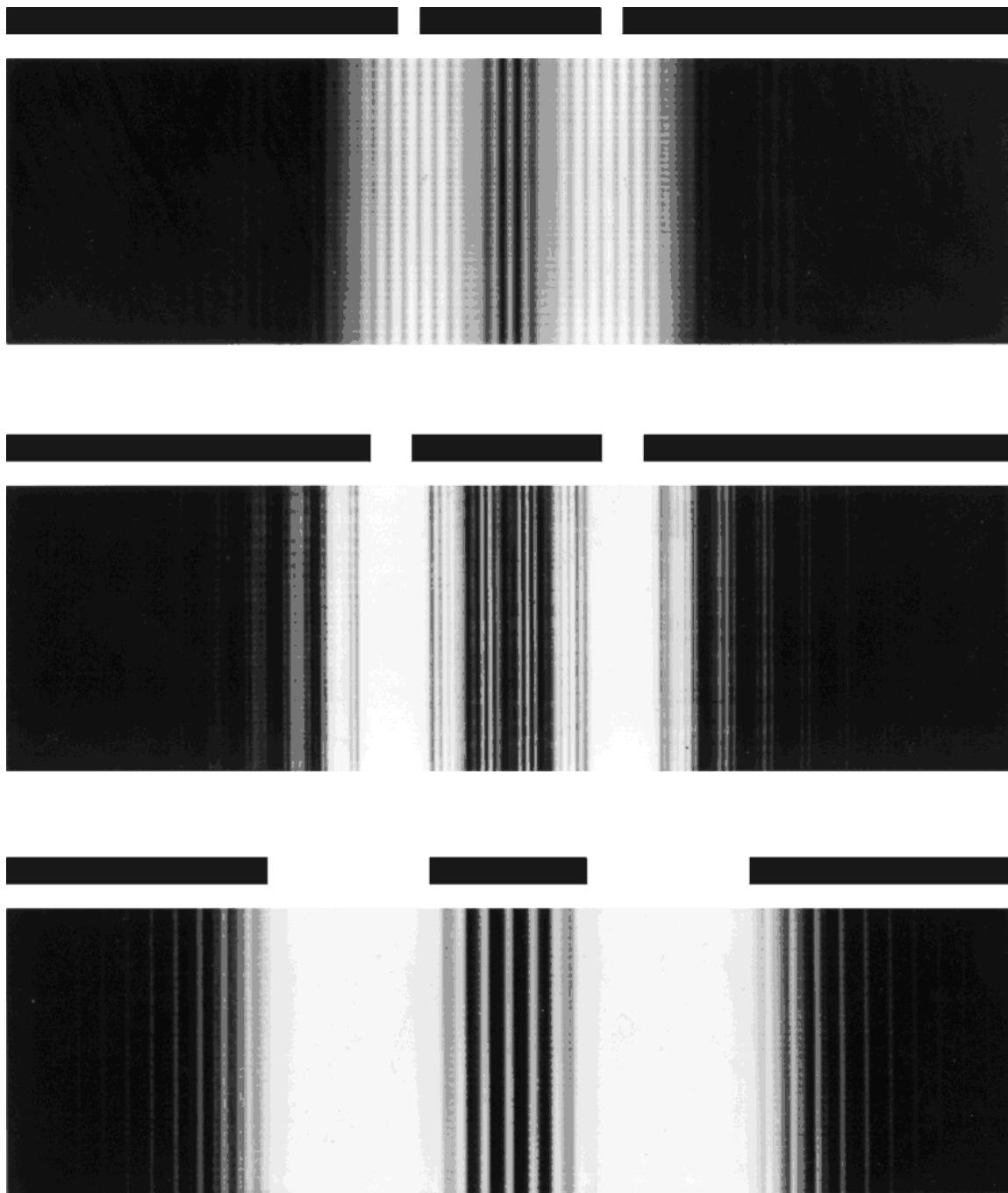
$$I(v_{a_i}) = \frac{1}{2} \left\{ \left[C(v_{a_2}) - C(v_{a_1}) + C(v_{a_4}) - C(v_{a_3}) \right]^2 + \left[S(v_{a_2}) - S(v_{a_1}) + S(v_{a_4}) - S(v_{a_3}) \right]^2 \right\}, \quad (2)$$

$$\phi(v_{a_i}) = \text{Arctg} \frac{S(v_{a_2}) - S(v_{a_1}) + S(v_{a_4}) - S(v_{a_3})}{C(v_{a_2}) - C(v_{a_1}) + C(v_{a_4}) - C(v_{a_3})} - \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

Fotografie Fresnelových difrakčních jevů na dvojštěrbinách jsou na obr. 19.

Vlnovou funkci (1) — a ovšem i intenzitu (2) a fázi (3) — bychom mohli vyjádřit prostřednictvím jediného parametru v závislého na souřadnici x v rovině pozorování a tří parametrů Δv_i na souřadnici x nezávislých, podobně jako v případě štěrbin (srov. 5.3(11) a (12)) nebo vlákn (srov. 5.4(5) a (6)). Počet parametrů Δv_i se dokonce zredukuje na dva v případě, kdy se podaří vyrobit tak, že štěrbiny mají stejnou šířku. To se však nemusí vždy podařit, a proto nebudeme výrazy (1) až (3) dále upravovat.

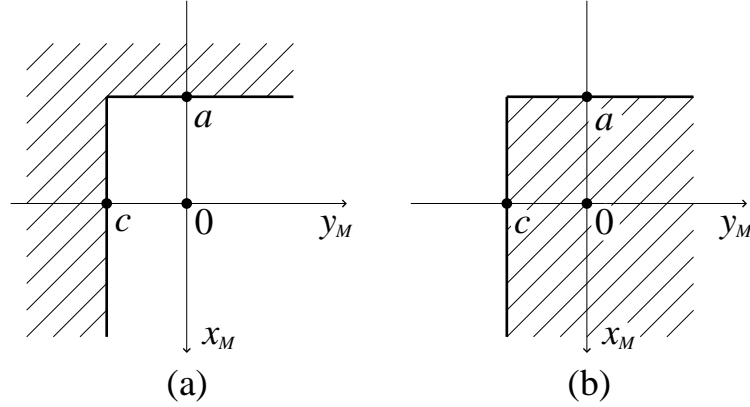
T. Young ve svém původním experimentu [2] vyrobil dvojštěrbinu tak, že do štěrbin vložil užší vlákno. O více než 180 let později A. Zeilinger se spolupracovníky [6] studovali difrakci neutronů ($\lambda = 1,845$ nm) na dvojštěrbině a vyrobili dvojštěrbinu obdobným způsobem: Do mezery mezi dvěma rovnoběžnými skleněnými stěnami vzdálenými od sebe $147,9 \mu\text{m}$ vložili drát z bóru o průměru $104,1 \mu\text{m}$ a vytvořili dvě štěrbin o nestejných šířkách $21,5 \mu\text{m}$ a $22,3 \mu\text{m}$. Také rozložení intenzity, které pozorovali, má mírně narušenou zrcadlovou symetrii, interferenční proužky jsou však kontrastní a jasně demonstrují interferenci neutronů.



Obrázek 19: Fotografie Fresnelovy difrakce na dvojštěrbíně v nepropustném stínítku.

5.6 Fresnelova difrakce na pravém úhlu z nepropustného stínítka

Vyšetříme Fresnelovu difrakci na dvou komplementárních stínítkách s pravoúhlým okrajem (viz obr. 20(a) a (b)).



Obrázek 20: Pravoúhlé okraje nepropustného stínítka.

Pravoúhlý otvor na obr. 20(a) považujeme za rozšíření obdélníka a podle 5.1(1) klademe

$$a = a, \quad b = \infty, \quad c = c, \quad d = \infty.$$

Podle 5.1(10) až 5.1(14) tomu odpovídají proměnné Fresnelových integrálů

$$v_a = v_a, \quad v_b = -\infty, \quad u_c = u_c, \quad u_d = -\infty,$$

takže

$$C(v_b) = S(v_b) = C(u_d) = S(u_d) = -\frac{1}{2}.$$

Podle 5.1(20) charakterizuje Fresnelovu difrakci na stínítku s pravým úhlem podle obr. 20(a) vlnová funkce $\psi_{(a)}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{(a)}}{\psi_r} = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] + \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] \right\} + \\ & + \frac{i}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Tuto funkci lze přepsat do faktorizovaného tvaru (z faktorizovaného tvaru ostatně pochází – srov. 5.1(17))

$$\frac{\psi_{(a)}}{\psi_r} = -\frac{i}{2} \left\{ \frac{1}{2} + C(v_a) + i \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \right\} \left\{ \frac{1}{2} + C(u_c) + i \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] \right\}. \quad (2)$$

Výraz (2) představuje součin dvou vlnových funkcí charakterizujících Fresnelovu difrakci na polorovinách (srov. 5.2(4)). To je samozřejmé, neboť také funkce propustnosti pravoúhlého otvoru na obr. 20(a) je součinem dvou funkcí propustnosti nepropustných polorovin:

$$t(x_M, y_M) = \text{step}(x_M - a) \text{step}(y_M - c),$$

kde

$$\text{step } \xi = \begin{cases} 1, & \text{když } \xi > 0, \\ 0, & \text{když } \xi < 0. \end{cases}$$

Z vlnové funkce (2) získáme vhodné výrazy pro relativní intenzitu $I_{(a)}$ a fázi $\phi_{(a)}$:

$$I_{(a)}(v_a, u_c) = \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right]^2 \right\} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right]^2 \right\}, \quad (3)$$

$$\phi_{(a)}(v_a, u_c) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{2} + S(v_a)}{\frac{1}{2} + C(v_a)} + \operatorname{Arctg} \frac{\frac{1}{2} + S(u_c)}{\frac{1}{2} + C(u_c)}. \quad (4)$$

Z (1) můžeme vyjádřit fázi také ve formálně jiném tvaru:

$$\phi_{(a)}(v_a, u_c) = \operatorname{Arctg} \frac{\left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right]}{\left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] + \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right]}. \quad (5)$$

(O ekvivalenci výrazů (4) a (5) se lze přesvědčit manipulací s funkcí arkustangens.) Grafy funkcí (3) a (4), resp. (5) jsou na obr. 21 a 22.

