6 Kirchhoffův a Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál

Až dosud jsme termínem difrakční integrál rozuměli výrazy 2.3(1) a 2.3(2). Jsou to integrály, jichž se bez dalších úprav používá k výpočtu Fraunhoferových a Fresnelových difrakčních jevů. V této kapitole dochází k terminologickému posunu. Budeme odvozovat integrály, které co nejvíce připomínají integrál 3.2(5), tj. Huygensův–Fresnelův princip. A těmto integrálům budeme — ve shodě s optickou literaturou — říkat Kirchhoffův difrakční integrál a Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál.

Odvozování bude vycházet jednak z Helmholtzovy rovnice

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0, \tag{1}$$

jež — jak víme (srov. odst. 1.7) — musí splňovat část $\psi(\vec{r})$ harmonické vlny závislá pouze na prostorových souřadnicích v bodech homogenního, izotropního a neabsorbujícího prostředí neobsahujícího zdroje vlnění, jednak z Greenovy formule ve tvaru (viz Dodatek A, vztah (5))

$$\iint_S [\psi(\vec{r})\nabla\psi_1(\vec{r}) - \psi_1(\vec{r})\nabla\psi(\vec{r})]\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0, \tag{2}$$

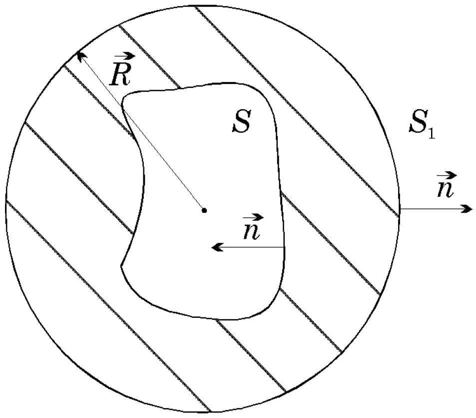
která platí, když funkce ψ a ψ_1 jsou spojité se všemi prvními derivacemi v bodech uzavřené po částech hladké plochy S a všude uvnitř plochy S vyhovují téže Helmholtzově rovnici. (Uvnitř plochy S tedy nesmějí mít funkce ψ a ψ_1 singularity, tj. nesmějí tam být bodové zdroje vlnění.) Vyčlenění těchto singularit z vnitřku plochy S a příslušné limity, kdy vyčleněné oblasti zaujímají jen infinitezimální okolí singulárních bodů, hrají při odvozování podstatnou úlohu.

Při odvozování bude naší snahou co nejostřeji odlišit matematickou a fyzikální stránku odvození. Nejprve uvedeme poměrně obšírně matematický aparát, aby se objevily možnosti, jak adekvátně vystihnout fyzikální podstatu. Např.: Většinou (a snad vždy až na Bakera a Copsona [1]) se difrakční integrál odvozuje tak, že vlnová funkce v bodě pozorování se vyjadřuje prostřednictvím vlnové funkce a její derivace ve směru normály v bodech plochy S, jež *obklopuje bod pozorování.* Viděli jsme však, že Huygensovu–Fresnelovu principu je bližší, aby plochou S byla vlnoplocha nebo aspoň nějaká plocha obklopující zdroje vlnění. Tato druhá verze je asi přirozenější, a proto i pedagogicky vhodnější. Je však možné postupovat i takto? Uvidíme, že ano, záleží to jen na tom, jak brzy se použije vyzařovací podmínky. Zkrátka jde o to, abychom si byli vědomi všech možností, které matematika nabízí, a mohli si vybrat tu, která nejlépe vyhovuje fyzikální podstatě.

Dále bude naší snahou odstranit zbytečné matematické rozpornosti v odvozování. Např. část uzavřené plochy S jde při odvozování do nekonečna a je třeba zdůvodnit, proč příspěvek k vlnové funkci v bodě pozorování od této části plochy S je nulový. Argumentace, že když jde plocha do nekonečna, je součet sekundárních vln od ní došlých nulový, neobstojí, neboť amplituda sekundárních vln klesá jako $1/R$, avšak plocha kulového vrchlíku roste s kvadrátem poloměru. Rovněž neobstojí argumentace, že vlnění do nekonečna nikdy nedojde, takže z nekonečna nemohou přijít sekundární vlny — je to v rozporu s tím, že jde o harmonické vlnění. Je prostě nutné integrál korektně vyšetřit a využít podmínky konečnosti a vyzařovací podmínky.

6.1 Vyzařovací podmínka

Vztah 6(2) platí za předpokladu, že funkce $\psi(Q)$ a $\psi_1(Q)$ splňují požadavky Greenovy formule a jsou řešením Helmholtzovy rovnice v každém bodě uvnitř uzavřené plochy S. To však není právě typické pro teorii difrakce. Zvolíme-li za plochu S vlnoplochu, přičemž zdroje vlnění jsou uvnitř této vlnoplochy, nejsou předpoklady Greenovy věty splněny v bodech, kde jsou zdroje vlnění lokalizovány. Např. je-li v bodě $r = 0$ uvnitř plochy S zdroj vyzařující kulovou vlnu $\exp(\mathrm{i}kr)/r$, je v bodě $r = 0$ singularita. Zvolíme-li za funkci ψ_1 ve vztahu 6(2) tuto kulovou vlnu, nejsou splněny podmínky platnosti Greenovy formule a rovnice 6(2) nemusí platit. Budeme se proto zabývat případem, kdy řešení $\psi(Q)$, $\psi_1(Q)$ Helmholtzovy rovnice mají spojité příslušné parciální derivace všude *vně* po částech hladké uzavřené plochy S a na ploše S a vyšetříme, jaké dodatečné podmínky je třeba klást na funkce ψ, ψ_1, aby rovnice 6(2) byla splněna.



Obrázek 1: K odvození vyzařovací podmínky.

Za tím účelem aplikujeme vztah 6(2) na plochu sestávající z uzavřené plochy S a povrchu koule S_1 o tak velkém poloměru R, že plocha S je uvnitř S_1. Normály nechť jsou orientovány tak, že $\vec{n}$ je vnější normálou vzhledem k objemu vymezenému plochami S a S_1 (obr. 1).

$$\iint_S (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_1} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_1 = 0.$$

Zkoumejme, za jakých podmínek je integrál přes kulovou plochu S_1 roven nule, když její poloměr R roste nade všechny meze. V bodech plochy S_1 platí $\vec{n}\,\mathrm{d}S_1 = \vec{R}R\,\mathrm{d}\Omega$, kde $\mathrm{d}\Omega$ je element prostorového úhlu, takže

$$\iint_{S_1} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_1 = \iint_\Omega (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{R}R\,\mathrm{d}\Omega.$$

Je zřejmé, že tento integrál je roven nule, např. když funkce ψ, ψ_1 splňují podmínky $|R\psi| <$ konst., $|R\nabla\psi| \to 0$ pro $R \to \infty$. Avšak takové podmínky jsou příliš přísné a např. divergující kulová vlna je nesplňuje. Právě vyšetřování rozbíhavé kulové vlny vedlo Sommerfelda [2] k formulaci mírnějších podmínek. Dospějeme k nim tak, že odhadneme hodnotu integrálu přes kulovou plochu S_1. Nejprve v integrandu odečteme a přičteme výraz $\mathrm{i}kR\psi\psi_1$ a pak několikrát použijeme pravidel pro odhad absolutní hodnoty integrálu:

$$\begin{aligned}
\left|\iint_{S_1} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_1\right| &= \left|\iint_\Omega (\psi\vec{R}\cdot\nabla\psi_1 - \psi_1\vec{R}\cdot\nabla\psi)\,R\,\mathrm{d}\Omega\right| = \\
&= \left|\iint_\Omega \Big[(\psi\vec{R}\cdot\nabla\psi_1 - \mathrm{i}kR\psi\psi_1) - (\psi_1\vec{R}\cdot\nabla\psi - \mathrm{i}kR\psi\psi_1)\Big]\,R\,\mathrm{d}\Omega\right| \le \\
&\le \left|\iint_\Omega (\vec{R}\cdot\nabla\psi_1 - \mathrm{i}kR\psi_1)\,R\psi\,\mathrm{d}\Omega\right| + \left|\iint_\Omega (\vec{R}\cdot\nabla\psi - \mathrm{i}kR\psi)\,R\psi_1\,\mathrm{d}\Omega\right| \le \\
&\le \iint_\Omega \left|\vec{R}\cdot\nabla\psi_1 - \mathrm{i}kR\psi_1\right| \left|R\psi\right| \mathrm{d}\Omega + \iint_\Omega \left|\vec{R}\cdot\nabla\psi - \mathrm{i}kR\psi\right| \left|R\psi_1\right| \mathrm{d}\Omega \le \\
&\le 4\pi \left|\vec{R}\cdot\nabla\psi_1 - \mathrm{i}kR\psi_1\right|_{\max} \left|R\psi\right|_{\max} + 4\pi \left|\vec{R}\cdot\nabla\psi - \mathrm{i}kR\psi\right|_{\max} \left|R\psi_1\right|_{\max}.
\end{aligned}$$

Index max značí maximální hodnotu příslušné absolutní hodnoty na kulové ploše S_1. Vidíme tedy, že pokud funkce ψ, ψ_1 splňují stejnoměrně ke všem směrům v prostoru podmínky

$$|R\psi| < \text{konst.}, \quad |R\psi_1| < \text{konst.} \ \text{ pro } \ R \to \infty \tag{1}$$

a

$$R\left(\frac{\nabla\psi \cdot \vec{R}}{R} - \mathrm{i}k\psi\right) \to 0, \quad R\left(\frac{\nabla\psi_1 \cdot \vec{R}}{R} - \mathrm{i}k\psi_1\right) \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty, \tag{2}$$

jde integrál přes kulovou plochu S_1 k nule, když její poloměr R neomezeně roste. Podmínku (1) nazval Sommerfeld (viz [2], [3], § 28) podmínkou konečnosti a podmínku (2) vyzařovací podmínkou. Rellich [4] a Vekua [5] dokázali, že podmínka konečnosti (1) je důsledkem vyzařovací podmínky (2). K tomu, aby limita integrálu přes kulovou plochu S_1 při $R \to \infty$ byla nulová, stačí tedy splnění podmínky (2).

