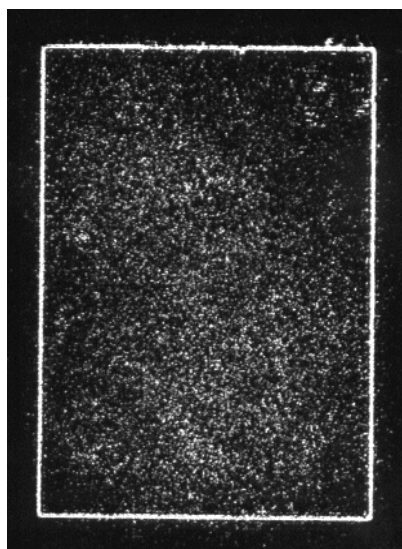


8 Rubinowiczovo vyjádření okrajové vlny

- 8.1 Okrajová vlna a Kirchhoffův difrakční integrál
- 8.2 Převedení plošného integrálu po S' na křivkový integrál po okraji Γ otvoru S_0 ve stínítku
- 8.3 Vlastnosti Rubinowiczova vyjádření okrajové vlny
- 8.4 Poznámka k Youngovu a Fresnelovu pojetí difrakce
- 8.5 Poznámka o okrajové vlně ve Fraunhoferově difrakci

Pozoruhodností, na kterou je vhodné upozornit, je existence tzv. okrajové vlny. Abychom si na ni mohli vytvořit vlastní názor, provedme poměrně jednoduché pozorování: Nechme opět — jako na obr. 2.4 — dopadat světlo z nějakého malého zdroje P_0 na nepropustné stínítko μ s otvorem. Snažme se však o to, aby dopadající svazek světla byl dobře vymezen, tj. aby otvorem neprocházelo světlo z jiných zdrojů nebo světlo odražené od předmětů před stínítkem (např. od stěn laboratoře). Pozorujme nyní otvor z nějakého místa v oblasti geometrického stínu za stínítkem. Naši pozornosti nemůže ujít, že okraj otvoru jasně září. Z obr. 1 vidíme, že nezáří plocha otvoru (jak bychom mohli očekávat podle Huygensova principu), ale právě jen okraj otvoru. Pozorujeme tedy jakousi sekundární vlnu, která vychází z okraje otvoru ve stínítku, dopadá-li na stínítko nějaká primární vlna (v našem případě vlna vycházející ze zdroje P_0).



Obrázek 1: Zářící okraj otvoru v nepropustném stínítku pozorovaný z místa v geometrickém stínu svědčí o existenci okrajové vlny.

Toto pozorování udivuje snad každého, kdo je provádí poprvé, a zářící okraj překvapuje pozorovatele každého věku a každé fyzikální erudice. Údiv je pochopitelný především proto, že každodenní skutečnost nás na okrajovou vlnu nijak neupozorňuje. Pozorujeme-li na půdě otvor ve střeše, jímž do šera půdy proniká proužek slunečního světla, připadá nám, že září celý otvor, a to i když pozorujeme z místa v geometrickém stínu, tj. mimo svazek slunečního světla. Je to ovšem tím, že otvorem vidíme zářící oblohu, tj. sluneční světlo rozptýlené atmosférou. Podobně, když se večer díváme zvenku na okno osvětlené místnosti, vidíme, že září celá jeho plocha. Je tomu tak, i když je okno otevřené, takže se světlo nerozptyluje na skle nebo na zácloně a i když nevidíme lampu osvětlující místnost. Je samozřejmé, že okrajová vlna je v tomto případě přezářena světlem odraženým od stěn místnosti. Údiv nad existencí okrajové vlny je způsoben také tím, že představa okrajové vlny jaksi odporuje tomu, co slyšíme ve školách: Podle Huygensova principu mají přece sekundární vlny vycházet ze všech bodů, do nichž dospěl světelný rozruch, takže by měla zářit celá plocha otvoru v difrakčním stínítku a nemělo by být důvodu k úvahám o okrajové vlně.

Při difrakčních experimentech prováděných v laboratorních podmínkách však okrajovou vlnu nelze přehlédnout. Proto není divu, že první snahy o interpretaci difrakčních jevů byly založeny na úvahách o okrajové vlně. Thomas Young se již roku 1801 snažil interpretovat ohybový jev $\psi(P)$ jako interferenci