Difrakční stínítka na obr. 20 jsou komplementární. Fresnelovu difrakci na nepropustném stínítku ve tvaru podle obr. 20(b) tedy charakterizuje vlnová funkce

$$\frac{\psi_{(b)}}{\psi_r} = 1 - \frac{\psi_{(a)}}{\psi_r}. \quad (6)$$

Dosadíme-li (1) do (6) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{(b)}}{\psi_r} &= \frac{1}{2} \left\{ 2 - \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] \right\} + \\ &+ \frac{i}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Relativní intenzitu $I_{(b)}$ a fázi $\phi_{(b)}$ lze počítat podle vztahů

$$\begin{aligned} I_{(b)}(v_a, u_c) &= \frac{1}{4} \left(\left\{ 2 - \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] \right\}^2 + \right. \\ &\left. + \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] \right\}^2 \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi_{(b)}(v_a, u_c) = \operatorname{Arctg} \frac{\left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right]}{2 - \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + S(u_c) \right] - \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] \left[\frac{1}{2} + C(u_c) \right]}. \quad (9)$$

Grafy funkcí $I_{(b)}(v_a, u_c)$ a $\phi_{(b)}(v_a, u_c)$ jsou na obr. 23 a 24.

5.7 Fresnelova difrakce na dokonale transparentní polorovině posouvající fázi

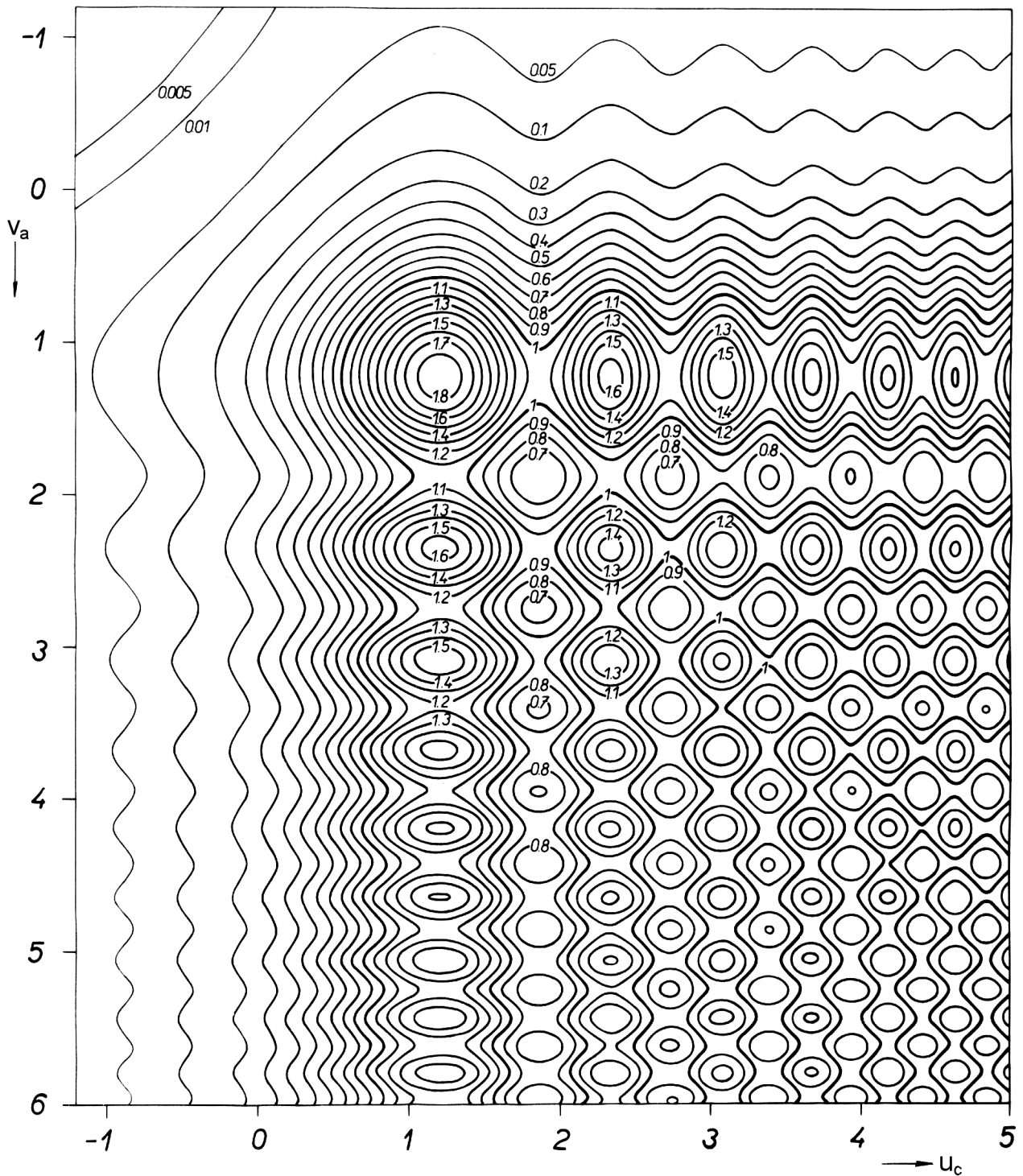
o π

Zajímavým difrakčním jevem je Fresnelova difrakce na dokonale transparentní polorovině posouvající fázi procházející vlny o π . Je-li okraj takové poloroviny rovnoběžný s osou y_M a zaujímá-li polorovina oblast $x_M < a$, má funkce propustnosti tvar

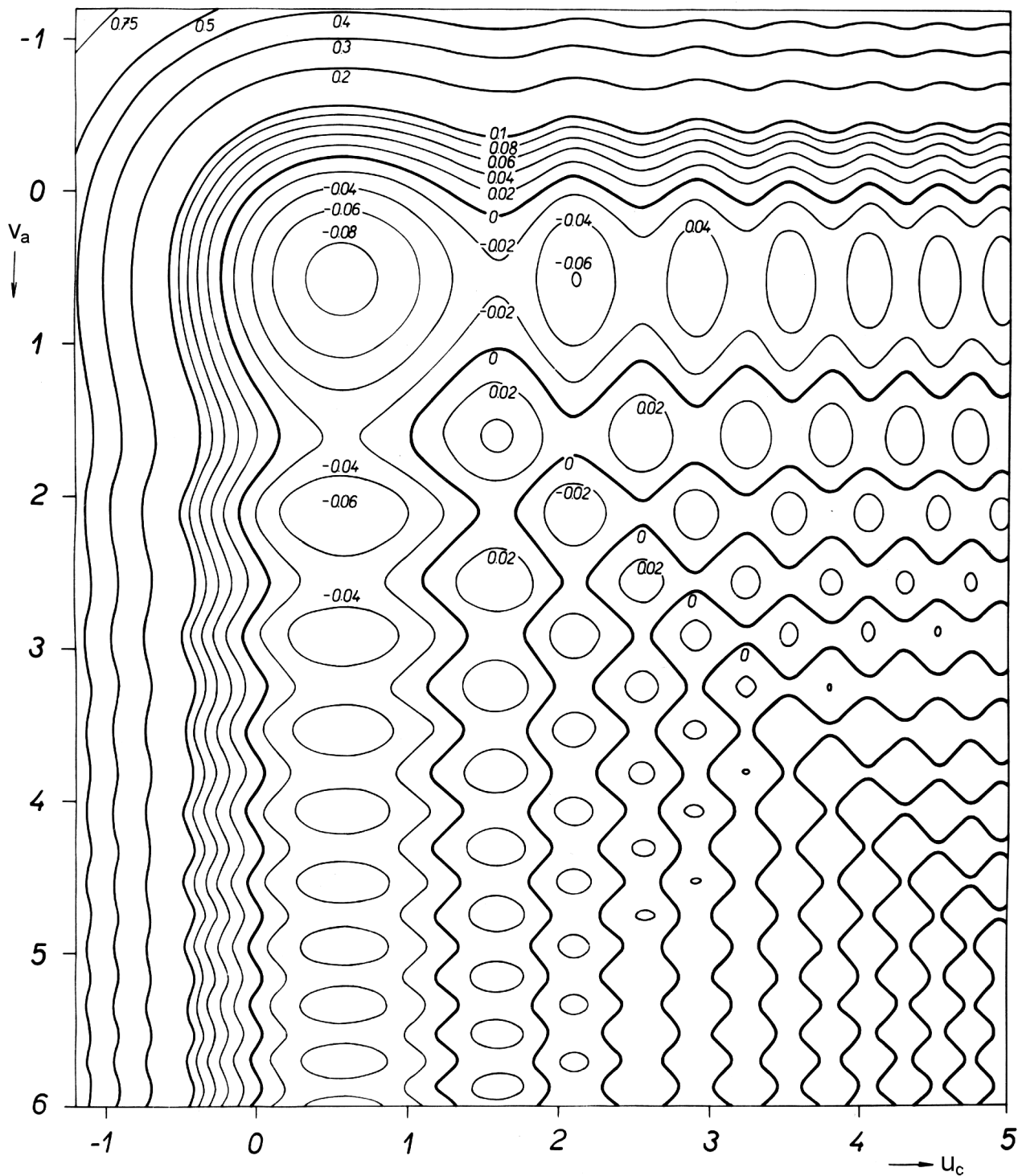
$$t(x_M, y_M) = \begin{cases} 1, & \text{když } x_M > a, \\ -1, & \text{když } x_M < a. \end{cases} \quad (1)$$