Z toho, co bylo dosud v tomto odstavci uvedeno, vyplývá, že vztah 6(2) platí pro libovolnou po částech hladkou plochu S ohraničující jednoduše souvislý objem, jestliže řešení ψ, ψ_1 Helmholtzovy rovnice jsou spojitá i s prvními derivacemi ve všech bodech plochy S a spolu s druhými derivacemi buď všude uvnitř plochy S nebo všude vně plochy S, avšak v tomto druhém případě musí funkce ψ, ψ_1 ještě navíc splňovat stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku (2).

Je užitečné se přesvědčit, že rozbíhavá kulová vlna $\psi = \exp(\mathrm{i}kR)/R$ splňuje vyzařovací podmínku. Vypočteme

$$\nabla\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right] = \mathrm{i}k\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kR}\right)\left[\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}\right]\frac{\vec{R}}{R}.$$

Takže

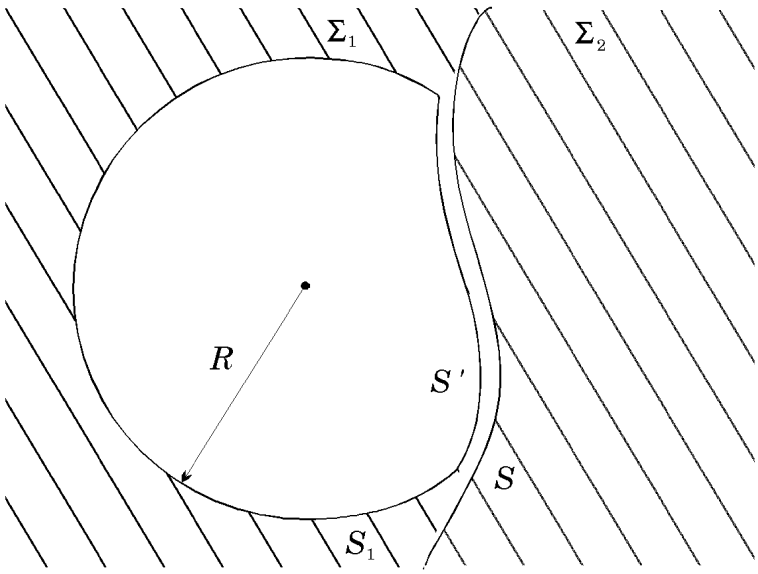
$$R\left(\nabla\psi \cdot \frac{\vec{R}}{R} - \mathrm{i}k\psi\right) = -\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R}, \tag{3}$$

což jde k nule, když $R \to \infty$.

Naproti tomu sbíhavá kulová vlna $\psi = \exp(-\mathrm{i}kR)/R$ splňuje pouze podmínku konečnosti, nikoli však vyzařovací podmínku:

$$\nabla\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kR)}{R}\right] = -\left(\mathrm{i}k + \frac{1}{R}\right)\left[\frac{\exp(-\mathrm{i}kR)}{R}\right]\frac{\vec{R}}{R},$$

takže



Obrázek 2: K důkazu platnosti vztahu 6(2) v případě nekonečné plochy S.

$$R\left(\nabla\psi \cdot \frac{\vec{R}}{R} - \mathrm{i}k\psi\right) = -\mathrm{i}k\left(2 - \frac{\mathrm{i}}{kR}\right)\exp(-\mathrm{i}kR), \tag{4}$$

což nemá limitu pro $R \to \infty$.

Rozšíříme ještě dále platnost vztahu 6(2), a sice na případ, kdy S není uzavřenou plochou vymezující konečný objem, ale nekonečnou plochou rozdělující prostor na dva poloprostory Σ_1 a Σ_2 (obr. 2). Předpokládáme, že řešení ψ, ψ_1 Helmholtzovy rovnice splňují stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku (2) a jsou spojitá i s prvními derivacemi na ploše S a i s druhými derivacemi v jednom z poloprostorů vymezených plochou S, např. v poloprostoru Σ_2 na obr. 2. Body poloprostoru Σ_1, v nichž některé z řešení ψ, ψ_1 Helmholtzovy rovnice nebo některá z příslušných derivací není spojitá, obalíme plochou $S' \cup S_1$ tvořenou částí S' plochy S a částí S_1 povrchu koule o dostatečně velkém poloměru R (viz obr. 2). Poněvadž všude vně plochy $S' \cup S_1$ jsou splněny podmínky platnosti vztahu 6(2) včetně vyzařovací podmínky (2), platí

$$\iint_{S_1} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_1 + \iint_{S'} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S' = 0.$$

Roste-li poloměr R nade všechny meze, jde integrál přes část S_1 kulové plochy k nule, neboť ψ a ψ_1 splňují vyzařovací podmínku a plocha S' přechází v celou nekonečnou plochu S.

Dospíváme tak k závěru, že vztah 6(2) platí také pro nekonečnou po částech hladkou plochu S, jsou-li řešení ψ, ψ_1 Helmholtzovy rovnice spojitá i s prvními derivacemi na ploše S a i s druhými derivacemi v jednom z poloprostorů plochou S vymezených a splňují-li stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku (2).

6.2 Integrální věta

Směřujeme k tomu, abychom vyjádřili vlnovou funkci $\psi(P)$ v bodě pozorování P pomocí vlnové funkce $\psi(M)$ v bodech M plochy S. Dosáhneme toho tím, že ve vztahu 6(2) ztotožníme funkci ψ s vlnovou funkcí, kdežto s funkcí ψ_1 budeme nakládat jako s pomocnou funkcí. Zvolíme ji ve tvaru funkce polohy obecného bodu Q vzhledem k bodu P, tj. ve tvaru $\psi_1 = \psi_1(\overrightarrow{PQ})$, a budeme na ni klást různé požadavky, jež umožní dospět ke zmíněnému cíli. Konkrétně u Rayleighova–Sommerfeldova odvození difrakčního integrálu ztotožníme funkci ψ_1 s Greenovou funkcí příslušného okrajového problému, jež splňuje čtyři podmínky 6.5(1) až (4) resp. (5). K získání tzv. Helmholtzovy integrální věty, jež je východiskem pro odvození Kirchhoffova difrakčního integrálu a Rubinowiczovy reprezentace difrakčního integrálu, však stačí, budeme-li na funkci ψ_1 klást dvě resp. tři z těchto podmínek (6.5(1), (2) resp. 6.5(1), (2) a (3)) podle toho, zda chceme vyjádřit vlnovou funkci v bodě P uvnitř uzavřené plochy S (věta **i)**) nebo v nějaké nekonečné části prostoru (věty **ii)** a **iii)**).

V tomto odstavci odvodíme integrální větu, jejímž speciálním důsledkem je jak Helmholtzova integrální věta, tak vztahy 6.5(6) a 6.5(7), z nichž se vychází při odvození Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu.

Označíme $\vec{s}_Q$ vektor $\overrightarrow{PQ}$ mířící od nějakého pevně zvoleného bodu P (bod pozorování) k obecnému bodu Q. Speciálně je-li obecný bod Q bodem plochy S, označíme ho M a příslušný vektor $\vec{s}_M$. Funkci ψ_1 můžeme tedy chápat jako funkci polohového vektoru $\vec{s}_Q$ vycházejícího z bodu P, tj. $\psi_1 = \psi_1(\vec{s}_Q)$. Orientaci normály k ploše S zvolíme tak, že $\vec{n}$ značí vnější normálu uzavřené po částech hladké plochy S (obr. 3, 4).