dvou vln: tzv. geometrické vlny $\psi^{(g)}(P)$, jež vychází ze zdroje a je vymezena otvorem ve stínítku podle pravidel geometrické optiky, a tzv. okrajové vlny $\psi^{(b)}(P)$, jež vychází z okraje překážky a již Young matematicky nespécifikoval. Pro difrakční jevy na prázdných otvorech v nepropustném stínítku odvodil výraz pro okrajovou vlnu $\psi^{(b)}$ teprve Rubinowicz v r. 1917 [1]. Odvodíme zde okrajovou vlnu ve tvaru, který uvádí Rubinowicz v pozdější práci [2] z r. 1953. Toto odvození je věcně totožné s Rubinowiczovým původním odvozením, je však matematicky přehlednější (viz též [3], str. 76–81). Uvidíme, že není jednoduché výsledky fyzikálně interpretovat. Okrajová vlna je vyjádřena jednoduchým (křivkovým) integrálem, což může být přednost, jsme-li nuceni integrovat numericky. Jeho integrand je však poměrně komplikovaný (viz 8.2(6) až (8) v dalším textu), takže nebylo možné jej sestavit heuristicky.

Z historických i praktických důvodů používáme také v této kapitole pojmu vlna v poněkud volnějším fyzikálním smyslu, tj. nepožadujeme, aby příslušný výraz byl přesným řešením vlnové (Helmholtzovy) rovnice.

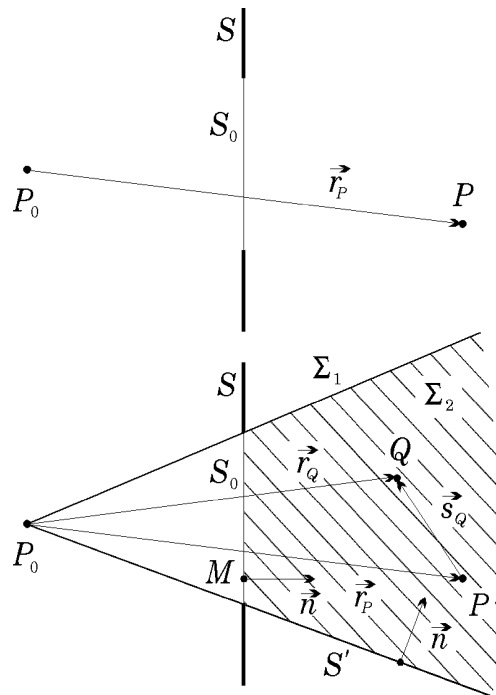
8.1 Okrajová vlna a Kirchhoffův difrakční integrál

Podle Youngova pojetí je vlnová funkce $\psi(P)$ charakterizující difrakční jev dána součtem

$$\psi(P) = \psi^{(g)}(P) + \psi^{(b)}(P). \quad (1)$$

Východiskem při Rubinowiczově odvození výrazu pro okrajovou vlnu $\psi^{(b)}$ je Helmholtzova integrální věta 6.3 iii). Uvidíme v dalším (viz rov. (3)), že povede na rovnici tvořenou třemi aditivními členy. V jednom z nich poznáme geometrickou vlnu $\psi^{(g)}$, ve druhém vlnovou funkci ψ charakterizující difrakční jev, takže třetímu výrazu nezbude než být okrajovou vlnou. Tento výraz pro okrajovou vlnu je plošným integrálem. Převést tento integrál na křivkový po okraji otvoru bude úkolem odst. 8.2.

Představme si, že vlnění vychází z bodového zdroje P_0 a prochází otvorem S_0 v nepropustném difrakčním stínítku S (obr. 2). (Stínítko S nemusí být rovinné a okraj Γ otvoru S_0 nemusí být rovinnou křivkou.) Chceme vyjádřit vlnovou funkci v bodě P za difrakčním stínítkem ve vzdálenosti r_P od zdroje P_0 , $\vec{r}_P = P_0\vec{P}$.



Obrázek 2: Vymezení poloprostoru Σ_2 , v němž jsou splněny podmínky Helmholtzovy integrální věty 6.3 iii).

Geometrická vlna je v bodech, jež jsou vně geometrického stínu, totožná s vlnou, jež by byla v témž místě, kdyby žádného stínítka nebylo, a v bodech, jež jsou v geometrickém stínu, je nulová. Tedy

$$\psi^{(g)}(P) = \frac{\exp(ikr_P)}{r_P}, \quad \text{když } P \text{ je vně geometrického stínu,}$$

$$\psi^{(g)}(P) = 0, \quad \text{když } P \text{ je v geometrickém stínu.}$$

Na hranici geometrického stínu má geometrická vlna konečnou nespojitost a nebývá zvykem definovat její hodnotu. Nic však nebrání tomu, abychom v regulárních bodech hranice geometrického stínu definovali $\psi^{(g)}(P) = \exp(ikr_P)/2r_P$. Nespojitost geometrické vlny je pak obdobná nespojitosti funkce $I(P)$ resp. $H(P)$ v integrální resp. Helmholtzově integrální větě v odst. 6.2 a 6.3.

