# 7 Optická difrakce jako přenos lineárním systémem



Přistupme nyní k optické difrakci z hlediska teorie lineárních systémů. (Základní pojmy a vlastnosti lineárních systémů jsou shrnuty v dodatku D.)

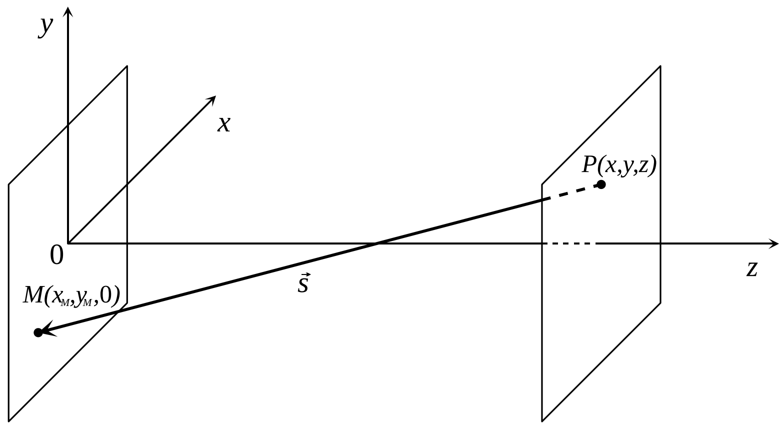
Z fyzikálních důvodů je zřejmé, že na Fresnelovu difrakci v homogenním izotropním prostředí chápanou tak, že jde o nalezení vlnové funkce v rovině rovnoběžné s difrakčním stínítkem, můžeme pohlížet jako na přenos lineárním prostorově invariantním systémem: Vstupní funkcí je známá vlnová funkce v rovině $z = 0$, kterou značíme $\psi(x, y, 0) \equiv \psi_0(x_M, y_M)$, a výstupní funkcí je Fresnelova difrakce $\psi(x, y, z)$ v rovině $z =$ konst. $> 0$. Že jde o přenos lineárním systémem je zřejmé: Lineární kombinaci vstupních funkcí odpovídá táž lineární kombinace příslušných výstupních funkcí. Že jde o přenos prostorově invariantním (izoplanatickým) systémem, je rovněž zřejmé: Posuneme-li vstupní funkci $\psi_0(x_M, y_M)$ v rovině $z = 0$, posune se stejným způsobem Fresnelova difrakce v rovině $z =$ konst. $> 0$.

Také v případě Fraunhoferovy difrakce je vstupní funkcí známá vlnová funkce $\psi_0(x_M, y_M) \equiv \psi(x, y, 0)$, výstupní funkcí je však její Fourierova transformace $A_0(n_x, n_y)$. Fraunhoferovu difrakci v homogenním izotropním prostředí lze jistě považovat za přenos lineárním systémem, nikoliv však systémem prostorově invariantním. Posunutí vstupní funkce $\psi(x, y, 0)$ v rovině $z = 0$ o nějaký vektor $\vec{r}^{\,0}(x^0, y^0)$ má totiž za následek násobení původní výstupní funkce fázorem $\exp[ik(n_x x^0 + n_y y^0)]$ (srov. např. [1], odst. 11.1).

V případě Fresnelovy difrakce má tedy smysl si ujasnit, co je impulsovou odezvou a co přenosovou funkcí. V případě Fraunhoferovy difrakce má smysl mluvit pouze o impulsové odezvě, nikoli však o přenosové funkci, neboť ta je definováná jen pro prostorově invariantní systémy. (Je pozoruhodné, že z hlediska teorie systémů se v tomto smyslu Fraunhoferova difrakce jeví být obecnější než Fresnelova).