Vlnová funkce charakterizující Fresnelovu difrakci je v tomto případě součtem

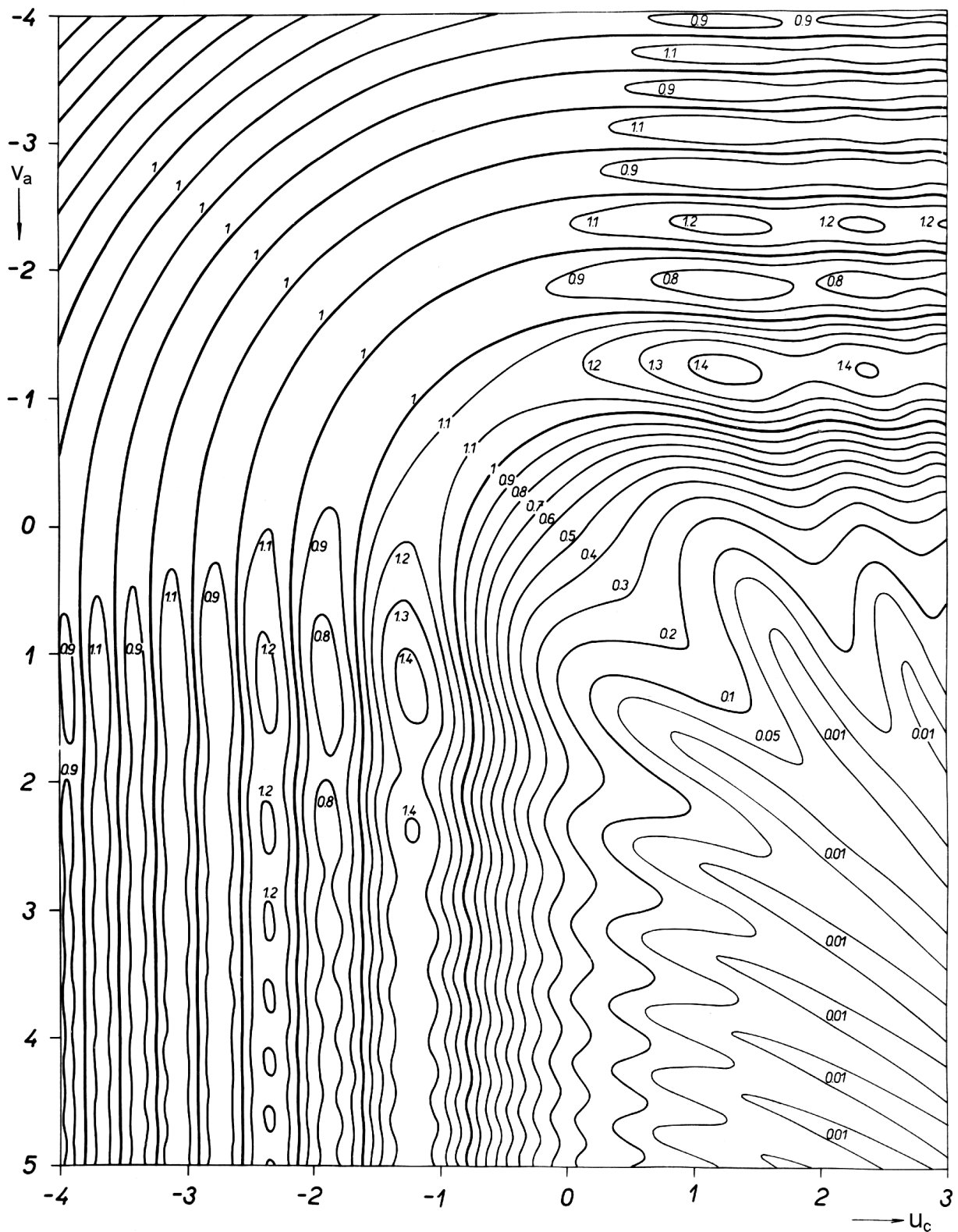
(i) vlnové funkce 5.2(4), charakterizující Fresnelovu difrakci na nepropustné polorovině na obr. 3, a



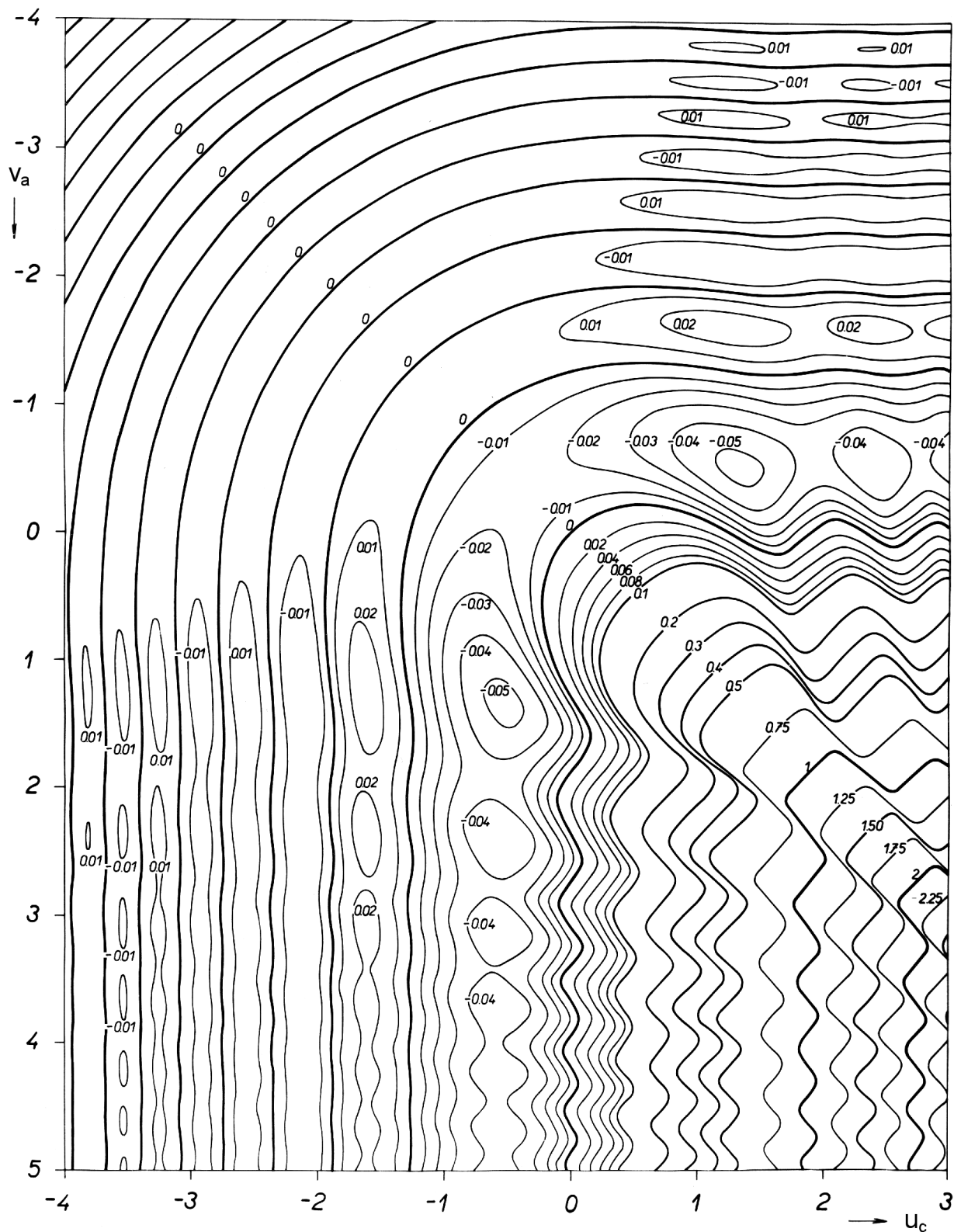
Obrázek 21: Rozložení relativní intenzity $I_{(a)}(v_a, u_c)$ (viz 5.6(3)) ve Fresnelově difrakčním obrazci na pravoúhlovém otvoru na obr. 20(a). Oblast $v_a > 0, u_c > 0$ odpovídá osvětlené oblasti roviny pozorování.