Aplikujeme tedy Helmholtzovu integrální větu na plochu $S_0 \cup S'$, přičemž S' je hranicí geometrického stínu (viz obr. 2), a na funkci $\psi(Q) = \exp(ikr_Q)/r_Q$, jež splňuje podmínky Helmholtzovy integrální věty 6.3 iii) v poloprostoru Σ_2 . Pak v bodech P za difrakčním stínítkem S je $H(P) = 4\pi\psi^{(g)}(P)$ a Helmholtzova integrální věta má tvar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \left\{ \frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(iks_M)}{s_M} \right] - \frac{\exp(iks_M)}{s_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \right] \right\} \cdot \vec{n} \, dS_0 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left\{ \frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(iks_M)}{s_M} \right] - \frac{\exp(iks_M)}{s_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \right] \right\} \cdot \vec{n} \, dS' = \\ & = \psi^{(g)}(P). \end{aligned} \quad (3)$$

První integrál je totožný s Kirchhoffovým difrakčním integrálem 6.4(4), a je tedy vlnovou funkcí $\psi(P)$. (Touto interpretací zavádíme do odvozování výrazu pro okrajovou vlnu matematicky rozporné Kirchhoffovy okrajové podmínky 6.4(2), 6.4(3).) Z porovnání rovnic (1), (3) pak vyplývá, že druhý integrál v (3) je až na znaménko okrajovou vlnou

$$\psi^{(b)}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'} \left\{ \frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(iks_M)}{s_M} \right] - \frac{\exp(iks_M)}{s_M} \nabla_M \left[\frac{\exp(ikr_M)}{r_M} \right] \right\} \cdot \vec{n} \, dS'. \quad (4)$$

Uvážíme-li, že v bodech M plochy S' je $\vec{r}_M \perp \vec{n}$, nahlédneme, že skalární součin druhého sčítance ve složené závorce integrandu (4) s normálou \vec{n} je roven nule, takže

$$\psi^{(b)}(P) = -\frac{ik}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{r_M s_M} \left(1 + \frac{i}{ks_M} \right) \frac{\vec{s}_M}{s_M} \cdot \vec{n} \, dS'. \quad (5)$$

Okrajová vlna je vyjádřena plošným integrálem po nekonečné ploše S' . Abychom dosáhli vyjádření odpovídajícího Youngovu pojetí difrakce, musíme tento integrál převést na integrál po okraji otvoru ve stínítku.

8.2 Převedení plošného integrálu po S' na křivkový integrál po okraji Γ otvoru S_0 ve stínítku

Křivku Γ tvořící okraj otvoru S_0 ve stínítku orientujeme proti směru hodinových ručiček při pohledu proti postupujícímu vlnění.

a) Vyjádření plošného elementu $\vec{n} \, dS'$.

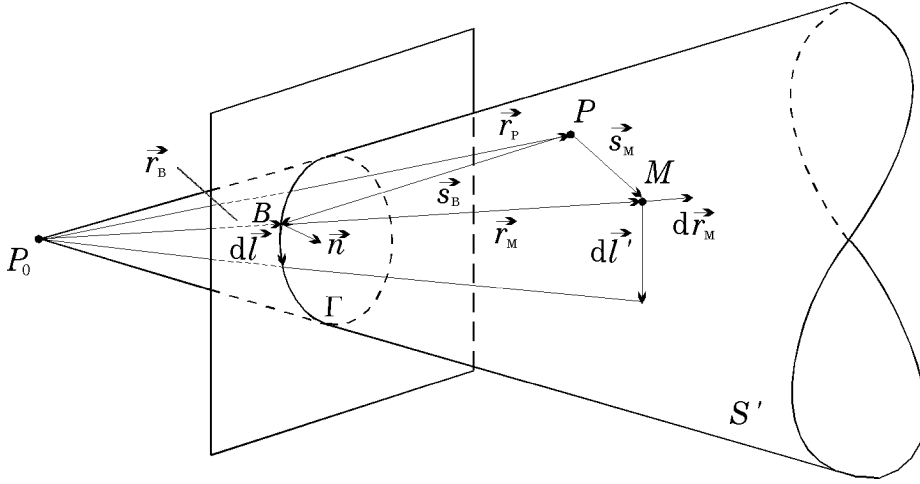
Osnačme písmenem B společný bod vektoru $\vec{r}_M = P_0\vec{M}$ a okraje Γ otvoru S_0 (viz obr. 3). Z bodu M vedeme vektor $d\vec{l}'$ rovnoběžný s vektorem $d\vec{l}$ vycházejícím z bodu B o velikosti $d\vec{l}' = (r_M/r_B)d\vec{l}$. Napíšeme-li vektor $d\vec{r}_M$ ve tvaru $d\vec{r}_M = dr_M \vec{r}_B/r_B$, kde $\vec{r}_B = P_0\vec{B}$, dostaneme

$$\vec{n} \, dS' = d\vec{r}_M \times d\vec{l}' = (\vec{r}_B \times d\vec{l}) \frac{r_M}{r_B^2} dr_M. \quad (1)$$

b) Výpočet součinu $\vec{s}_M \cdot \vec{n} \, dS'$.