Chceme-li počítat vlnovou funkci v bodě P uvnitř uzavřené plochy S, je užitečná tato formulace integrální věty:

i) Nechť funkce $\psi(Q)$ a $\psi_1(\vec{s}_Q)$ vyhovují Helmholtzově rovnici

$$\nabla_Q^2\psi(Q) + k^2\psi(Q) = 0, \quad \nabla_Q^2\psi_1(\vec{s}_Q) + k^2\psi_1(\vec{s}_Q) = 0 \tag{1}$$

všude uvnitř a na uzavřené ploše S. Nechť funkce $\psi(Q)$ je spojitá i se všemi svými prvními derivacemi uvnitř a na ploše S a se všemi druhými derivacemi uvnitř plochy S. Nechť totéž platí o funkci $\psi_1(\vec{s}_Q)$ s výjimkou bodu P, v němž má singularitu typu

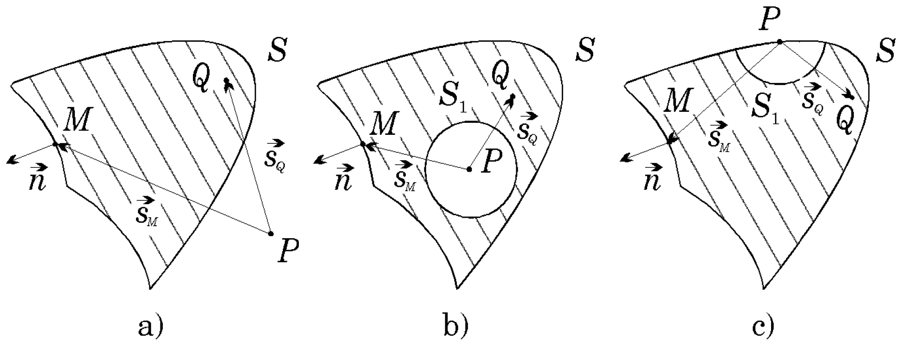
$$\psi_1(\vec{s}_Q) \to 1/s_Q \quad \text{pro} \quad s_Q \to 0. \tag{2}$$

Pak integrál

$$I(P) = \iint_S [\psi(M)\nabla_M\psi_1(\vec{s}_M) - \psi_1(\vec{s}_M)\nabla_M\psi(M)] \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S \tag{3}$$

je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$I(P) = -4\pi\psi(P), \tag{4}$$



Obrázek 3: K důkazu integrální věty **i)**.

když P je uvnitř plochy S,

$$I(P) = -2\pi\psi(P), \tag{5}$$

když P je regulárním bodem plochy S a

$$I(P) = 0, \tag{6}$$

když P leží vně plochy S.

Důkaz:

a) Jestliže bod P leží vně plochy S (obr. 3 a)), splňují funkce $\psi(Q)$, $\psi_1(\vec{s}_Q)$ v každém bodě Q uvnitř a na ploše S podmínky, za nichž platí vztah 6(2), takže integrál (3) je roven nule a tvrzení (6) je dokázáno.

b) Jestliže bod P leží uvnitř plochy S (obr. 3 b)), nesplňuje funkce $\psi_1(\vec{s}_Q)$ podmínky platnosti věty 6(2) v bodě $Q \equiv P$, tj. $s_Q = 0$. Je proto třeba bod P z vnitřku plochy S vyloučit. Uděláme to tak, že kolem bodu P opíšeme malou kouli s povrchem S_1. Vztah 6(2) aplikujeme na plochu $S \cup S_1$:

$$\iint_S (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_1} (\psi\nabla\psi_1 - \psi_1\nabla\psi)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_1 = 0. \tag{7}$$

První integrál obsahuje vlnovou funkci v bodech M plochy S. Výpočtem limity druhého integrálu pro poloměr kulové plochy S_1 jdoucí k nule dostaneme výraz obsahující hledanou hodnotu vlnové funkce v bodě P. Uvážíme-li, že na povrchu koule S_1 je $\vec{n} = -\vec{s}_Q/s_Q$, $\mathrm{d}S_1 = s_Q^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$, kde θ a ϕ jsou úhly sférických souřadnic, dostáváme tak limitu druhého integrálu v (7) ve tvaru

$$-\lim_{s_Q\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\psi(Q)\nabla_Q\psi_1(\vec{s}_Q)\cdot\vec{s}_Q - \psi_1(\vec{s}_Q)\nabla_Q\psi(Q)\cdot\vec{s}_Q\right]s_Q\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi =$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\lim_{s_Q\to 0}\psi(P+\vec{s}_Q)\lim_{s_Q\to 0}s_Q\vec{s}_Q\cdot\nabla_Q\psi_1(\vec{s}_Q) - \lim_{s_Q\to 0}\psi_1(\vec{s}_Q)s_Q\vec{s}_Q\cdot\lim_{s_Q\to 0}\nabla_Q\psi(P+\vec{s}_Q)\right]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Vypočteme nyní limity vyskytující se v integrandu. Hodnota první a čtvrté limity zřejmě je

$$\lim_{s_Q\to 0}\psi(P+\vec{s}_Q) = \psi(P), \quad \lim_{s_Q\to 0}\nabla_Q\psi(P+\vec{s}_Q) = \nabla\psi(P). \tag{8}$$

S přihlédnutím k podmínce (2) pro funkci ψ_1 dostáváme pro druhou a třetí limitu

$$\lim_{s_Q\to 0}s_Q\vec{s}_Q\cdot\nabla_Q\psi_1(\vec{s}_Q) = \lim_{s_Q\to 0}s_Q\vec{s}_Q\cdot\nabla_Q\frac{1}{s_Q} = -1, \tag{9}$$

$$\lim_{s_Q\to 0}\psi_1(\vec{s}_Q)s_Q\vec{s}_Q = \lim_{s_Q\to 0}\vec{s}_Q = \vec{0}. \tag{10}$$

Poněvadž $|\nabla\psi(P)|$ je konečná, dostáváme pro limitu integrálu přes kulovou plochu S_1 v (7)

$$\lim_{s_Q \to 0} \iint_{S_1} (\psi \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S_1 = \psi(P) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 4\pi\psi(P). \tag{11}$$

Z (7) tedy vyplývá

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\psi(M) \nabla_M \psi_1(\vec{s}_M) - \psi_1(\vec{s}_M) \nabla_M \psi(M)\right] \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S, \tag{12}$$

čímž je dokázáno tvrzení (4).

c) Leží-li bod P na ploše S (obr. 3c)), nejsou splněny podmínky věty 6(2) v bodě P plochy S. Částí S_1 koule o malém poloměru a se středem v P vyloučíme tento bod a jeho okolí z povrchu a vnitřku plochy S a větu 6(2) aplikujeme na plochu $S' \cup S_1$, kde S' je plocha S bez okolí bodu P vymezeného plochou S_1. Celý důkaz sub b) zůstává v platnosti pouze s tím rozdílem, že při integraci přes S_1 se změní meze integrace podle úhlových souřadnic. Poněvadž předpokládáme, že P je regulárním bodem plochy S, můžeme zvolit směr osy $\theta = 0$ ve směru normály $\vec{n}$ k ploše S v bodě P a místo (11) máme

$$\lim_{s_Q \to 0} \iint_{S_1} (\psi \nabla \psi_1 - \psi_1 \nabla \psi) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S_1 = \psi(P) \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi = 2\pi\psi(P).$$

Jde-li poloměr plochy S_1 k nule, přechází plocha S' v S a z (7) pak plyne tvrzení (5). Je-li bod P singulárním bodem plochy S, tj. tečny k ploše S v bodě P neleží v jedné rovině, platí zřejmě místo (5)

$$I(P) = -p\psi(P),$$

kde p je prostorový úhel vymezený tečnami procházejícími bodem P.

Chceme-li počítat vlnovou funkci v bodě P vně uzavřené plochy S, je užitečná tato formulace integrální věty:

ii) Nechť funkce $\psi(Q)$ a $\psi_1(\vec{s}_Q)$ vyhovují Helmholtzově rovnici (1) všude vně a na uzavřené ploše S a nechť splňují stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku 6.1(2). Nechť funkce $\psi(Q)$ je spojitá i se všemi prvními derivacemi vně a na ploše S a se všemi druhými derivacemi vně plochy S. Nechť totéž platí o funkci $\psi_1(\vec{s}_Q)$ s výjimkou bodu P, v němž má singularitu typu (2). Pak integrál $I(P)$ daný výrazem (3) je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$I(P) = 4\pi\psi(P), \tag{13}$$

když P je vně plochy S,

$$I(P) = 2\pi\psi(P), \tag{14}$$

když P je regulárním bodem plochy S a

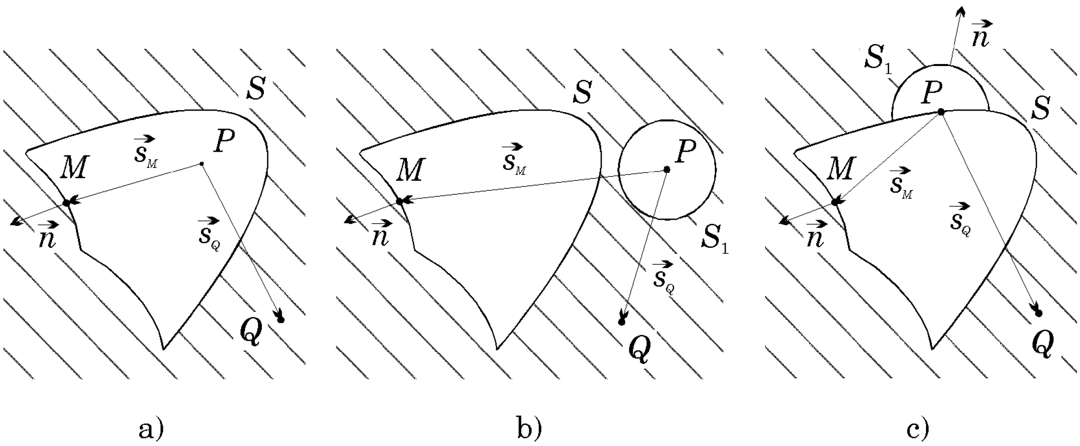
$$I(P) = 0, \tag{15}$$

když P leží uvnitř plochy S. (Při (13) a (14) je nutné pamatovat na to, že $\vec{n}$ značí stále vnější normálu uzavřené po částech hladké plochy S (viz obr. 4).) Důkaz je obdobný důkazu věty **i)**:

a) Leží-li bod P uvnitř plochy S (obr. 4a)), splňují funkce $\psi(Q)$ a $\psi_1(\vec{s}_Q)$ v každém bodě Q na ploše a vně plochy S podmínky, za nichž platí vztah 6(2), takže integrál (3) je roven nule a tvrzení (15) je dokázáno.