## 7.1 Impulsová odezva pro Fresnelovu difrakci

Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál 6.5(13) představuje matematicky rigorózní řešení problému Fresnelovy difrakce: známé vlnové funkci $\psi$ v rovině $z = 0$ přiřazuje vlnovou funkci v rovině $z > 0$ (obr. 1). Označíme-li, jak je naším zvykem, proměnné v rovině $z = 0$ symboly $x_M$, $y_M$ a vlnovou funkci v této rovině symbolem $\psi_0(x_M, y_M) \equiv \psi(x, y, 0)$, uvážíme-li, že $\vec{s}_M = (x_M - x)\vec{\imath} + (y_M - y)\vec{\jmath} - z\vec{k}$ a $\vec{n} = \vec{k}$, je




Obrázek 1: Soustava souřadnic používaná k popisu přenosu vlnové funkce z roviny $z = 0$ do roviny $z =$ konst. $> 0$.

$$\frac{\vec{s}_M}{s_M} \cdot \vec{n} = \frac{-z}{\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2}}$$

a integrál 6.5(13) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \psi(x,y,z) &= -\frac{\mathrm{i}kz}{2\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M) \frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2}\right)}{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + z^2}}\right] \mathrm{d}x_M \,\mathrm{d}y_M. \end{aligned} \tag{1}$$

Tento integrál (1) má zřetelně tvar konvoluce

$$\psi(x,y,z) = \psi_0(x,y) * h_z(x,y), \tag{2}$$

kde

$$h_z(x,y) = -\frac{\mathrm{i}kz}{2\pi} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{x^2 + y^2 + z^2} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right). \tag{3}$$

V terminologii teorie systémů je ovšem difrakční integrál (1) superpozičním integrálem a funkce $h_z$ (3) impulsovou odezvou.

**Poznámka:** Také různá aproximativní vyjádření integrálu (1), jichž jsme používali v kap. 3 a 5, mají tvar konvoluce a jsou superpozičními integrály. Příslušné impulsové odezvy jsou aproximacemi impulsové odezvy (3). Připomeneme tři tato aproximativní vyjádření:

(i) V případě optické difrakce bývá $k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg 1$, takže impulsovou odezvu (3) lze aproximovat výrazem

$$h_z(x,y) \approx -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{4}$$

To odpovídá impulsové odezvě v integrálu 3.2(6) vyjadřujícím Huygensův–Fresnelův princip aplikovaný na náš problém přenosu vlnění z roviny $z = 0$ do roviny $z = \text{konst.} > 0$.

(ii) Položíme-li dále $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \doteq 1$, je impulsová odezva aproximována rozbíhavou kulovou vlnou

$$h_z(x,y) \approx -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{5}$$

což odpovídá impulsové odezvě v integrálu 3.6(1).

(iii) Konečně, použijeme-li Fresnelovy aproximace kulové vlny 1.10(6)

$$\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \approx \frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2 + y^2\right)\right],$$

dostáváme z (5)

$$h_z(x,y) \approx -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi} \frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z} \exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2 + y^2\right)\right] = \mathcal{P}_z(x,y), \tag{6}$$

což odpovídá impulsové odezvě v difrakčním integrálu 2.3(2), jenž byl východiskem při výpočtech konkrétních Fresnelových difrakčních jevů v kapitole 5. Tento tvar impulsové odezvy se v literatuře někdy nazývá Fresnelovým propagátorem $\mathcal{P}_z(x,y)$.

## 7.2 Přenosová funkce pro Fresnelovu difrakci jako Fourierova transformace impulsové odezvy

Zabývejme se nyní otázkou, co je přenosovou funkcí při Fresnelově difrakci. Odpověď na tuto otázku získáme dvěma způsoby. Jednak výpočtem Fourierovy transformace impulsové odezvy 7.1(3) (v další části tohoto odstavce), jednak z Fourierovy transformace vlnové funkce charakterizující Fresnelovu difrakci (v odst. 7.6). Je samozřejmé, že odpověď bude v obou případech stejná.

Počítejme tedy Fourierovu transformaci impulsové odezvy $h_z(x, y)$ 7.1(3). Parametry $A$, $B$ ve Fourierově transformaci (viz dodatek D, resp. [1], odst. 2.1) zvolíme ve tvaru $A = k/2\pi$, $B = 1$. Důvodem pro tuto volbu parametrů $A$, $B$ je, aby Fourierova transformace vlnové funkce představovala amplitudu rozkladu vlnové funkce do rovinných vln (viz odst. 7.3 až 7.5 v dalším textu). Přenosová funkce $H_z(n_x, n_y)$ je definována Fourierovým integrálem