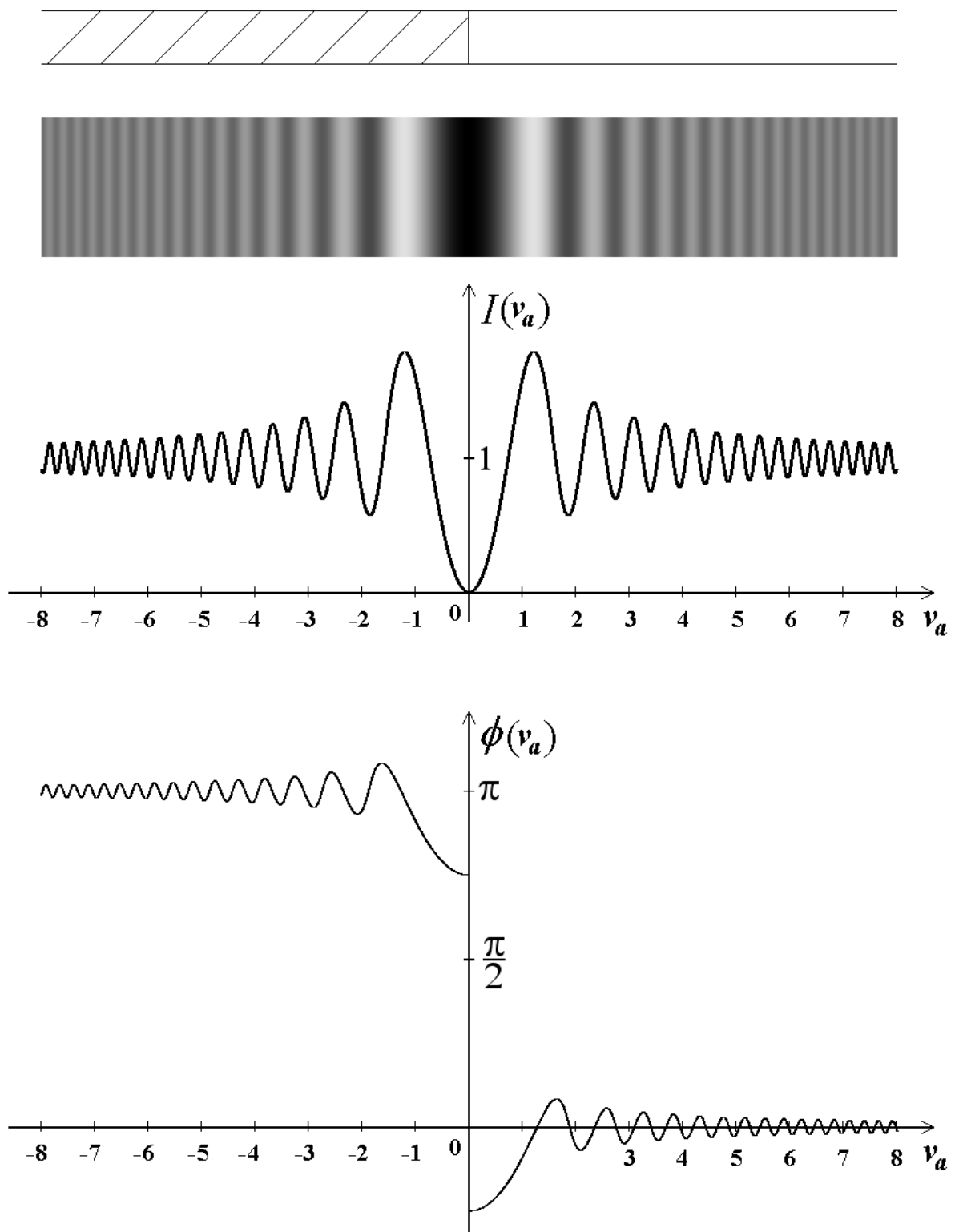
Obrázek 22: Graf funkce $\frac{1}{2\pi} \phi_{(a)}(v_a, u_c)$ dané vztahem 5.6(4) resp. 5.6(5) a představující rozložení fáze ve Fresnelově difrakčním obrazení na pravoúhlovém otovru na obr. 20(a). Oblast $v_a > 0$, $u_c > 0$ odpovídá osvětlené oblasti roviny pozorování.



Obrázek 23: Rozložení relativní intenzity $I_{(b)}(v_a, u_c)$ (viz 5.6(8)) ve Fresnelově difrakčním obrazci od pravoúhlové překážky na obr. 20(b). Oblast $v_a > 0, u_c > 0$ odpovídá oblasti geometrického stínu.



Obrázek 24: Graf funkce $\frac{1}{2\pi}\phi_{(b)}(v_a, u_c)$ dané vztahem 5.6(9) a představující rozložení fáze ve Fresnelově difrakčním obrazci na pravouhlové překážce na obr. 20(b). Oblast $v_a > 0, u_c > 0$ odpovídá oblasti geometrického stínu.



Obrázek 25: Rozložení relativní intenzity $I(v_a)$ (viz 5.7(3)) a fáze $\phi(v_a)$ (viz 5.7(4)) ve Fresnelově difrakčním jevu na dokonale transparentní polorovině posouvající fázi o π .

- (ii) vlnové funkce 5.2(11), charakterizující Fresnelovu difrakci na polorovině na obr. 6, násobené ovšem faktorem (-1) :

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{\psi_r} &= \frac{\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(v_a) \right] + i \left[\frac{1}{2} + S(v_a) \right] - \left[\frac{1}{2} - C(v_a) \right] - i \left[\frac{1}{2} - S(v_a) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) [C(v_a) + iS(v_a)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Rozložení relativní intenzity $I(v_a)$ v rovině pozorování udává funkce

$$I(v_a) = 2 [C^2(v_a) + S^2(v_a)]. \quad (3)$$

Rozložení fáze $\phi(v_a)$ charakterizuje funkce

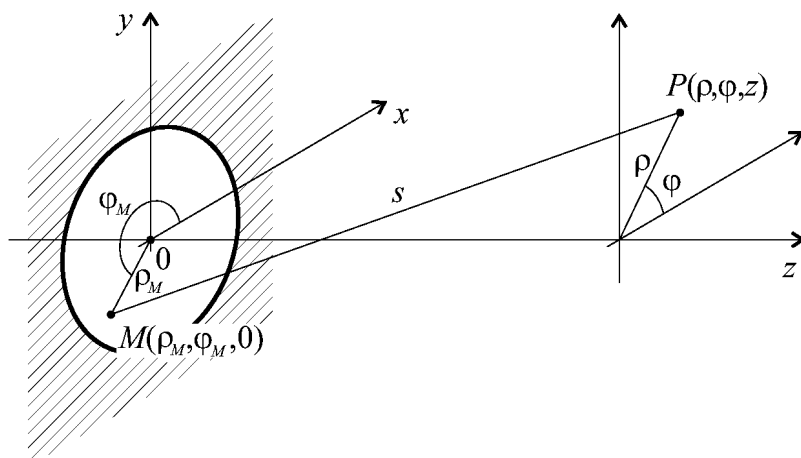
$$\phi(v_a) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{S(v_a)}{C(v_a)}, & \text{když } v_a > 0, \\ \frac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{S(v_a)}{C(v_a)}, & \text{když } v_a < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Grafy těchto funkcí $I(v_a)$ a $\phi(v_a)$ jsou na obr. 25. Intenzita je v tomto difrakčním jevu nulová ve všech bodech přímky $v_a = 0$, je podle této přímky zrcadlově symetrická, a to v každé vzdálenosti z od poloroviny. Znamená to, že intenzita (a také ovšem vlnová funkce) je nulová ve všech bodech poloroviny $x = (a-x_1) \frac{z}{z_1} + a$, $z > 0$.