b) Je-li bod P vně plochy S, nesplňuje funkce $\psi_1(\vec{s}_Q)$ podmínky platnosti vztahu 6(2) v bodě $s_Q = 0$. Proto tento bod vyloučíme z vnějšku plochy S tak, že kolem něj opíšeme malou kouli s povrchem S_1 a na plochu $S \cup S_1$ aplikujeme vztah 6(2). Dostaneme vztah (7). Na S_1 platí $\vec{n} = \vec{s}_Q / s_Q$ (obr. 4b)) a jde-li poloměr kulové plochy S_1 k nule, je integrál po S_1 roven integrálu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\lim_{s_Q \to 0} \psi(P + \vec{s}_Q) \lim_{s_Q \to 0} s_Q \vec{s}_Q \cdot \nabla_Q \psi_1(\vec{s}_Q) - \lim_{s_Q \to 0} \psi_1(\vec{s}_Q) s_Q \vec{s}_Q \cdot \lim_{s_Q \to 0} \nabla_Q \psi(P + \vec{s}_Q) \right] \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi.$$



Obrázek 4: K důkazu integrální věty **ii)**.

Jednotlivé limity v integrandu se opět rovnají hodnotám (8), (9) a (10), limita integrálu po S_1 v (7) je tedy rovna $-4\pi\psi(P)$, takže

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \big[\psi(M)\nabla_M\psi_1(\vec{s}_M) - \psi_1(\vec{s}_M)\nabla_M\psi(M)\big]\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{16}$$

a tvrzení (13) je dokázáno.

c) Konečně je-li P bodem plochy S, vyloučíme jej a jeho okolí z povrchu a vnějšku plochy S částí koule s povrchem S_1 opsané kolem bodu P (obr. 4c)). Větu 6(2) pak aplikujeme na plochu $S' \cup S_1$, kde S' označuje plochu S bez okolí bodu P vymezeného plochou S_1. Je-li P regulárním bodem plochy S, je při výpočtu limity pro $s_Q \to 0$ integrálu přes plochu S_1 hodnota integrálu podle úhlových proměnných rovna 2π a limita integrálu přes S_1 je rovna $2\pi\psi(P)$. Současně při nekonečně malém poloměru plochy S_1 přejde S' v S a tvrzení (14) je tím dokázáno. Je-li P singulárním bodem plochy S, je při výpočtu limity integrálu přes plochu S_1 hodnota integrálu podle úhlových proměnných rovna $4\pi - p$, kde p je prostorový úhel vymezený tečnami v bodě P, a $I(P) = (4\pi - p)\psi(P)$.

Vyjadřujeme-li vlnovou funkci $\psi(P)$ v bodě P prostřednictvím vlnové funkce v bodech nekonečné plochy S, je východiskem tato formulace integrální věty:
iii) Nechť S je nekonečná po částech hladká plocha rozdělující prostor na dva poloprostory Σ_1 a Σ_2. Nechť řešení ψ, ψ_1 Helmholtzovy rovnice (1) splňují stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku 6.1(2). Nechť ψ je spojitá funkce i s prvními derivacemi na ploše S a i s druhými derivacemi ve vnitřních bodech poloprostoru Σ_2. Nechť totéž platí o funkci ψ_1 s výjimkou bodu P, v němž má singularitu typu (2). Pak integrál $I(P)$ daný výrazem (3) je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$I(P) = 4\pi\psi(P), \tag{17}$$

když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2,

$$I(P) = 2\pi\psi(P), \tag{18}$$

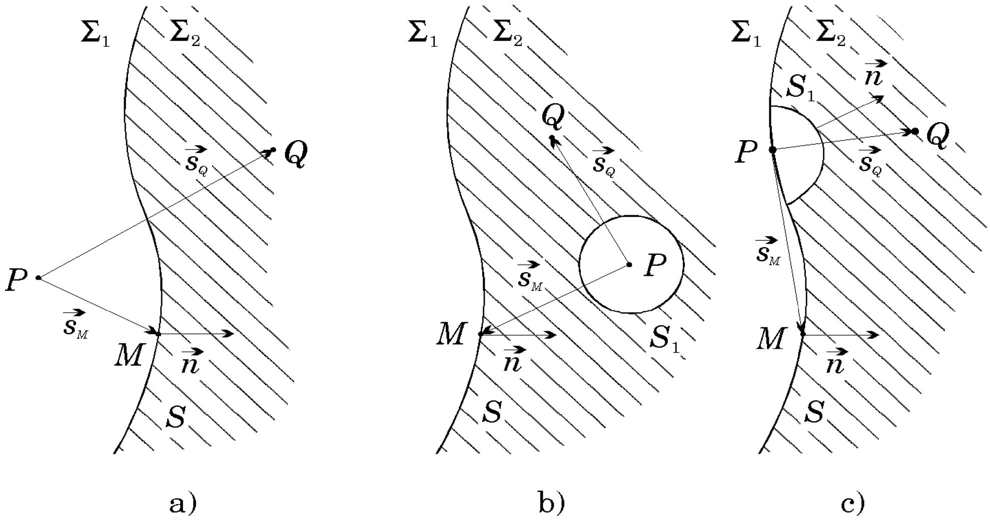
když P je regulárním bodem plochy S a

$$I(P) = 0, \tag{19}$$

když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_1.

Důkaz:

a) Je-li bod P vnitřním bodem poloprostoru Σ_1 (obr. 5a)), splňují funkce ψ, ψ_1 ve všech bodech Q poloprostoru Σ_2 podmínky platnosti vztahu 6(2), a tím je tvrzení (19) dokázáno.



Obrázek 5: K důkazu integrální věty **iii)**.

b) Je-li bod P vnitřním bodem poloprostoru Σ_2, nesplňuje funkce $\psi_1(\vec{s}_Q)$ podmínky vztahu 6(2) v bodě $Q \equiv P$. Proto kolem bodu P opíšeme malou kouli s povrchem S_1 a vztah 6(2) aplikujeme na plochu $S \cup S_1$ (obr. 5b)). Dostaneme vztah (7). Stejně jako při důkazu věty ii) sub b) shledáme, že jde-li poloměr kulové plochy S_1 k nule, je limita integrálu přes plochu S_1 v (7) rovna $-4\pi\psi(P)$, takže platí (16), a tím je tvrzení (17) dokázáno.

c) Konečně je-li P bodem plochy S, vyloučíme jej a jeho okolí z plochy S a poloprostoru Σ_2 částí koule s povrchem S_1 opsané kolem bodu P (obr. 5c)). Vztah 6(2) aplikujeme na plochu $S' \cup S_1$, kde S' značí plochu S bez okolí bodu P vymezeného plochou S_1. Zbytek důkazu tvrzení (18) je stejný jako při důkazu věty ii) sub c).

6.3 Helmholtzova integrální věta

Helmholtzova integrální věta je speciálním důsledkem integrální věty předchozího odstavce při volbě $\psi_1(\vec{s}_Q) = \exp(\mathrm{i}ks_Q)/s_Q$. Je zřejmé, že tato funkce splňuje předpoklady kladené v předchozím odstavci na funkci $\psi_1(\vec{s}_Q)$: Je řešením Helmholtzovy rovnice, v bodě $s_Q = 0$ má singularitu typu $1/s_Q$, pro všechna $s_Q \neq 0$ je spojitá se všemi požadovanými derivacemi a splňuje vyzařovací podmínku 6.1(2).