$$H_z(n_x, n_y) = \mathrm{FT}\left\{h_z(x, y)\right\} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} h_z(x, y) \exp\left[-\mathrm{i}k\left(n_x x + n_y y\right)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

kde $n_x$, $n_y$ jsou reálné proměnné nabývající hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$ a $h_z(x, y)$ je impulsovou odezvou ve tvaru 7.1(3). Vzhledem ke komplikovanému tvaru impulsové odezvy lze očekávat, že výpočet integrálu (1) bude poměrně obtížný. Zvolíme tento postup. Využijeme toho, že impulsová odezva $h_z$, a tedy i přenosová funkce $H_z$, je rotačně symetrickou funkcí. Vyjádříme impulsovou odezvu v polárních souřadnicích a Fourierovu transformaci (1) vyjádříme prostřednictvím Hankelovy transformace nultého řádu. Impulsovou odezvu $h_z$ vyjádříme prostřednictvím Hankelovy funkce $H^{(1)}_{3/2}$ a využijeme bohaté zásobnice integrálů Besselových funkcí a integrál (1) vypočteme.

Zavedeme tedy polární souřadnice

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, & n_x &= R\cos\Phi, & r, R &\in \langle 0, \infty), \\ y &= r\sin\varphi, & n_y &= R\sin\Phi, & \varphi, \Phi &\in \langle 0, 2\pi). \end{aligned} \tag{2}$$

Je zřejmé, že impulsová odezva 7.1(3) má v polárních souřadnicích tvar

$$h_z(r) = -\frac{\mathrm{i}kz}{2\pi}\,\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{r^2+z^2}\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k\sqrt{r^2+z^2}}\right). \tag{3}$$

Uvážíme-li, že Hankelovu funkci $H^{(1)}_{3/2}(y)$ lze vyjádřit elementárními funkcemi (viz např. [1], B.7(12))

$$H^{(1)}_{3/2}(y) = -\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\exp(\mathrm{i}y)\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{y}\right),$$

můžeme upravit impulsovou odezvu (3) do tvaru

$$h_z(r) = \frac{\mathrm{i}k^{3/2}\,z}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{H^{(1)}_{3/2}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{3/4}}. \tag{4}$$

Jádro Fourierovy transformace (1) vyjádříme v polárních souřadnicích

$$\exp\left[-\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)\right] = \exp\bigl[-\mathrm{i}kRr\cos(\varphi - \Phi)\bigr],$$

a tím převedeme Fourierův integrál (1) do tvaru

$$H_z(R) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty h_z(r)\, r \int_0^{2\pi} \exp\bigl[-\mathrm{i}kRr\cos(\varphi - \Phi)\bigr]\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r, \tag{5}$$

jenž po použití integrální reprezentace Besselovy funkce

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} \exp\bigl(\pm\mathrm{i}x\cos\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi$$

(srov. [1], B.13(6)) vyjadřuje přenosovou funkci $H_z$ Hankelovou transformací nultého řádu:

$$H_z(R) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^\infty h_z(r)\, J_0(kRr) r\, \mathrm{d}r. \tag{6}$$

Dosadíme-li (4) do (6), dostáváme

$$H_z(R) = \frac{\mathrm{i}k^{7/2}\, z}{2(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{H_{3/2}^{(1)}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{3/4}}\, J_0\big(kRr\big) r\, \mathrm{d}r. \tag{7}$$

Integrál v (7) najdeme v tabulkách. Podle [2], 7.14.2(48) je

$$\int_0^\infty \frac{H_{3/2}^{(1)}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{3/4}}\, J_0\left(kRr\right) r\, \mathrm{d}r = \begin{cases} \dfrac{(1-R^2)^{1/4}}{k\sqrt{z}}\, H_{1/2}^{(1)}\left(kz\sqrt{1-R^2}\right), & \text{když} \quad R < 1, \\[2ex] \dfrac{-2\mathrm{i}(R^2-1)^{1/4}}{\pi k\sqrt{z}}\, K_{1/2}\left(kz\sqrt{R^2-1}\right), & \text{když} \quad R > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Hankelovu funkci $H_{1/2}^{(1)}(y)$ i Macdonaldovu funkci $K_{1/2}(y)$ lze vyjádřit elementárními funkcemi (viz např. [3], 8.469.3 a 8.469.4)

$$H_{1/2}^{(1)}(y) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\, \exp(\mathrm{i}y), \qquad K_{1/2}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, \exp(-y). \tag{9}$$