Nulová intenzita ve všech bodech nějaké čáry, nebo dokonce plochy je u Fresnelovy difrakce výjimečným jevem. Setkáváme se s ním však vždy, když vlnová funkce v rovině $z = 0$ difrakčního stínítka má pro všechny body M vlastnost

$$\psi_0(M) = -\psi_0(M'),$$

kde M' je zrcadlově symetrický bod k bodu M podle nějaké přímky zrcadlení. Má-li stínítko dvě na sebe kolmé takové přímky „antizrcadlení“, má Fresnelův difrakční obrazec ve všech vzdálenostech $z > 0$ od difrakčního stínítka nulovou intenzitu podél rovin určených těmito přímkami a směrem šíření světla. Fresnelovy difrakční obrazce mají tmavý kříž, který může být v centrální oblasti velmi jemný. Toho lze v praxi využít k vytyčování přímk [7, 8].



Obrázek 26: K vyjádření difrakčního integrálu ve válcových souřadnicích.

5.8 Fresnelova difrakce na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku

Vyjádříme difrakční integrál 5(1) ve válcových souřadnicích (srov. obr. 26)

$$\begin{aligned}x_M &= \rho_M \cos \varphi_M, & x &= \rho \cos \varphi, \\y_M &= \rho_M \sin \varphi_M, & y &= \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

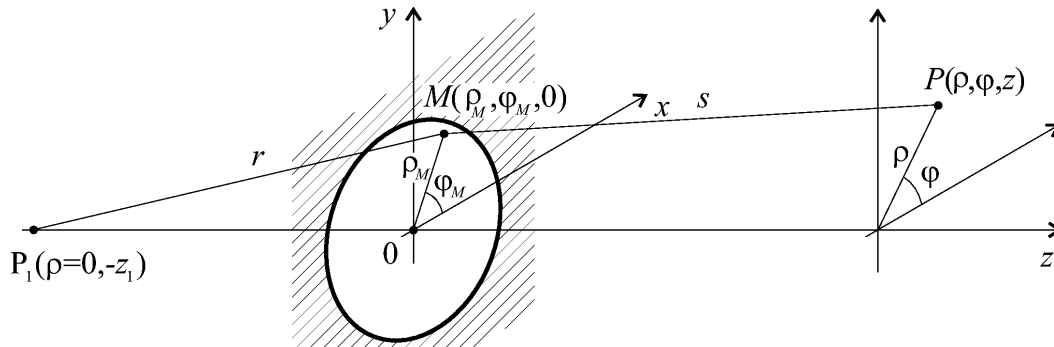
Za tím účelem vypočteme

$$\begin{aligned}(x_M - x)^2 &= (\rho_M \cos \varphi_M - \rho \cos \varphi)^2 = \rho_M^2 \cos^2 \varphi_M + \rho^2 \cos^2 \varphi - 2\rho_M \rho \cos \varphi_M \cos \varphi, \\(y_M - y)^2 &= (\rho_M \sin \varphi_M - \rho \sin \varphi)^2 = \rho_M^2 \sin^2 \varphi_M + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2\rho_M \rho \sin \varphi_M \sin \varphi, \\(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2 &= \rho_M^2 + \rho^2 - 2\rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi), \\ \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2] \right\} &= \exp \frac{ik\rho^2}{2z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [\rho_M^2 - 2\rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi)] \right\}.\end{aligned}$$

Ve válcových souřadnicích má tedy difrakční integrál 5(1) tvar

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \varphi, z) &= -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right]}{z} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi_0(\rho_M, \varphi_M) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [\rho_M^2 - 2\rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi)] \right\} \rho_M d\rho_M d\varphi_M.\end{aligned}\quad (1)$$

Předpokládejme, že primární vlna má rotační symetrii. Konkrétně budeme předpokládat, že kruhový otvor v nepropustném stínítku je osvětlen divergentní kulovou vlnou se zdrojem na ose otvoru a ve vzdálenosti z_1 od stínítka (viz obr. 27), tj.



Obrázek 27: Geometrické uspořádání při rotačně symetrické Fresnelově difrakci na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku.

$$\psi_0(\rho_M, \varphi_M) = \frac{\exp \left(ik \sqrt{z_1^2 + \rho_M^2} \right)}{\sqrt{z_1^2 + \rho_M^2}} \text{circ} \left(\frac{\rho_M}{a} \right), \quad (2)$$

kde a je poloměr otvoru. Ve Fresnelově aproximaci má tato primární vlna tvar

$$\psi_0(\rho_M, \varphi_M) = \frac{\exp(ikz_1)}{z_1} \exp \left(\frac{ik\rho_M^2}{2z_1} \right) \text{circ} \left(\frac{\rho_M}{a} \right). \quad (3)$$

Dosadíme-li výraz (3) do difrakčního integrálu (1), dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \varphi, z) &= -\frac{ik}{2\pi} \frac{\exp \left[ik \left(z_1 + z + \frac{\rho^2}{2z} \right) \right]}{z_1 z} \times \\ &\times \int_0^a \exp \left[\frac{i}{2} k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \rho_M^2 \right] \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{-ik}{z} \rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi) \right] d\varphi_M \rho_M d\rho_M.\end{aligned}\quad (4)$$

Vlnovou funkci (4) charakterizující difrakční jev, budeme opět vztahovat k vlnové funkci $\psi_r(\rho, \varphi, z)$, jež by byla v témž bodě $P(\rho, \varphi, z)$, kdyby žádného difrakčního stínítka nebylo. Tato „referenční“ vlna má tvar

$$\psi_r(\rho, \varphi, z) = \frac{\exp \left[ik\sqrt{(z_1 + z)^2 + \rho^2} \right]}{\sqrt{(z_1 + z)^2 + \rho^2}}, \quad (5)$$

tj. — ve Fresnelově aproximaci —

$$\psi_r(\rho, \varphi, z) = \frac{\exp [ik(z_1 + z)]}{z_1 + z} \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2(z_1 + z)} \right]. \quad (6)$$

Podělením výrazů (4) a (6) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho, \varphi, z)}{\psi_r(\rho, \varphi, z)} &= -\frac{ik}{2\pi} \frac{z_1 + z}{z_1 z} \exp \left[\frac{i}{2} k\rho^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1 + z} \right) \right] \times \\ &\times \int_0^a \exp \left[\frac{i}{2} k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \rho_M^2 \right] \int_0^{2\pi} \exp \left[-i \frac{k}{z} \rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi) \right] d\varphi_M \rho_M d\rho_M. \end{aligned} \quad (7)$$

5.8.1 Bod pozorování na ose rotační symetrie

Vypočteme vlnovou funkci ψ/ψ_r v bodech osy rotace kruhového otvoru. Tím ověříme výsledky, k nimž dospěl Fresnel na základě úvah o Fresnelových zónách (viz odst. 3.4).

Je-li bod pozorování na ose rotační symetrie otvoru, tj. $\rho = 0$, je v (7) integrál podle φ_M roven 2π a difrakční integrál získává tvar

$$\frac{\psi(\rho = 0, z)}{\psi_r(\rho = 0, z)} = -ik \frac{z_1 + z}{z_1 z} \int_0^a \exp \left[\frac{i}{2} k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \rho_M^2 \right] \rho_M d\rho_M. \quad (8)$$

S použitím substituce

$$k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \rho_M^2 = p, \quad \text{a tedy} \quad \rho_M d\rho_M = \frac{z_1 z}{2k(z_1 + z)} dp, \quad (9)$$

a označení

$$u = k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 \quad (10)$$

integrál (8) snadno vypočteme a vlnovou funkci vyjádříme v polárním tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(\rho = 0, z)}{\psi_r(\rho = 0, z)} &= -\frac{i}{2} \int_0^u \exp \left(\frac{i}{2} p \right) dp = \\ &= - \left[\exp \left(\frac{i}{2} u \right) - 1 \right] = \\ &= - \exp \left(\frac{i}{4} u \right) \left[\exp \left(\frac{i}{4} u \right) - \exp \left(-\frac{i}{4} u \right) \right] = \\ &= -2i \exp \left(\frac{i}{4} u \right) \sin \left(\frac{1}{4} u \right) = \\ &= 2 \sin \left(\frac{u}{4} \right) \exp \left[i \left(\frac{u}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= 2 \sin \left[\frac{1}{4} k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 \right] \exp \left[\frac{i}{4} k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 - \frac{i\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Relativní intenzita a fáze v bodech osy rotační symetrie otvoru je

$$I(\rho = 0, z) = 4 \sin^2 \frac{u}{4} = 4 \sin^2 \left[\frac{k}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 \right], \quad \phi(\rho = 0, z) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} u = -\frac{\pi}{2} + \frac{k}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2. \quad (13)$$

Relativní intenzita tedy nabývá v bodech osy rotační symetrie hodnot mezi nulou a čtyřmi. Extrémních hodnot nabývá, když

$$\frac{k}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Je zřejmé, že relativní intenzita je rovna čtyřem, když n je liché číslo a nule, když n je sudé číslo. Z podmínky (14) dostáváme výraz pro poloměry otvorů, kdy relativní intenzita nabývá extrémních hodnot

$$a_n = \sqrt{\frac{n\lambda z_1 z}{z_1 + z}} \quad (15)$$

ve shodě s výrazem 3.4(3) pro poloměry Fresnelových zón. Tím jsme doplnili úvahy o Fresnelových zónách z odst. 3.4 a přijatelným způsobem vypočetli, že uprostřed Fresnelova difrakčního obrazce je při lichém počtu propuštěných zón intenzita čtyřikrát větší, než by byla v témž bodě, kdyby žádného stínítka nebylo a vlnění se šířilo nerušeně. Polohy extrémů relativní intenzity na ose rotační symetrie jsou ve vzdálenostech

$$z_{(n)} = \frac{a^2}{n\lambda - a^2/z_1}, \quad n \geq \frac{a^2}{\lambda z_1}, \quad (16)$$

od difrakčního stínítka.