Uvedeme Helmholtzovu integrální větu opět ve třech formulacích. První i) vyjadřuje vlnovou funkci v obecném bodě P uvnitř uzavřené plochy S prostřednictvím vlnové funkce a její derivace ve směru normály v bodech M plochy S a druhá ii) totéž v bodě P vně plochy S. Fyzikálně chápáno, je-li plocha S zvolena tak, že všechny zdroje vlnění jsou uvnitř, je druhá formulace blízká obvyklému pojetí Huygensova–Fresnelova principu. Třetí formulace iii) vyjadřuje vlnovou funkci v obecném bodě P prostřednictvím vlnové funkce a její derivace ve směru normály v bodech nekonečné plochy S. Význam této formulace vyplývá z toho, že v optice jde většinou o difrakci na rovinném stínítku.

i) Nechť $\psi(Q)$ je řešení Helmholtzovy rovnice spojité se všemi svými prvními derivacemi uvnitř a na uzavřené ploše S a se všemi druhými derivacemi uvnitř plochy S. Pak integrál

$$H(P) = \iint_S \left\{ \psi(M) \nabla_M \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \right] - \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \right] \nabla_M \psi(M) \right\} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S \tag{1}$$

je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$H(P) = -4\pi\psi(P), \tag{2}$$

když P je uvnitř plochy S,

$$H(P) = -2\pi\psi(P), \tag{3}$$

když P je regulárním bodem plochy S a

$$H(P) = 0, \tag{4}$$

když P leží vně plochy S.

ii) Nechť $\psi(Q)$ je řešení Helmholtzovy rovnice spojité se všemi svými prvními derivacemi vně a na uzavřené ploše S a se všemi druhými derivacemi vně plochy S. Dále nechť $\psi(Q)$ splňuje stejnoměrně ke všem směrům v prostoru vyzařovací podmínku 6.1(2). Pak integrál $H(P)$ daný výrazem (1) je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$H(P) = 4\pi\psi(P), \tag{5}$$

když P leží vně plochy S.

$$H(P) = 2\pi\psi(P), \tag{6}$$

když P je regulárním bodem plochy S a

$$H(P) = 0, \tag{7}$$

když P leží uvnitř plochy S.

iii) Nechť S je nekonečná po částech hladká plocha rozdělující prostor na dva poloprostory Σ_1 a Σ_2. Nechť $\psi(Q)$ je řešení Helmholtzovy rovnice spojité se všemi prvními derivacemi na ploše S, se všemi druhými derivacemi ve vnitřních bodech Q poloprostoru Σ_2, splňující podmínku 6.1(2). Pak integrál $H(P)$ daný výrazem (1) je funkcí definovanou pro libovolnou polohu bodu P a platí

$$H(P) = 4\pi\psi(P), \tag{8}$$

když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2.

$$H(P) = 2\pi\psi(P), \tag{9}$$

když P je regulárním bodem plochy S a

$$H(P) = 0, \tag{10}$$

když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_1.

Helmholtzova integrální věta vyjadřuje vlnovou funkci v bodě pozorování P prostřednictvím vlnové funkce a její derivace v bodech M plochy S. Na rozdíl od heuristického Huygensova–Fresnelova principu tedy vyžaduje nejen vlnovou funkci, ale i její derivaci ve směru normály v bodech M plochy S. Je rigorózní v tom smyslu, že nejde o formulaci heuristickou, ale odvozenou pomocí vět integrálního počtu z podmínky, že vlnová funkce vyhovuje Helmholtzově rovnici.

Ztotožníme-li plochu S s vlnoplochou, má Helmholtzova integrální věta důležitou vlastnost často požadovanou od Huygensova–Fresnelova principu: totiž tu, že z vlnoplochy se vlna šíří jen ve směrech od zdrojů, kdežto zpětná vlna neexistuje (viz 3.2(2)). Skutečně podle (7) je $\psi(P) = 0$ pro všechny body uvnitř plochy S.

* * *

Helmholtzovu integrální větu lze považovat za hledaný difrakční integrál. Vyjadřuje totiž vlnovou funkci $\psi(P)$ v bodě P prostřednictvím vlnové funkce $\psi(M)$ a derivace ve směru normály $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ v bodech M plochy S. Potíž je však v tom, že Helmholtzova integrální věta požaduje současně znalost funkce $\psi(M)$ i derivace ve směru normály $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$. Vycházíme-li tedy při vyjadřování $\psi(M)$ a $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ z nějakého fyzikálního modelu, je nutné dbát na to, aby obě vyjádření byla matematicky konzistentní. Slabinou Kirchhoffova odvození difrakčního integrálu je právě matematická rozpornost volby $\psi(M)$ a $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ (srov. odst. 6.4.1 pojednávající o Kirchoffových okrajových podmínkách). Rayleighovo–Sommerfeldovo odvození difrakčního integrálu se proto vrací k integrální větě z odst. 6.2 a za funkci ψ_1 nevolí kulovou vlnu, jako v případě Helmholtzovy integrální věty, ale Greenovu funkci, jejíž vlastnosti způsobují, že výsledný difrakční integrál obsahuje buď jen hodnoty $\psi(M)$, nebo jen hodnoty $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ (viz odst. 6.5.1). Nepříjemné u Rayleighova–Sommerfeldova odvození však je, že explicitní tvar Greenovy funkce je znám jen pro speciální tvary plochy S (rovina a koule). Naštěstí pro nejdůležitější případ rovinného difrakčního stínítka se explicitní tvar Greenovy funkce snadno najde (srov. odst. 6.5.2).

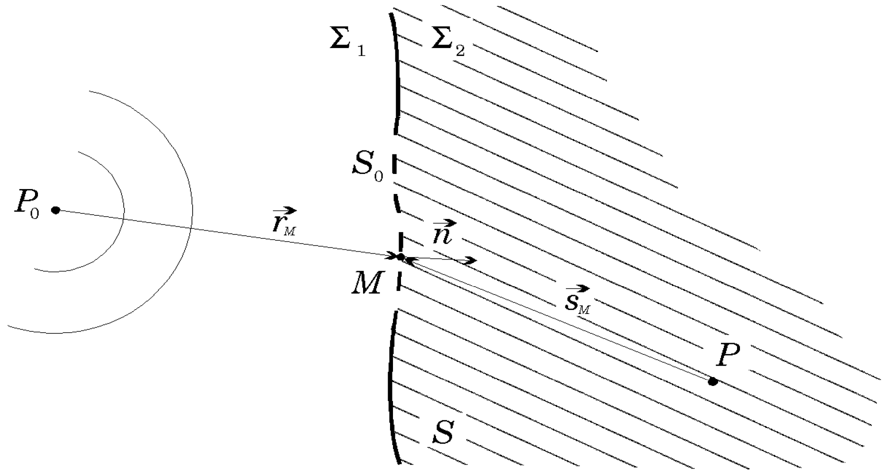
6.4 Kirchhoffovo odvození difrakčního integrálu

Difrakční integrál vždy odvozujeme ve tvaru použitelném pro popis difrakce vlnění dopadajícího na takové neprůhledné stínítko s otvory, které odděluje poloprostor Σ_1, v němž jsou zdroje vlnění, od poloprostoru Σ_2, v němž počítáme difrakční jev (obr. 6). Za plochu S pak zvolíme část povrchu stínítka odvrácenou od zdrojů. Pro Kirchhoffovo odvození difrakčního integrálu je tedy východiskem Helmholtzova integrální věta iii). Vyplývá z ní

$$\psi(P)=\frac{D}{4\pi}\iint_S\left\{\psi(M)\nabla_M\left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M}\right]-\left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M}\right]\nabla_M\psi(M)\right\}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S, \tag{1}$$

kde

$$\begin{aligned}
D &= 1,\ \text{když } P \text{ je vnitřním bodem poloprostoru } \Sigma_2,\\
D &= 2,\ \text{když } P \text{ leží na ploše } S,\\
D &= 0,\ \text{když } P \text{ je vnitřním bodem poloprostoru } \Sigma_1.
\end{aligned}$$



Obrázek 6: K odvození Kirchhoffova difrakčního integrálu.

O funkci ψ se přitom předpokládá, že všude v Σ_2 je řešením Helmholtzovy rovnice spojitým i s prvními derivacemi na ploše S a i s druhými derivacemi ve vnitřních bodech poloprostoru Σ_2 a že splňuje vyzařovací podmínku stejnoměrně ke všem směrům v prostoru. Zbývá nyní specifikovat funkci $\psi(M)$ a $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ v bodech M plochy S.

6.4.1 Kirchhoffovy okrajové podmínky

Označme S_0 propustnou část difrakčního stínítka (obr. 6). Intuitivně se zdá být rozumné dosadit do integrálu (1) Kirchhoffovy okrajové podmínky, které předpokládají, že v nepropustné části stínítka je funkce ψ i její derivace ve směru normály rovna nule, kdežto v propustné části je táž, jakoby nepropustných částí nebylo. Matematicky vyjádřeno:

$$\psi(M)=0,\qquad \nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}=0\qquad \text{pro } M\notin S_0, \tag{2}$$

$$\psi(M)=\psi_0(M),\ \nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}=\nabla_M\psi_0(M)\cdot\vec{n}\quad \text{pro } M\in S_0, \tag{3}$$

kde $\psi_0(M)$ jsou hodnoty vlnové funkce, které by byly v bodech M propustné oblasti S_0 plochy S, kdyby nebylo nepropustných částí difrakčního stínítka.

Z fyzikálního hlediska jsou Kirchhoffovy okrajové podmínky zjednodušením skutečnosti, jsou však dobře přijatelným modelem, zejména jsou-li rozměry otvorů velké ve srovnání s vlnovou délkou. Jistou představu o tom, do jaké míry je splněna podmínka (2), lze získat z grafů v práci Braunbeka a Laukiena [6], které udávají rozložení amplitudy a fáze při difrakci rovinné elektromagnetické vlny na nekonečně tenké dokonale vodivé (tedy nepropustné) polorovině, vypočtené na základě Maxwellových rovnic. Z grafů je vidět, že již ve vzdálenosti asi $0,12\lambda$ od kraje poloroviny klesne v zadní části poloroviny amplituda na polovinu hodnoty v propustné části a ve vzdálenosti λ asi na pětinu. Lze z toho usoudit, že jsou-li jak rozměry otvorů, tak rozměry nepropustných částí difrakčního stínítka velké ve srovnání s vlnovou délkou, jsou Kirchhoffovy okrajové podmínky rozumnou aproximací. Potíž je však v tom, že jsou rozporné z matematického hlediska.