S použitím (9) je integrál (8) pro všechny hodnoty $R$ vyjádřen funkcí

$$\int_0^\infty \frac{H_{3/2}^{(1)}\left(k\sqrt{r^2+z^2}\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{3/4}}\, J_0\left(kRr\right) r\, \mathrm{d}r = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{1}{k^{3/2}\, z}\, \exp\left(\mathrm{i}kz\sqrt{1-R^2}\right). \tag{10}$$

Dosazením (10) do (7) dostáváme výsledný tvar přenosové funkce

$$H_z(R) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp\left(\mathrm{i}kz\sqrt{1-R^2}\right), \tag{11}$$

tj. v kartézských souřadnicích

$$H_z(n_x, n_y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp\left(\mathrm{i}kz\sqrt{1-n_x^2-n_y^2}\right). \tag{12}$$

Impulsová odezva $h_z(x,y)$ ve tvaru 7.1(3) a přenosová funkce $H_z(n_x,n_y)$ ve tvaru (12) jsou dvojicí funkcí, které spolu souvisejí Fourierovou transformací.

**Poznámka:** Není samozřejmé, a tím je zajímavé, že existují také přibližná vyjádření přenosové funkce $H_z$ a impulsové odezvy $h_z$, která jsou dvojicí funkcí, jež spolu souvisejí Fourierovou transformací. Konkrétně, omezíme-li se na obor $n_x^2 + n_y^2 \ll 1$, můžeme přenosovou funkci (12) aproximovat výrazem

$$H_z(n_x, n_y) \approx \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp(\mathrm{i}kz) \exp\left[-\frac{\mathrm{i}kz}{2}\left(n_x^2+n_y^2\right)\right]. \tag{13}$$

Ukážeme, že toto aproximativní vyjádření je Fourierovou transformací Fresnelova propagátoru 7.1(6). Vzhledem k tomu, že obě funkce jsou rotačně symetrické, bylo by opět možné počítat Fourierův integrál v polárních souřadnicích a s pomocí Besselovy funkce $J_0$. Avšak vzhledem k tomu, že dvojný Fourierův integrál lze v těchto aproximativních výrazech funkcí $H_z$ a $h_z$ faktorizovat, zůstaneme u kartézských souřadnic.

Budeme počítat inverzní Fourierovu transformaci funkce (13), označíme ji

$$g(x,y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp(\mathrm{i}kz) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}kz}{2}\left(n_x^2+n_y^2\right)\right] \exp\left[\mathrm{i}k\big(n_x x + n_y y\big)\right]\, \mathrm{d}n_x\, \mathrm{d}n_y \tag{14}$$

a ukážeme, že platí $g(x,y) = \mathcal{P}_z(x,y)$. Dvojný integrál $I(x,y)$ v (14) lze faktorizovat, $I(x,y) = I_1(x) I_2(y)$, kde

$$I_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}kz}{2}\left(n_x^2 - 2n_x\,\frac{x}{z}\right)\right] \mathrm{d}n_x, \qquad I_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}kz}{2}\left(n_y^2 - 2n_y\,\frac{y}{z}\right)\right] \mathrm{d}n_y.$$

Tyto integrály vypočteme pomocí Fresnelových integrálů (jako vždy, když integrandem je komplexní exponenciální funkce, jejímž argumentem je lineární kombinace první a druhé mocniny integrační proměnné (viz např. 5.1(5))):

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\mathrm{i}kz}{2}\left(n_x - \frac{x}{z}\right)^2\right] \mathrm{d}n_x \,\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2z}\,x^2\right) = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{kz}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2z}\,x^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\,v^2\right)\mathrm{d}v \;= \\
&= (1-\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{kz}}\,\exp\left(\frac{\mathrm{i}k}{2z}\,x^2\right).
\end{aligned}$$

Integrál $I_2(x)$ je obdobný, takže

$$I(x,y) = I_1(x)I_2(y) = -2\mathrm{i}\,\frac{\pi}{kz}\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right].$$

Dosadíme-li tento výraz za integrál v (14), dostáváme

$$g(x,y) = -\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\,\frac{\exp(\mathrm{i}kz)}{z}\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}k}{2z}\left(x^2+y^2\right)\right] = \mathcal{P}_z(x,y) \tag{15}$$

(srov. 7.1(6)), což jsme chtěli v této poznámce ukázat.