5.8.2 Bod pozorování není osovým bodem

Integrál podle úhlové proměnné φ_M v difrakčním integrálu (7) je úměrný Besselově funkci J_0 (viz např. [9], vztah B.13(6)):

$$\int_0^{2\pi} \exp \left[-\frac{ik}{z} \rho_M \rho \cos(\varphi_M - \varphi) \right] d\varphi_M = 2\pi J_0 \left(\frac{k\rho\rho_M}{z} \right).$$

Takže

$$\frac{\psi(\rho, \varphi, z)}{\psi_r(\rho, \varphi, z)} = -ik \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \exp \left[\frac{i}{2} k \rho^2 \frac{z_1}{z(z_1 + z)} \right] \int_0^a \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) \rho_M^2 \right] J_0 \left(\frac{k\rho\rho_M}{z} \right) \rho_M d\rho_M. \quad (17)$$

Tento integrál vyjádříme pomocí Lommelových funkcí (viz dodatek C). Za tím účelem zavedeme substituci $\rho_M = at$, jíž dostaneme integrační interval $(0, 1)$:

$$\frac{\psi(\rho, \varphi, z)}{\psi_r(\rho, \varphi, z)} = -ik \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 \exp \left[\frac{i}{2} k \rho^2 \frac{z_1}{z(z_1 + z)} \right] \int_0^1 \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2 t^2 \right] J_0 \left(\frac{k\rho a}{z} t \right) t dt. \quad (18)$$

Označíme-li

$$u = k \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z} \right) a^2, \quad v = \frac{k\rho a}{z} \quad (19)$$

a použijeme-li toho, že

$$\frac{1}{2} k \rho^2 \frac{z_1}{z(z_1 + z)} = \frac{v^2}{2u}, \quad (20)$$

můžeme charakterizovat podíl (18) vlnové funkce a referenční vlny výrazem, jenž závisí na experimentálních parametrech (tj. na k , z_1 , z , a , ρ) pouze prostřednictvím dvou proměnných u a v :

$$\frac{\psi}{\psi_r} = -iu \exp \left(\frac{i}{2} \frac{v^2}{u} \right) \int_0^1 \exp \left(\frac{i}{2} ut^2 \right) J_0(vt) t dt. \quad (21)$$

Integraci per partes a využitím jistého vztahu mezi Besselovými funkcemi lze integrál v (21) vyjádřit Lommelovými funkcemi dvou proměnných $U_1(u, v)$, $U_2(u, v)$ resp. $V_0(u, v)$, $V_1(u, v)$. Je to podrobně provedeno v dodatku C, odst. C.2. Výsledkem je (viz vztah C.2(8))

$$\int_0^1 \exp \left(\frac{i}{2} ut^2 \right) J_0(vt) t dt = \frac{\exp \left(\frac{i}{2} u \right)}{u} \left[U_1(u, v) - iU_2(u, v) \right].$$

Dosazením tohoto výrazu za integrál ve (21) dostáváme

$$\frac{\psi}{\psi_r} = -\exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \left[U_2(u, v) + iU_1(u, v)\right]. \quad (22)$$

Odtud vyplývá, že relativní intenzita je dána výrazem

$$I = U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v) \quad (23)$$

a fáze

$$\phi = \frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right) + \operatorname{Arctg} \frac{U_1(u, v)}{U_2(u, v)}. \quad (24)$$

Vyjádříme ještě relativní intenzitu a fázi prostřednictvím funkcí $V_0(u, v)$ a $V_1(u, v)$. Dosadíme-li do (22) ze vztahu C.1(18), dostaneme (s použitím C.1(5))

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{\psi_r} &= \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \left\{ \exp\left[-\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] - V_0(u, v) + iV_1(u, v) \right\} \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \left\{ -V_0(u, v) + \cos\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] + iV_1(u, v) - i \sin\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Z (25) je zřejmé, že

$$I = 1 + V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v) - 2V_0(u, v) \cos\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] - 2V_1(u, v) \sin\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right], \quad (26)$$

$$\phi = \frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right) - \operatorname{Arctg} \frac{V_1(u, v) - \sin\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right]}{V_0(u, v) - \cos\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right]}. \quad (27)$$

Graf relativní intenzity I ve Fresnelově ohybu na kruhovém otvoru, tj. graf funkce (23), (26), je na obr. 28. Typické difrakční obrazce tohoto typu jsme již uvedli v kap. 3 na obr. 3.4. Graf funkce $\frac{1}{2\pi}\phi(u, v)$ dané vztahem (24), (27), charakterizující fázi difrakčních jevů uvažovaného typu, je na obr. 29.

Chceme-li vypočítat rozložení intenzity $I(\rho)$ v difrakčním obrazci v určité rovině pozorování, vypočteme podle (19) pro dané experimentální hodnoty k, a, z, z_1 jednak parametr u , jenž nezávisí na ρ , jednak koeficient úměrnosti $\alpha = ka/z$ mezi veličinou v a ρ . Pak $I(\rho) = I(u, \alpha\rho)$. (Je hodno pozorovat, že velikost parametru u je rovna 2π násobku počtu propuštěných Fresnelových zón. Bývá tedy u v rozmezí 5 až $5 \cdot 10^2$. Koeficient α mívá při pokusech se světlem hodnoty v rozmezí $1 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$ až $1 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$.)

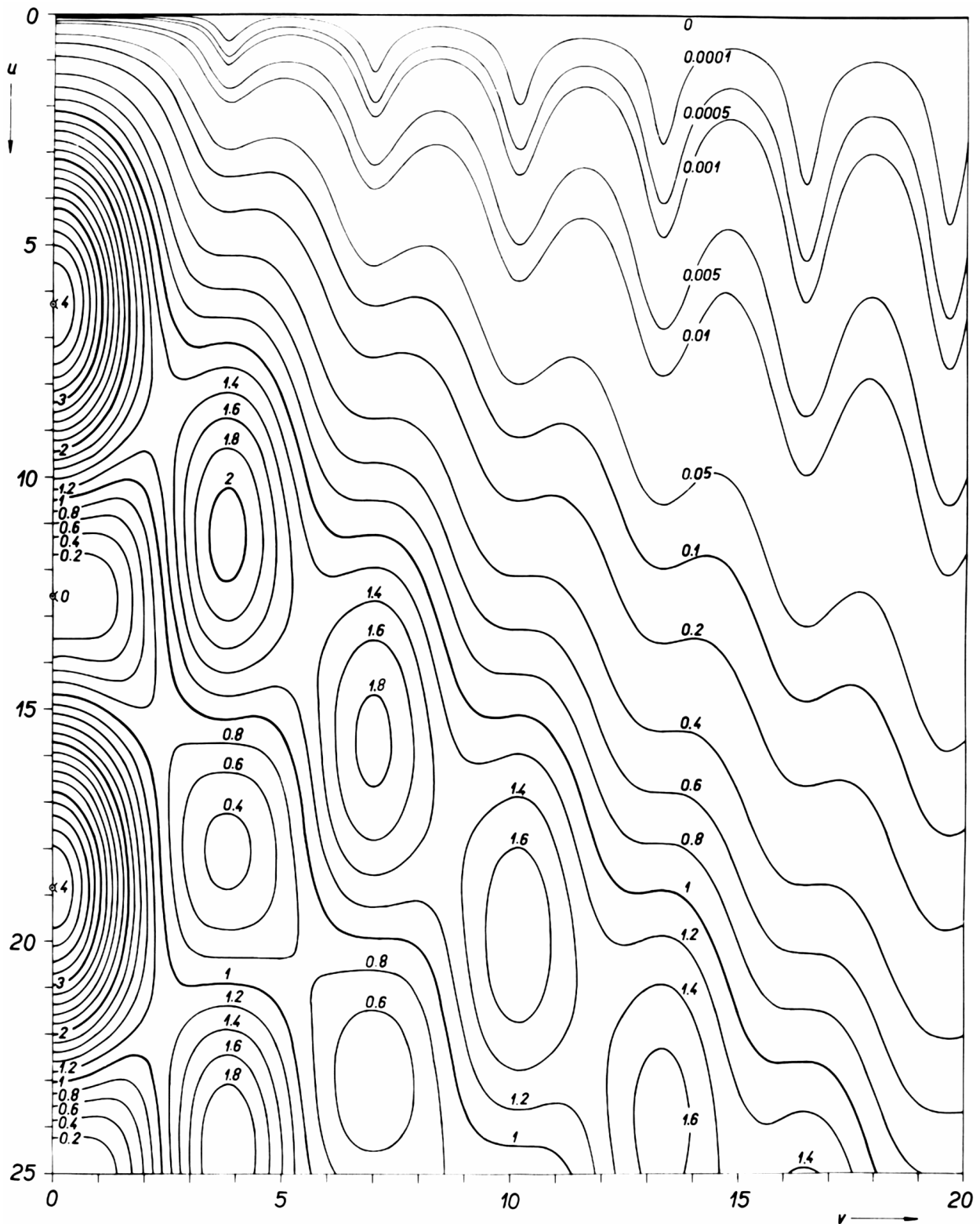
Výpočet vlnové funkce v bodech osy symetrie v odst. 5.8.1 jsme předeslali právě vypočítanému obecnějšímu případu, neboť si nevyžadoval použití speciálních funkcí. Výsledek (12) resp. (13) dostaneme ovšem i jako speciální případ výrazů (22), (25) resp. (23), (24), (26), (27) pro $v = 0$ (viz vztahy C.3(2) a C.3(3)).