Matematická rozpornost Kirchhoffových okrajových podmínek (2), (3) spočívá v tom, že odporují větě 1.11: Jestliže v libovolné konečné části nějaké hladké plochy jsou řešení ψ Helmholtzovy rovnice i jeho derivace ve směru normály $\nabla\psi \cdot \vec{n}$ rovny nule, je řešení ψ rovno nule v celém prostoru. Okrajové podmínky (2), (3) si tedy vzájemně odporují. To degraduje Kirchhoffův difrakční integrál na heuristickou metodu řešení okrajového problému Helmholtzovy rovnice s Kirchhoffovými okrajovými podmínkami (2), (3) – srov. však poznámku v odst. 6.6

Jinou matematickou nesrovnalostí je, že Kirchhoffovy okrajové podmínky jsou na ploše S nespojité, kdežto Helmholtzova integrální věta předpokládá, že funkce ψ je v bodech plochy nejen spojitá, ale i hladká. Tuto nesrovnalost lze odstranit, neboť nespojitosti jsou konečné. Matematicky lze k po částech hladkým okrajovým podmínkám $\psi(M)$, $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$ sestrojit takové hladké funkce $\psi^{(C)}(M)$, $\nabla_M\psi^{(C)}(M)\cdot\vec{n}$, že rozdíly $\Delta_1 = \psi(M)-\psi^{(C)}(M)$, $\Delta_2(M) = \nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}-\nabla_M\psi^{(C)}(M)\cdot\vec{n}$ jsou nenulové pouze v libovolně úzkém oboru lemujícím nespojitosti funkcí $\psi(M)$, $\nabla_M\psi(M)\cdot\vec{n}$. Lze nahlédnout, že vlnová funkce $\psi^{(C)}(P)$, kterou dává difrakční integrál s hladkými okrajovými podmínkami $\psi^{(C)}(M)$, $\nabla_M\psi(C)(M)\cdot\vec{n}$, se libovolně málo liší od vlnové funkce $\psi(P)$ dané difrakčním integrálem s po částech spojitými okrajovými podmínkami.

6.4.2 Kirchhoffův difrakční integrál

Dosazením okrajových podmínek (2), (3) do (1) se získá Kirchhoffův difrakční integrál ve tvaru

$$\psi(P) = \frac{D}{4\pi}\iint_{S_0}\left\{\psi_0(M)\nabla_M\left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M}\right] - \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M}\right]\nabla_M\psi_0(M)\right\}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_0, \tag{4}$$

v němž se integruje pouze přes propustnou část S_0 difrakčního stínítka.

Jako speciální případ uvažujeme difrakční stínítko, jehož propustné části jsou tvořeny prázdnými otvory a které je osvětleno kulovou vlnou vycházející ze zdroje P_0 (obr. 6). Označíme-li $\vec{r}_M = \overrightarrow{P_0M}$, má vlnová funkce a její gradient v bodech M difrakčního stínítka tvar (až na konstantní faktor mající význam amplitudy v jednotkové vzdálenosti od zdroje P_0)

$$\psi_0(M) = \frac{\exp(\mathrm{i}kr_M)}{r_M}, \quad \nabla_M\psi_0(M) = \mathrm{i}k\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr_M}\right)\frac{\vec{r}_M}{r_M}\,\frac{\exp(\mathrm{i}kr_M)}{r_M}.$$

Dosadíme-li tyto výrazy do (4), dostaneme po úpravě

$$\psi(P) = D\,\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\iint_{S_0}\frac{\exp\big[\mathrm{i}k(r_M+s_M)\big]}{r_Ms_M}\left[\frac{\vec{s}_M}{s_M}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{ks_M}\right) - \frac{\vec{r}_M}{r_M}\left(1+\frac{\mathrm{i}}{kr_M}\right)\right]\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_0. \tag{5}$$

V případě optické difrakce je $r_M,\ s_M >> \lambda$, a proto $1/kr_M$ a $1/ks_M$ lze zanedbat proti jedničce. Pak $D=1$ a

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\iint_{S_0}\frac{\exp\big[\mathrm{i}k(r_M+s_M)\big]}{r_Ms_M}\left(\frac{\vec{r}_M}{r_M}-\frac{\vec{s}_M}{s_M}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_0. \tag{6}$$

Zejména tento tvar difrakčního integrálu je východiskem pro numerické výpočty optických difrakčních jevů.

Při přechodu od integrálu (4) k integrálu (6) je poučné si všimnout, jak z teorie vyplývají Fresnelův fázový předstih $(-\mathrm{i}) = \exp(-\mathrm{i}\pi/2)$ sekundárních vln a faktor $1/\lambda = k/2\pi$, o nichž byla řeč v odstavci 3.2 o Huygensově–Fresnelově principu. Dále je z integrálu (6) vidět, že v případě, že se integruje přes vlnoplochu (tj. $\vec{r}/r = \vec{n}$), je faktor sklonu $(1-\vec{n}\cdot\vec{s}/s)/2$, jak o tom byla zmínka v témž odst. 3.2, 3.2(3).

6.4.3 Helmholtzova věta o reciprocitě při difrakci

Speciální tvar Kirchhoffova difrakčního integrálu (5) resp. (6) dávající vlnovou funkci při izotropním bodovém zdroji je antisymetrický vzhledem k polohám bodového zdroje P_0 a bodu pozorování P. Zamění-li se poloha zdroje a bodu pozorování, změní se v integrálech (5) a (6) pouze znaménko. To znamená, že způsobí-li zdroj P_0 nějaký rozruch v bodě pozorování P, pak identický zdroj umístěný v P by způsobil — až na znaménko — týž rozruch v bodě P_0. To je Helmholtzova věta o reciprocitě při difrakci.

Tuto větu nelze chápat tak, že by otvor v nepropustném difrakčním stínítku mohl mít nějaké fokusační vlastnosti a způsobovat, že kdyby se jako zdroje použilo difrakčního obrazce získaného pomocí bodového zdroje, bylo by možné difrakcí na identickém otvoru zkoncentrovat světlo opět do bodu. Helmholtzova věta o reciprocitě při difrakci totiž neříká nic o hodnotách vlnové funkce v okolí bodu P_0.

6.5 Rayleighovo–Sommerfeldovo odvození difrakčního integrálu

Rayleighovo–Sommerfeldovo odvození ([7], [8], §34) je matematicky exaktní odvození difrakčního integrálu v teorii difrakce skalárních vln. Jeho praktický význam je veliký, třebaže je omezen jen na případ, kdy je znám explicitní tvar Greenovy funkce příslušející tvaru difrakčního stínítka (ploše S v integrální větě). Tento explicitní tvar lze totiž najít, jen když je difrakční stínítko rovinné. V optických aplikacích tomu tak naštěstí bývá. Zaměříme se proto při výkladu Rayleighova–Sommerfeldova odvození na tento případ a vyjdeme z integrální věty iii) odst. 6.2.

6.5.1 Greenova funkce

Nutnost předepisovat na ploše S vlnovou funkci i její derivaci ve směru normály, což je příčinou rozpornosti Kirchhoffova odvození, odpadá, zvolíme-li v integrální větě iii) odst. 6.2 za pomocnou funkci ψ_1 buď funkci $G^{(-)}(P,Q)$, jež je rovna nule v bodech plochy S, nebo funkci $G^{(+)}(P,Q)$, jejíž derivace ve směru normály k ploše S je rovna nule. Musí tedy pomocná funkce $G^{(-)}$ resp. $G^{(+)}$ splňovat tyto podmínky:

A) Je řešením Helmholtzovy rovnice

$$\nabla_Q^2 G(P,Q) + k^2 G(P,Q) = 0 \tag{1}$$

spojitým i s prvními derivacemi v bodech plochy S a i s druhými derivacemi ve vnitřních bodech $Q \neq P$ poloprostoru Σ_2.

B) V bodě $Q \equiv P$ má singularitu

$$G(\vec{s}_Q) \to \frac{1}{s_Q} \quad \text{pro} \quad s_Q \to 0. \tag{2}$$

C) Stejnoměrně ke všem směrům v prostoru splňuje vyzařovací podmínku

$$\lim_{s_Q \to \infty} s_Q \left[\nabla_Q G(P,Q) \cdot \frac{\vec{s}_Q}{s_Q} - \mathrm{i}kG(P,Q) \right] = 0. \tag{3}$$

D) V bodech M plochy S platí buď

$$G^{(-)}(P,M) = 0, \tag{4}$$

nebo

$$\nabla_M G^{(+)}(P,M) \cdot \vec{n} = 0. \tag{5}$$

Funkci $G^{(-)}$ resp. $G^{(+)}$ splňující podmínky (1) až (4) resp. (1), (2), (3), (5) nazýváme Greenovou funkcí. Důvod označení $G^{(-)}$ a $G^{(+)}$ vyplývá z explicitního tvaru těchto funkcí (srov. níže uvedené vztahy (8) a (9)). Pokud není třeba mezi oběma funkcemi rozlišovat, užíváme společného symbolu G.