* * *

Shrneme v jednom souvětí, co jsme zatím v této kapitole udělali: Interpretací Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu jako superpozičního integrálu jsme nalezli impulsovou odezvu 7.1(3) a její Fourierovou transformací jsme vypočetli přenosovou funkci 7.2(12) pro Fresnelovu difrakci. Nyní budeme postupovat v jistém smyslu opačně. Touž přenosovou funkci odvodíme nezávisle na výsledcích odst. 7.2, a to podílem Fourierových transformací výstupní a vstupní vlnové funkce (odst. 7.6). Inverzní Fourierovou transformací takto získané přenosové funkce je ovšem impulsová odezva 7.1(3), takže inverzní Fourierovu transformaci ani nemusíme počítat. Tento postup představuje nové a nezávislé odvození Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu 6.5(13), tj. 7.1(1). Kromě toho dává nový pohled na vlnovou funkci jako superpozici rovinných a evanescentních vln a na Fraunhoferovu difrakci (odst. 7.4 a 7.5).

## 7.3 Fourierovský rozklad vlnové funkce a její úhlové spektrum

Vyjádříme vlnovou funkci $\psi(x,y,z)$ představující Fresnelovu difrakci v rovině $z =$ konst. $\geq 0$ Fourierovým integrálem, a to poněkud zvláštním způsobem. Nikoli trojným integrálem, jak by se mohlo očekávat u funkce tří proměnných, ale pouze dvojným: V každé rovině $z =$ konst. lze považovat vlnovou funkci $\psi(x,y,z)$ za funkci dvou proměnných $x,y$ a tuto funkci vyjádřit dvojným Fourierovým integrálem

$$\psi(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(n_x,n_y;z)\exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)]\,\mathrm{d}n_x\,\mathrm{d}n_y. \tag{1}$$

V tomto integrálu jsou $n_x$, $n_y$ fourierovské proměnné, jejichž povahu nemusíme nyní specifikovat. (V teorii difrakce bývá $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, takže nepřekvapí, když se ukáže, že $n_x$ a $n_y$ souvisejí se směrovými kosiny.) Integrál (1) má tvar inverzní Fourierovy transformace. Funkce $A(n_x,n_y;z)$ je tedy Fourierovou transformací vlnové funkce $\psi$:

$$A(n_x, n_y; z) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y, z) \exp[-\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \tag{2}$$

Funkce $A(n_x, n_y; z)$ se – nepříliš výstižně – nazývá úhlové spektrum funkce $\psi(x, y, z)$ (viz např. [4], § 3.7, [5], § 3.10).

Usilujeme o alternativní odvození difrakčního integrálu. Vztahy (1) a (2) jsou zatím formální, neboť funkci $\psi(x, y, z)$ pro $z > 0$ dosud neznáme, a neznáme tedy ani explicitní výraz pro její úhlové spektrum $A(n_x, n_y; z)$. Funkci $\psi$ však známe v rovině $z = 0$, kde ji značíme $\psi(x, y, 0) \equiv \psi_0(x_M, y_M)$. Dosadíme-li ji do rovnice (2), dostaneme její úhlové spektrum $A_0(n_x, n_y) \equiv A(n_x, n_y; 0)$:

$$A(n_x, n_y; 0) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M, y_M) \exp[-\mathrm{i}k(n_x x_M + n_y y_M)] \, \mathrm{d}x_M \, \mathrm{d}y_M. \tag{3}$$

Nalezneme-li explicitní tvar úhlového spektra (2) pro $z > 0$, získáme podílem

$$\frac{A(n_x, n_y; z)}{A(n_x, n_y; 0)} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 H_z(n_x, n_y)$$

přenosovou funkci $H_z(n_x, n_y)$ pro Fresnelovu difrakci (srov. D.3(7)). Inverzní Fourierovou transformací přenosové funkce $H_z(n_x, n_y)$ pak můžeme vypočítat impulsovou odezvu $h_z(x, y)$ a konvolucí vstupní funkce $\psi_0(x_M, y_M)$ a impulsové odezvy $h_z(x, y)$ pak můžeme získat nezávisle odvozený difrakční integrál. Nebudeme to však muset dělat, neboť uvidíme v odst. 7.5, že takto nezávisle odvozená přenosová funkce $H_z(n_x, n_y)$ má tvar 7.2(12), takže impulsová odezva $h_z(x, y)$ má tvar 7.1(3).