Výrazy (22) až (27) se také podstatně zjednoduší v případě $u = v$, tj. v bodech hranice geometrického stínu, kdy $\rho = \frac{z_1+z}{z_1}a$. S použitím vztahů C.3(6) až C.3(8) vypočteme z (22) resp. (25)

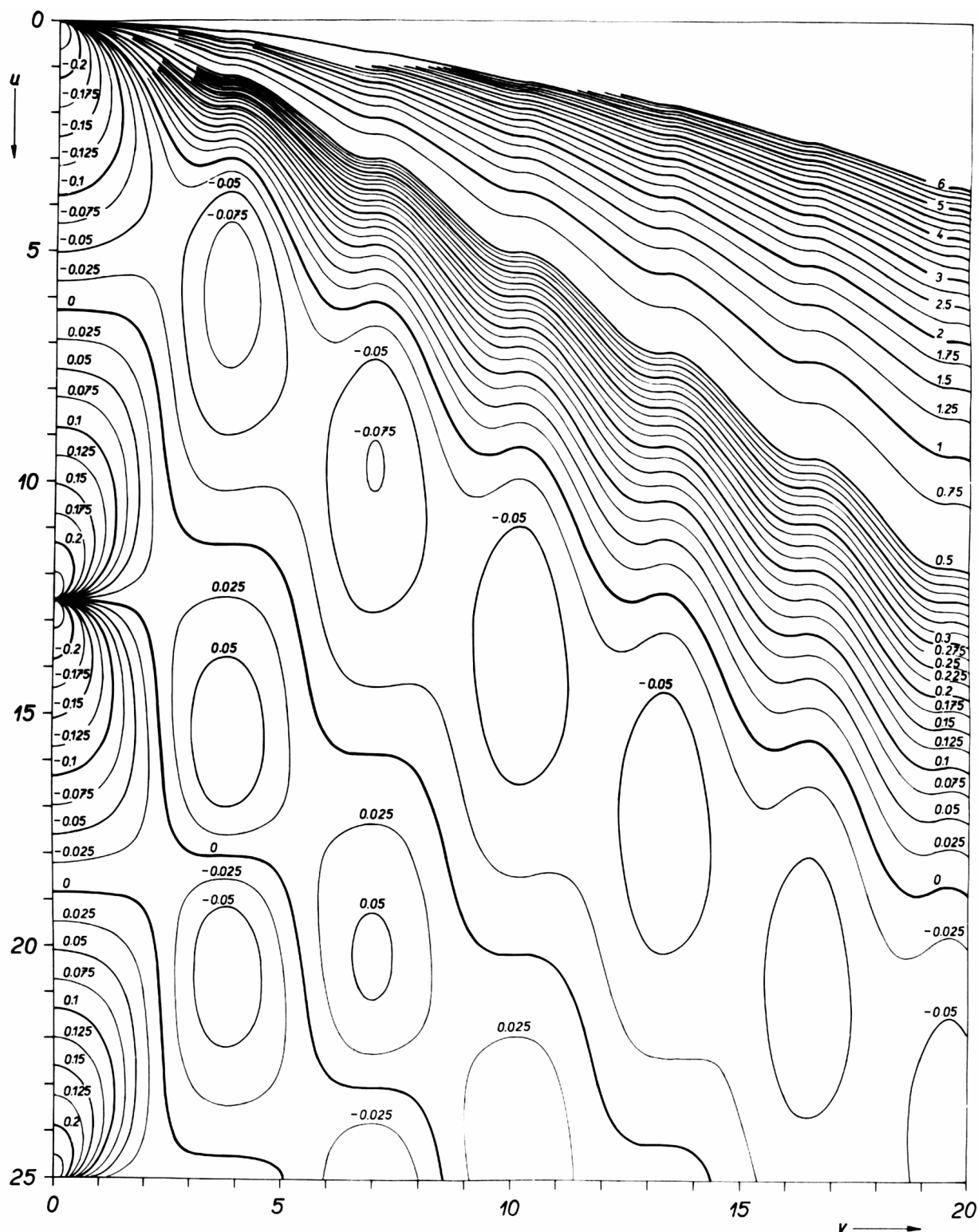
$$\frac{\psi}{\psi_r} \Bigg|_{\rho = \frac{z_1+z}{z_1}a} = \frac{1}{2} \left[1 - J_0(u) \exp(iu) \right] = \frac{1}{2} \exp(iu) \left[\exp(-iu) - J_0(u) \right]. \quad (28)$$

Intenzitu a fázi v bodech hranice geometrického stínu tedy charakterizují výrazy

$$I(u, u) = \frac{1}{4} \left[1 + J_0^2(u) - 2J_0(u) \cos u \right], \quad \phi(u, u) = u + \operatorname{Arctg} \frac{\sin u}{J_0(u) - \cos u}. \quad (29)$$



Obrázek 28: Graf funkce $I(u, v)$ dané vztahem 5.8(23) resp. 5.8(26) a představující relativní intenzitu ve Fresnelových difrakčních jevech na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku. Hranici geometrického stínu odpovídá uhlopříčka $u = v$ (nezakresleno). V grafu jsou patrné extrémní intenzity v bodech $u = 2n\pi$ osy u . Odpovídají experimentálnímu uspořádání, kdy otvor propouští n Fresnelových zón.



Obrázek 29: Graf funkce $\frac{1}{2\pi} \phi(u, v)$ dané vztahem 5.8(24) resp. 5.8(27) a charakterizující fázi Fresnelových difrakčních jevů na kruhovém otvoru v nepropustném stínítku. Hranici geometrického stínu odpovídá uhlopříčka $u = v$ (nezakresleno). Z porovnání obr. 28 a 29 je vidět, že v bodech, kde je intenzita I nulová (viz bod $u = 4\pi, v = 0$), je funkce ϕ mnohoznačná a nabývá všech hodnot z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.

5.9 Fresnelova difrakce na nepropustné kruhové překážce

Vlnovou funkci popisující difrakci na nepropustném otvoru získáme nejnázne z podmínky, že součet vlnové funkce pro difrakci na disku a vlnové funkce charakterizující difrakci na komplementárním kruhovém otvoru musí dát referenční vlnovou funkci ψ_r :

$$\psi_{\text{otvor}} + \psi_{\text{disk}} = \psi_r,$$

tj.

$$\frac{\psi_{\text{disk}}}{\psi_r} = 1 - \frac{\psi_{\text{otvor}}}{\psi_r}. \quad (1)$$

Vlnovou funkci v bodech osy rotační symetrie disku dostaneme, dosadíme-li do (1) ze 5.8(11)

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{\text{disk}}(\rho = 0, z)}{\psi_r(\rho = 0, z)} &= 1 + \exp\left(\frac{i}{2}u\right) - 1 = \exp\left(\frac{i}{2}u\right) = \\ &= \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z}\right)a^2\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Z toho je vidět, že podél osy symetrie kruhového disku je relativní intenzita $I = 1$ ve shodě s Poissonovou námitkou (srov. odst. 3.4) a s experimentem (viz obr. 3.7). Fáze v bodech osy je

$$\phi(\rho = 0, z) = \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z}\right)a^2.$$

Vlnovou funkci charakterizující difrakci v obecném bodě dostaneme, dosadíme-li do (1) z 5.8(22). Dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{\text{disk}}}{\psi_r} &= \left\{1 + \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] [U_2(u, v) + iU_1(u, v)]\right\} = \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] \left\{\exp\left[-\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] + U_2(u, v) + iU_1(u, v)\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Chceme-li vyjádřit vlnovou funkci prostřednictvím Lommelových funkcí V_0 a V_1 , dosadíme do (3) ze vztahu C.1(18) a s použitím C.1(5) dostaneme

$$\frac{\psi_{\text{disk}}}{\psi_r}(\rho, \varphi, z) = \exp\left[\frac{i}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] [V_0(u, v) - iV_1(u, v)]. \quad (4)$$