Splnění prvních tří podmínek vyžaduje integrální věta iii) odst. 6.2. Podmínka (4) je specifická pro funkci $G^{(-)}$. Díky této podmínce stačí k určení vlnové funkce $\psi(P)$ v bodě P jen hodnoty vlnové funkce $\psi(M)$ v bodech plochy S a není třeba specifikovat derivaci ve směru normály. Použijeme-li totiž za funkci

ψ_1 ve větě iii) odst. 6.2 Greenovu funkci $G^{(-)}$ (tj. dosadíme-li ji do vztahu 6.2(3)), dostaneme (z 6.2(17) až 6.2(19)) s využitím (4)

$$\psi(P) = \frac{D}{4\pi} \iint_S \psi(M) \nabla_M G^{(-)}(P, M) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S, \tag{6}$$

kde D má týž význam jako v případě 6.4(1).

Naproti tomu podmínka (5) je specifická pro funkci $G^{(+)}$ a umožňuje to, že k určení vlnové funkce $\psi(P)$ stačí jen hodnoty derivace vlnové funkce ve směru normály k ploše S, tj. $\nabla_M \psi(M) \cdot \vec{n}$, a není třeba specifikovat samu vlnovou funkci $\psi(M)$. Použijeme-li za funkci ψ_1 ve větě iii) odst. 6.2 Greenovu funkci $G^{(+)}$, dostaneme

$$\psi(P) = -\frac{D}{4\pi} \iint_S G^{(+)}(P, M) \nabla_M \psi(M) \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S. \tag{7}$$

Každý ze vztahů (6) a (7) určuje vlnovou funkci ψ v libovolném bodě prostoru. Aby však bylo možné těchto vztahů prakticky použít, musíme najít explicitní tvar funkcí $G^{(-)}$ a $G^{(+)}$ příslušejících ploše S. Obecně to, bohužel, není asi možné. Naštěstí však pro nejdůležitější případ, kdy plochou S je rovina a bod P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2, lze najít explicitní tvary funkcí $G^{(-)}$ a $G^{(+)}$ snadno ([8], §34).

6.5.2 Explicitní tvar Greenovy funkce příslušející rovinnému difrakčnímu stínítku

K nalezení explicitního tvaru funkcí $G^{(-)}$ a $G^{(+)}$ příslušejících rovině S použil Sommerfeld ([8], §34) metody obrazu (obr. 7). Nechť P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2 a nechť P' je zrcadlový obraz bodu P podle roviny S. Pak funkce

$$G^{(-)}(P, Q) = \frac{\exp(\mathrm{i}ks_Q)}{s_Q} - \frac{\exp(\mathrm{i}ks'_Q)}{s'_Q} \tag{8}$$

a

$$G^{(+)}(P, Q) = \frac{\exp(\mathrm{i}ks_Q)}{s_Q} + \frac{\exp(\mathrm{i}ks'_Q)}{s'_Q}, \tag{9}$$

kde $\vec{s}'_Q = \overrightarrow{P'Q}$, jsou hledanými explicitními tvary Greenových funkcí, neboť funkce (8) splňuje podmínky (1) až (4) a funkce (9) splňuje podmínky (1), (2), (3) a (5):

i) $G(P, Q)$ je spojitým řešením Helmholtzovy rovnice ve všech bodech $P \neq Q$ poloprostoru Σ_2. (Singularita v bodě P' nevadí, neboť $P' \notin \Sigma_2$.)

ii) Pro $s_Q \to 0$ se funkce $G(P, Q)$ chová jako $1/s_Q$, neboť první sčítanec se k této funkci blíží. Naproti tomu druhý sčítanec zůstává konečný.

iii) Vyzařovací podmínka je rovněž splněna (srov. 6.1(3)).

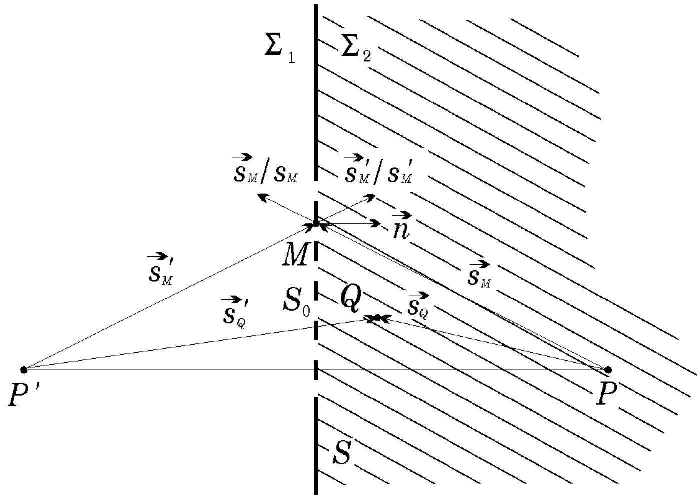
iv) Sestavení funkce $G(P, Q)$ metodou zrcadlení, tj. $s_M = s'_M$, zajišťuje splnění podmínky $G^{(-)}(P, M) = 0$ v bodech roviny S. Rovněž funkce $G^{(+)}$ splňuje podmínku (5), jak se lze přesvědčit přímým výpočtem:

$$\nabla_Q G^{(+)}(P, Q) = \mathrm{i}k \left[\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_Q}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}ks_Q)}{s_Q} \frac{\vec{s}_Q}{s_Q} + \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks'_Q}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}ks'_Q)}{s'_Q} \frac{\vec{s}'_Q}{s'_Q} \right]. \tag{10}$$

Poněvadž v bodech M roviny S je $s_M = s'_M$, vyplývá z (10), že vektor

$$\nabla_M G^{(+)}(P, M) = \mathrm{i}k \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_M}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \left(\frac{\vec{s}_M}{s_M} + \frac{\vec{s}'_M}{s'_M} \right) \tag{11}$$

leží v rovině S (srov. obr. 7), takže skalární součin tohoto vektoru s normálou $\vec{n}$ k rovině S je roven nule, jak požaduje podmínka (5).



Obrázek 7: K nalezení explicitních tvarů Greenových funkcí $G^{(-)}$ a $G^{(+)}$ pro případ rovinného difrakčního stínítka.

Zbývá ještě zdůvodnit omezení polohy bodu P na vnitřní body poloprostoru Σ_2. Jsou tři možnosti polohy bodu P:
a) P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2,
b) P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_1,
c) P leží v rovině S.
V případě **a)** bylo již dokázáno, že funkce (8) a (9) jsou explicitními tvary Greenovy funkce. V případě **b)** by bod P' byl vnitřním bodem poloprostoru Σ_2 a singularita v tomto bodě by odporovala první podmínce kladené na Greenovu funkci. Nejsou proto v případě **b)** funkce (8) a (9) Greenovými funkcemi. V případě **c)** by byla funkce $G^{(-)}(P,Q) \equiv 0$ pro libovolnou polohu bodu Q v celém prostoru, což by odporovalo druhé podmínce, jíž musí Greenova funkce splňovat. Naproti tomu funkce $G^{(+)}(P,Q)$ má v případě **c)** tvar

$$G^{(+)}(P,Q) = 2\,\frac{\exp(\mathrm{i}ks_Q)}{s_Q},$$

jenž splňuje podmínky (1), (2), (3) a (5). Funkce $G^{(+)}(P,Q)$ zůstává proto Greenovou funkcí, i když bod P leží na ploše S.

6.5.3 Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál pro okrajovou podmínku $\psi(M)$

Explicitního tvaru (8) Greenovy funkce $G^{(-)}(P,Q)$ nyní použijeme k úpravě integrálu (6). Poněvadž v bodech M roviny S je $s_M = s'_M$ a $\vec{s}_M \cdot \vec{n} = -\vec{s}'_M \cdot \vec{n}$ (srov. obr. 7), má derivace Greenovy funkce $G^{(-)}$ ve směru normály tvar

$$\nabla_M G^{(-)}(P,M) \cdot \vec{n} = 2\mathrm{i}k \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_M}\right) \frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \left(\frac{\vec{s}_M}{s_M}\right) \cdot \vec{n}. \tag{12}$$

Funkce (8) je explicitním tvarem Greenovy funkce $G^{(-)}(P,Q)$, pouze když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2. Položíme proto v (6) $D = 1$. Dosadíme-li dále do (6) derivaci ve směru normály ve tvaru (12), dostaneme

$$\psi(P) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint_S \psi(M) \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M}\right] \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_M}\right) \left(\frac{\vec{s}_M}{s_M}\right) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S. \tag{13}$$

Je-li rovinné difrakční stínítko S tvořeno propustnými částmi S_0 a nepropustnými částmi $S - S_0$, představují rozumný fyzikální model okrajové podmínky

$$\psi(M) = 0 \quad \text{pro} \quad M \notin S_0, \qquad \psi(M) = \psi_0(M) \quad \text{pro} \quad M \in S_0, \tag{14}$$

kde $\psi_0(M)$ značí opět hodnoty vlnové funkce, které by byly v bodech M propustné oblasti S_0 roviny S, kdyby nebylo nepropustných částí difrakčního stínítka. (Problém nespojitosti funkce $\psi(M)$ v bodech okraje otvoru lze překlenout způsobem naznačeným v závěru odst. 6.4.1.) Za podmínek (14) má difrakční integrál (13) tvar

$$\psi(P) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint_{S_0} \psi_0(M) \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \right] \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_M} \right) \left(\frac{\vec{s}_M}{s_M} \right) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_0, \tag{15}$$

v němž se integruje pouze přes propustnou část S_0 rovinného stínítka. Integrál (15) je korektně odvozeným difrakčním integrálem, jenž vyjadřuje vlnovou funkci v bodě P prostřednictvím hodnot vlnové funkce $\psi(M)$ v bodech M propustné části S_0 rovinného stínítka. Takto konečně dostáváme aspoň pro případ rovinného difrakčního stínítka Huygensův–Fresnelův princip korektně odvozený z vlnové rovnice.