Hledejme tedy explicitní tvar funkce $A(n_x, n_y; z)$ pro všechna $z \geq 0$ ([4], § 3.7, [5], § 3.10.2). V poloprostoru $z \geq 0$ nejsou žádné zdroje vlnění, takže funkce $\psi(x, y, z)$ vyhovuje Helmholtzově rovnici 1.7(7). Dosadíme tedy integrál (1) do Helmholtzovy rovnice. Za tím účelem vypočteme derivace integrálu (1)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} n_x^2 A(n_x, n_y; z) \exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)] \, \mathrm{d}n_x \, \mathrm{d}n_y, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -k^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} n_y^2 A(n_x, n_y; z) \exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)] \, \mathrm{d}n_x \, \mathrm{d}n_x, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(n_x, n_y; z)}{\partial z^2} \exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)] \, \mathrm{d}n_x \, \mathrm{d}n_y \tag{6}$$

a dosadíme je do Helmholtzovy rovnice $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$. Zaměníme pořadí sčítání a integrace a dostaneme

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[k^2 \left(1 - n_x^2 - n_y^2\right) A(n_x, n_y; z) + \frac{\partial^2 A(n_x, n_y, z)}{\partial z^2}\right] \exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)] \, \mathrm{d}n_x \, \mathrm{d}n_y = 0. \tag{7}$$

Rovnice (7) platí pro všechny body $x, y, z \geq 0$. Musí tedy být

$$\frac{\partial^2 A(n_x, n_y, z)}{\partial z^2} + k^2 \left(1 - n_x^2 - n_y^2\right) A(n_x, n_y, z) = 0. \tag{8}$$

To je obyčejná lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Její řešení splňující okrajovou podmínku (3) je

$$A(n_x, n_y; z) = A(n_x, n_y; 0) \exp\left(\mathrm{i}kz\sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}\right). \tag{9}$$

Toto je velmi důležitý výsledek, jejž využijeme v odst. 7.6 k alternativnímu, tj. nezávislému na odst. 7.2, nalezení přenosové funkce popisující šíření vlny homogenním izotropním prostředím.

Dosadíme-li pravou stranu výrazu (9) do integrálu (1), dostaneme vlnovou funkci v obecné rovině $z = \text{konst.} \geq 0$ ve tvaru

$$\psi(x,y,z) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A(n_x,n_y;0) \exp\left[\mathrm{i}k\left(n_x x + n_y y + z\sqrt{1-n_x^2-n_y^2}\right)\right] \mathrm{d}n_x\,\mathrm{d}n_y. \tag{10}$$

Věnujme se nyní interpretaci tohoto výrazu. Je zřejmé, že pokud je $n_x^2 + n_y^2 \leq 1$, představuje fázor

$$\exp\left[\mathrm{i}k\left(n_x x + n_y y + z\sqrt{1-n_x^2-n_y^2}\right)\right] \tag{11}$$

rovinnou vlnu šířící se ve směru $\vec{n}(n_x, n_y, \sqrt{1-n_x^2-n_y^2})$. Je-li však $n_x^2 + n_y^2 > 1$, upravíme výraz (11) do tvaru

$$\exp\left(-kz\sqrt{n_x^2+n_y^2-1}\right)\exp[\mathrm{i}k(n_x x + n_y y)]. \tag{12}$$