Pro relativní intenzitu dostáváme ze (4) resp. (3)

$$I = V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v), \quad (5)$$

resp.

$$I = 1 + U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v) - 2U_1(u, v) \sin\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right] + 2U_2(u, v) \cos\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right]. \quad (6)$$

Pro fázi dostáváme ze (4)

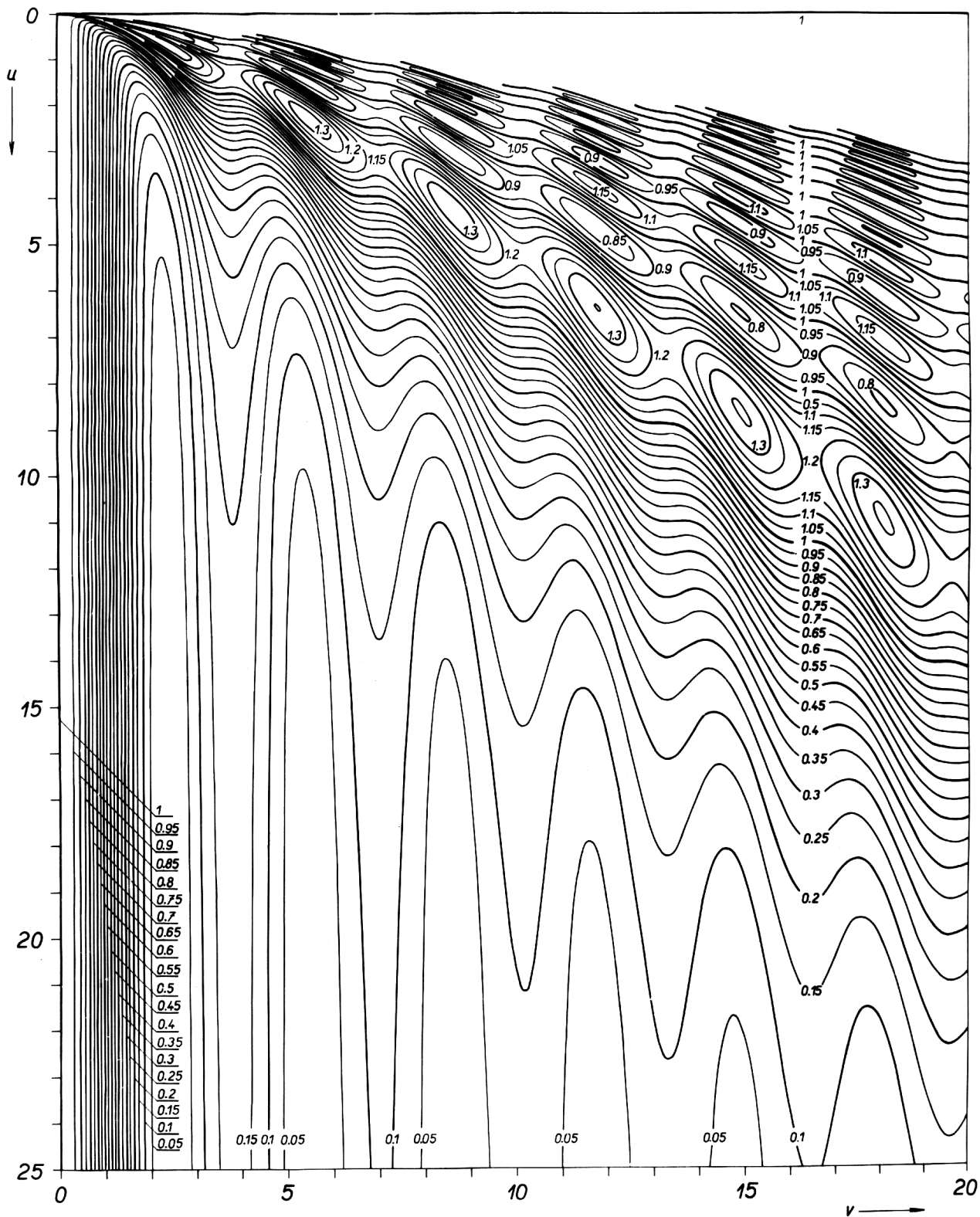
$$\phi = \frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right) - \text{Arctg} \frac{V_1(u, v)}{V_0(u, v)}, \quad (7)$$

resp. ze (3)

$$\phi = \frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right) + \text{Arctg} \frac{U_1(u, v) - \sin\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right]}{U_2(u, v) + \cos\left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{v^2}{u}\right)\right]}. \quad (8)$$

Graf relativní intenzity I ve Fresnelově ohybu na kruhové překážce, tj. graf funkce (5), (6), je na obr. 30. Typické difrakční obrazce tohoto typu jsme uvedli již v kap. 3 na obr. 3.7. Graf funkce $\frac{1}{2\pi}\phi(u, v)$ dané vztahem (7), (8) charakterizující fázi Fresnelových difrakčních jevů na kruhové překážce je na obr. 31.

Z grafu na obr. 30 lze nahlédnout, že poloměr ρ_0 světlé stopy uprostřed difrakčního obrazce je nepřímo úměrný poloměru a kruhové překážky: Místa stejné relativní intenzity centrální světlé stopy leží na přímkách



Obrázek 30: Graf funkce $I(u, v)$ dané vztahem 5.9(5) resp. 5.9(6) a představující relativní intenzitu ve Fresnelových difrakčních jevech na nepropustné kruhové překážce. Hranici geometrického stínu odpovídá přímka $u = v$ (nezakresleno). Z grafu je vidět, že ve středu difrakčního obrazce (tj. na ose u) je vždy jednotková relativní intenzita.

rovnoběžných s osou u a minimum relativní intenzity, jež definuje poloměr centrální stopy, má hodnotu $v = v_0 \doteq 2,4$. Z 5.8(19) pak vyplývá zmíněná nepřímá úměrnost.

$$\rho_0 = \frac{z v_0}{k a} = \frac{z \lambda v_0}{2\pi a}. \quad (9)$$

(Je pozoruhodné, že poloměr ρ_0 centrální stopy nezávisí na vzdálenosti z_1 mezi zdrojem a kruhovou překážkou.) Pro konkrétní představu si můžeme z (9) vypočítat, že pro hodnoty $z = 2,5$ m, $\lambda = 6,3 \cdot 10^{-7}$ m, $a = 1 \cdot 10^{-3}$ m vychází průměr centrální světlé stopy $2\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ m.

Není obtížné se přesvědčit, že výraz (2) pro vlnovou funkci v bodech osy rotační symetrie lze získat, položíme-li ve (3) nebo (4) $v = 0$ (viz vztahy C.3(2) a C.3(3)).

Výraz pro vlnovou funkci v bodech hranice geometrického stínu dostaneme z (3) nebo (4), položíme-li $u = v$. S použitím vztahů C.3(6) až C.3(8) vypočteme

$$\left. \frac{\psi}{\psi_r} \right|_{\rho = \frac{z_1+z}{z_1} a} = \frac{1}{2} [1 + J_0(u) \exp(iu)] = \frac{1}{2} \exp(iu) [J_0(u) + \exp(-iu)]. \quad (10)$$

Takže intenzitu a fázi na hranici geometrického stínu charakterizují výrazy

$$I(u, u) = \frac{1}{4} [1 + J_0^2(u) + 2J_0(u) \cos u], \quad \phi(u, u) = u - \text{Arctg} \frac{\sin u}{J_0(u) + \cos u}. \quad (11)$$

Reference

- [1] Fresnel J. A.: *Œuvres complètes d'Augustin Fresnel*, Tome 1. (H. de Senarmont, É. Verdet, L. Fresnel, eds.) Imprimerie Impériale, Paris 1866.
- [2] Young T.: *A Course of Lectures on Natural Philosophy and the Mechanical Arts. A new edition*, ed. P. Kelland. Taylor and Walton, London 1845.
- [3] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. I, p. 37–2, Vol. III, p. 1–1. Addison–Wesley Publ. Co., Reading, Mass. 1967. Český překlad: *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Fragment, Praha 2000, str. 497.
- [4] Laue M. v.: *Dějiny fyziky*. Orbis, Praha 1959, str. 40.
- [5] Crease R. P.: *The most beautiful experiment*, <<http://physicsweb.org/article/world/15/9/2/1>> [cit. 30. 6. 2004].
- [6] Zeilinger A., Gähler R., Shull C. G., Treimer W., Mampe W.: Single- and double-slit diffraction of neutrons. *Reviews of Modern Physics* **60** (1988), 1067–1073.
- [7] Betz H. D.: An Asymmetry Method for High Precision Alignment with Laser Light. *Applied Optics* **8** (1969), 1007–1013.
- [8] Velechovský K., Komrská J.: Využití Fresnelovy difrakce s nulovou intenzitou ve dvou na sebe kolmých směrech k vytyčování přímk. *Jemná mechanika a optika* **48** (2003), 186–192.
- [9] Komrská J.: *Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze*. VUTIUM Brno, 2001.