Uvedeme rovněž tvar difrakčního integrálu (15) ve speciálním případě rovinného difrakčního stínítka, jehož propustné části jsou tvořeny prázdnými otvory a které je osvětleno kulovou vlnou vycházející z bodového zdroje P_0, tj. $\psi_0(M) = \exp(\mathrm{i}kr_M)/r_M,\ \vec{r}_M = \overrightarrow{P_0M}$:

$$\psi(P) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\exp\left[\mathrm{i}k(r_M + s_M)\right]}{r_M s_M} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{ks_M} \right) \frac{\vec{s}_M}{s_M} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_0. \tag{16}$$

V případě optické difrakce je $s_M >> \lambda$, takže $1/ks_M$ lze zanedbat proti jedničce. Difrakční integrál (16) má pak tvar

$$\psi(P) = \frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\exp\left[\mathrm{i}k(r_M + s_M)\right]}{r_M s_M} \frac{\vec{s}_M}{s_M} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_0. \tag{17}$$

Stojí za upozornění, že na rozdíl od Kirchhoffova integrálu 6.4(5) resp. 6.4(6) nemá integrál (16) resp. (17) symetrii vzhledem k polohám bodového zdroje P_0 a bodu pozorování P, takže nemůže existovat analogie Helmholtzovy věty o reciprocitě.

6.5.4 Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál pro okrajovou podmínku $\nabla_M \psi(M) \cdot \vec{n}$

V bodech M roviny S je Greenova funkce (9)

$$G^{(+)}(P, M) = 2\, \frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M},$$

takže integrál (7) nabude tvaru

$$\psi(P) = -\frac{D}{2\pi} \iint_S \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \right] \nabla_M \psi(M) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S\ . \tag{18}$$

Vzhledem k možným polohám bodu P, pro něž je funkce (9) Greenovou funkcí (srov. závěr odst. 6.5.2), může D nabývat hodnot $D = 1$, když P je vnitřním bodem poloprostoru Σ_2, $D = 2$, když P leží v rovině S.

Je-li rovinné stínítko S tvořeno propustnými částmi S_0 a nepropustnými částmi $S - S_0$, představují rozumný fyzikální model okrajové podmínky

$$\nabla_M \psi(M) = \vec{0} \quad \text{pro} \quad M \notin S_0, \qquad \nabla_M \psi(M) = \nabla_M \psi_0(M) \quad \text{pro} \quad M \in S_0, \tag{19}$$

kde $\psi_0(M)$ značí hodnoty vlnové funkce, které by byly v bodech M roviny S, kdyby nebylo nepropustných částí. Za podmínek (19) má difrakční integrál (18) tvar

$$\psi(P) = -\frac{D}{2\pi} \iint_{S_0} \left[\frac{\exp(\mathrm{i}ks_M)}{s_M} \right] \nabla_M \psi_0(M) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_0. \tag{20}$$

Integrál (20) je korektně odvozeným difrakčním integrálem, jenž vyjadřuje vlnovou funkci v bodě P prostřednictvím hodnot derivace vlnové funkce ve směru normály v bodech M propustné části S_0 rovinného stínítka S.

Je-li rovinné difrakční stínítko osvětleno kulovou vlnou vycházející z bodu P_0 a jsou-li propustné části prázdné otvory, je $\psi_0(M) = \exp(\mathrm{i}kr_M)/r_M,\ \vec{r}_M = \overrightarrow{P_0M}$, takže podle (20) je

$$\psi(P) = -D\, \frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \iint_{S_0} \frac{\exp\left[\mathrm{i}k(r_M + s_M)\right]}{r_M s_M} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{kr_M} \right) \frac{\vec{r}_M}{r_M} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}S_0. \tag{21}$$

V případě optické difrakce je $r_M >> \lambda$, takže $1/kr_M << 1$, a také $s_M >> \lambda$, takže $D = 1$, a difrakční integrál (21) má tvar

$$\psi(P) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\iint_{S_0} \frac{\exp\bigl[\mathrm{i}k(r_M + s_M)\bigr]}{r_M s_M}\,\frac{\vec{r}_M}{r_M}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S_0. \tag{22}$$

Rovněž difrakční integrál (21) resp. (22) nemá symetrii vzhledem k polohám bodového zdroje P_0 a bodu pozorování P, a proto nemůže existovat analogie Helmholtzovy věty o reciprocitě.

6.6 Poznámka ke Kirchhoffovu difrakčnímu integrálu

V předchozích úvahách bylo zdůrazněno, že Kirchhoffovo odvození je rozporné, neboť okrajové podmínky 6.4(2) a 6.4(3) si odporují. Nicméně Kirchhoffův difrakční integrál 6.4(5) a 6.4(6) má tvar matematické formulace Huygensova–Fresnelova principu; není tedy divu, že numerické výpočty difrakčních jevů založené na tomto integrálu dokonale souhlasí s experimentem. Navíc v případě rovinného stínítka je Kirchhoffův difrakční integrál 6.4(5) aritmetickým průměrem difrakčních integrálů 6.5(16) a 6.5(21), korektně odvozených Rayleighovým–Sommerfeldovým způsobem. Smíme tedy s ohledem na tyto skutečnosti doufat, že Kirchhoffův difrakční integrál není bezcenný z matematického hlediska?

Nebudeme se touto otázkou podrobněji zabývat. Uvedeme jen, že F. Kottler [9] ukázal, že Kirchhoffův difrakční integrál je korektním řešením ne sice okrajového problému s Kirchhoffovými okrajovými podmínkami, ale problému, jenž má na ploše S předepsánu nespojitost vlnové funkce a její derivace ve směru normály (saltus problem). To, co Kirchhoff považoval za okrajové hodnoty, vzal Kottler za hodnoty skoku na ploše S. To znamená, že v propustných částech S_0 difrakčního stínítka je

$$\psi_{ext}(M) - \psi_{int}(M) = \psi_0(M), \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{ext} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{int} = \frac{\partial\psi_0}{\partial n}, \quad M \in S_0,$$

kde $\psi_0(M)$ značí stále hodnoty vlnové funkce, které by byly v bodech M, kdyby nebylo nepropustných částí stínítka, a indexy *ext* a *int* značí vnější a vnitřní stranu plochy S vzhledem k oblasti Σ_2. V nepropustných částech difrakčního stínítka je pak předepsáno spojité chování vlnové funkce ψ i derivace $\partial\psi/\partial n$:

$$\psi_{ext}(M) - \psi_{int}(M) = \psi_0(M), \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{ext} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{int} = 0.$$

Podrobnosti viz též v [10].

Reference

[1] Baker B. B., Copson E. T.: *The Mathematical Theory of Huygens' Principle.* 2nd ed. Clarendon Press, Oxford 1950.

[2] Sommerfeld A.: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* **21** (1912), 309-353.

[3] Sommerfeld A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Vorlesungen über theoretische Physik Bd. VI, 4. Aufgabe. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.–G., Leipzig 1958. Anglický překlad prvního vydání: *Partial Differential Equations in Physics.* Akademic Press Inc. Publishers, New York, N.Y. 1949.

[4] Rellich F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* **53** (1943), 57-65.

[5] Vekua I. N.: Ob metagarmoničeskich funkcijach. *Trudy Tbilisskogo matematičeskogo instituta* **12** (1943), 105-174.

[6] Braunbek W., Laukien G.: Einzelheiten zur Halbebenen–Beugung. *Optik* **9** (1952), 174–179.

[7] Rayleigh J. W.: On the Passage of Waves through Apertures in Plane Screens, and Allied Problems. *Philosophical Magazine* **43** (1897), 259–272. Též Scientific Papers, Vol. IV. At the University Press, Cambridge 1903, 283–296.

[8] Sommerfeld A.: *Optik.* Vorlesungen über theoretische Physik Bd. IV, 2. Aufgabe. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.–G., Leipzig 1959. Anglický překlad prvního vydání: *Optics.* Lectures on Theoretical Physics, Vol. IV. Academic Press, New York 1954.

[9] Kottler F.: Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen. *Annalen der Physik* (4) **70** (1923), 405-456.

[10] Kottler F.: Diffraction at a black screen. Part I: Kirchhoff's theory. In: *Progress in Optics,* Volume IV (E. Wolf, ed.) North–Holland Publishing Co., Amsterdam 1965, 281-314.