Tento výraz představuje rovněž vlnu, neboť je řešením Helmholtzovy rovnice $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$, nikoli však rovinnou vlnu. Plochy konstantní amplitudy jsou roviny $z =$ konst. a amplituda vlny (12) exponenciálně klesá s rostoucí vzdáleností $z$ od difrakčního stínítka v rovině $z = 0$. (Už při $n_x^2 + n_y^2 = 1,01$ se ve vzdálenosti $z = 10\lambda$ zmenší modul $\exp\left(-kz\sqrt{n_x^2+n_y^2-1}\right)$ vlny (12) na $2 \cdot 10^{-3}$ jeho hodnoty při $z = 0$.) Plochy konstantní fáze jsou roviny $k(n_x x + n_y y) =$ konst., tj.

$$y = -\frac{n_x}{n_y}x + \frac{\text{konst.}}{kn_y},$$

tedy roviny s normálou $\vec{N}(n_x/\sqrt{n_x^2+n_y^2}, n_y/\sqrt{n_x^2+n_y^2}, 0)$. Výraz (12) je nehomogenní vlnou, neboť plochy konstantní amplitudy nejsou totožné s plochami konstantní fáze (jsou na sebe kolmé). Vzhledem k exponenciálnímu poklesu amplitudy v závislosti na souřadnici $z$ nazývají se vlny (12) evanescentními vlnami (z latinského **evanescere** vymizet, zaniknout). O evanescentních vlnách pojednává stať [6] a monografie [7].

## 7.4 Difrakční integrál a impulsová odezva pro Fraunhoferovu difrakci

Úhlové spektrum $A_0(n_x, n_y)$ 7.3(3) vstupní funkce $\psi_0(x_M, y_M)$

$$A_0(n_x,n_y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x_M,y_M)\exp[-\mathrm{i}k(n_x x_M + n_y y_M)]\,\mathrm{d}x_M\,\mathrm{d}y_M. \tag{1}$$

představuje tedy amplitudy rovinných a evanescentních vln, do nichž lze vstupní funkci $\psi_0$ rozložit. Inverzní Fourierova transformace k (1),

$$\psi_0(x_M,y_M) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} A_0(n_x,n_y)\exp\left[\mathrm{i}k(n_x x_M + n_y y_M)\right]\,\mathrm{d}n_x\,\mathrm{d}n_y, \tag{2}$$

je pak vyjádřením vstupní funkce superpozicí rovinných a evanescentních vln.

Připomeneme-li si fyzikální definici Fraunhoferovy difrakce jako směrového rozložení difraktovaného vlnění (srov. odst 2.2) a nebereme-li v úvahu evanescentní vlny, zanikající v nepatrné vzdálenosti za difrakčním stínítkem, je zřejmé, že integrál (1) je difrakčním integrálem pro Fraunhoferovu difrakci. Je pozoruhodné, jak jednoduše jsme tento difrakční integrál získali: Právě jen Fourierovou transformací vstupní vlnové funkce $\psi_0(x_M, y_M)$. Naproti tomu získat tento výsledek z Huygensova–Fresnelova principu bylo dosti pracné a vyžadovalo použití problematické aproximace (srov. odst. 3.5).

Pro mezní případ Fraunhoferovy difrakce — nerušené šíření vlnění, kdy funkce $\psi_0(x_M, y_M) = 1$, – dává integrál (1) očekávaný výsledek:

$$A_0(n_x,n_y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}k(n_x x_M + n_y y_M)\right]\,\mathrm{d}x_M\,\mathrm{d}y_M = \delta(n_x)\,\delta(n_y). \tag{3}$$

Tj. vlnění postupuje v primárním směru $\vec{n}(0,0,1)$.

Pohlížíme-li na integrál (1) jako na superpoziční integrál D.2(2) lineárního systému, je funkce

$$h(n_x, n_y; x_M, y_M) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp\left[-\mathrm{i}k(n_x x_M + n_y y_M)\right] \tag{4}$$

impulsovou odezvou D.2(1) pro Fraunhoferovu difrakci.

## 7.5 Fresnelova difrakce vyjádřená superpozicí rovinných vln

Integrál 7.3(10) vyjadřuje vlnovou funkci $\psi(x, y, z)$ charakterizující Fresnelovu difrakci jako superpozici rovinných a evanescentních vln, z nichž každá je tvaru

$$A_0(n_x, n_y) \exp\left[\mathrm{i}k\left(n_x x + n_y y + z\sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}\right)\right]. \tag{1}$$

Amplituda těchto vln $A_0(n_x, n_y)$ — jsouc Fourierovou transformací 7.3(3) vstupní (aperturní) funkce $\psi_0(x_M, y_M)$ — nezávisí ovšem na $z$. Takže rozmanité difrakční obrazce pozorované v různých rovinách $z =$ konst. $> 0$ se vytvářejí součtem 7.3(10) týchž rovinných a evanescentních vln (1). Jak bylo řečeno, evanescentní vlny zanikají již ve vzdálenosti několika vlnových délek od vstupní roviny. Můžeme proto považovat integrál 7.3(10) za superpozici rovinných vln.

## 7.6 Přenosová funkce pro Fresnelovu difrakci získaná z podílu úhlového spektra výstupní a vstupní vlnové funkce

Přenosová funkce lineárního prostorově invariantního systému je úměrná podílu Fourierových transformací výstupní a vstupní funkce (viz dodatek D.3(7)). Fourierovský rozklad vlnové funkce, jenž nás přivedl ke vztahu 7.3(9), tak nezávisel na výsledcích odst. 7.2, a tedy nezávisel na teorii Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu, dává výraz pro přenosovou funkci

$$H_z(n_x, n_y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \frac{A(n_x, n_y; z)}{A(n_y, n_y; 0)} = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^2 \exp\left(\mathrm{i}kz\sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2}\right). \tag{1}$$

Tento výsledek — možná nepříliš podstatný pro výpočty konkrétních difrakčních jevů — je pro nás pozoruhodný tím, že představuje rigorózní odvození Rayleighova–Sommerfeldova difrakčního integrálu 6.5(13), alternativní k odvození v odst. 6.5. Inverzní Fourierova transformace přenosové funkce (1) je totiž impulsová odezva 7.1(3), a tím se dostává Rayleighův–Sommerfeldův difrakční integrál 7.1(1), tj. 6.5(13).

Inverzní Fourierovu transformaci přenosové funkce (1) není ovšem vůbec třeba počítat. Výsledek totiž známe. V odst. 7.2 jsme vypočetli, že přenosová funkce (1) (tj. 7.3(9)) je Fourierovou transformací impulsové odezvy 7.1(3). Je tudíž samozřejmé, že inverzní Fourierovou transformací přenosové funkce (1) je impulsová odezva 7.1(3).

**Poznámka:** Konkrétní tvar Fourierovy transformace nějaké funkce závisí na volbě konstant $A$, $B$, $k$ v definici Fourierovy transformace. Tak je tomu i s přenosovou funkcí. Výraz 7.2(12), tj. (1), platí pro volbu $A = k/2\pi$, $B = 1$, $k = 2\pi/\lambda$, v níž fourierovské proměnné $n_x$, $n_y$ představují směrové kosiny. Pracujeme-li s prostorovými frekvencemi $X_f = n_x/\lambda$, $Y_f = n_y/\lambda$, volíme konstanty $A = 1$, $B = 1$, $k = 2\pi$ a přenosová funkce pro Fresnelovu difrakci má tvar

$$H_z(X_f, Y_f) = \exp\left[\mathrm{i}2\pi \frac{z}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\lambda X_f\right)^2 - \left(\lambda Y_f\right)^2}\right], \tag{2}$$

ve shodě s D.3($7_f$).

# Reference

[1] Komrska J.: *Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze.* VUTIUM, Brno 2001.

[2] Bateman H., Erdélyi A.: *Higher Transcendental Functions.* Volume 2. McGraw–Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London 1953.

[3] Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.: *Table of Integrals, Series, and Products.* 5th Edition. Academic Press, San Diego 1994.

[4] Goodman J. W.: *Introduction to Fourier Optics.* McGraw–Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London 1968.

[5] Goodman J. W.: *Introduction to Fourier Optics.* Second Edition. McGraw–Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London 1996.

[6] Bryngdahl O.: *Evanescent Waves in Optical Imaging.* In Progress in Optics XI. (E. Wolf, ed.), North–Holland Publ. Co., Amsterdam 1973, 167–221.

[7] Fornel F. de: *Evanescent Waves. From Newtonian Optics to Atomic Optics.* Springer, Berlin 2001.