Vektor \vec{s}_M vyjádříme ve tvaru součtu $\vec{s}_M = \vec{s}_B + \vec{r}_M - \vec{r}_B$ (viz obr. 3). S použitím (1) pak dostáváme

$$\vec{s}_M \cdot \vec{n} \, dS' = (\vec{s}_B + \vec{r}_M - \vec{r}_B) \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l}) \frac{r_M}{r_B^2} dr_M = \vec{s}_B \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l}) \frac{r_M}{r_B^2} dr_M. \quad (2)$$



Obrázek 3: K vyjádření okrajové vlny $\psi^{(b)}$ křivkovým integrálem po okraji Γ otvoru S_0 ve stínítku.

c) Úprava integrálu 8.1(5).

Výraz (2) dosadíme do integrálu 8.1(5) a integrál upravíme:

$$\begin{aligned}\psi^{(b)}(P) &= -\frac{ik}{4\pi} \iint_{S'} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{r_B^2 s_M^2} \left(1 + \frac{i}{ks_M}\right) \vec{s}_B \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l}') dr_M = \\ &= -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{r_B}^{\infty} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M^2} \left(1 + \frac{i}{ks_M}\right) dr_M \frac{\vec{s}_B \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l}')}{r_B^2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Integrand vnitřního integrálu (podle r_M) závisí na poloze bodu M na ploše S' (a ovšem i na poloze bodu P , v němž počítáme okrajovou vlnu). Dolní mez integrálu závisí na poloze bodu B na křivce Γ . Vnitřní integrál jako celek pak ovšem nezávisí na poloze bodu M na ploše S' a je funkcí pouze polohy bodu B na křivce Γ a polohy bodu P . Je však třeba jej vypočítat.

d) Výpočet integrálu $ik \int_{r_B}^{\infty} \left\{ \exp[ik(r_M + s_M)] \left[1 + i/(ks_M)\right] / s_M^2 \right\} dr_M$.

Výpočet tohoto integrálu je svízelná záležitost. U snadníme si jej tím, že „uhodneme“ primitivní funkci integrandu. Dokážeme, že platí

$$ik \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M^2} \left(1 + \frac{i}{ks_M}\right) = \frac{d}{dr_M} \left\{ \frac{r_M}{s_M} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M} \right\}.\quad (4)$$

Abychom toto tvrzení dokázali, uvedeme ještě dva pomocné vztahy. Především je z obr. 3 zřejmé, že $\vec{r}_P = \vec{r}_M - \vec{s}_M$, takže $r_P^2 = r_M^2 + s_M^2 - 2\vec{r}_M \cdot \vec{s}_M = (r_M + s_M)^2 - 2(r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M)$. Z toho vyplývá, že

$$2(r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M) = (r_M + s_M)^2 - r_P^2.$$

Dále je zřejmé, že

$$\frac{ds_M}{dr_M} = \nabla_{s_M} \cdot \frac{\vec{r}_M}{r_M} = \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{s}_M}{r_M s_M}.$$

A nyní

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr_M} \left\{ \frac{r_M}{s_M} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M} \right\} = \frac{d}{dr_M} \left\{ \frac{2r_M}{s_M} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{(r_M + s_M)^2 - r_P^2} \right\} = \\ &= \frac{2}{s_M} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{(r_M + s_M)^2 - r_P^2} - \frac{2r_M}{s_M^2} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{(r_M + s_M)^2 - r_P^2} \frac{ds_M}{dr_M} + \\ &+ \frac{2r_M}{s_M} \frac{ik(1 + ds_M/dr_M) \exp[ik(r_M + s_M)]}{(r_M + s_M)^2 - r_P^2} - \frac{2r_M}{s_M} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{[(r_M + s_M)^2 - r_P^2]^2} 2(r_M + s_M) \left(1 + \frac{ds_M}{dr_M}\right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M [(r_M + s_M)^2 - r_p^2]} \left\{ 1 - \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{s}_M}{s_M^2} + \frac{ik}{s_M} (r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M) - \frac{2(r_M + s_M)(r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M)}{s_M [(r_M + s_M)^2 - r_p^2]} \right\} = \\
&= \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M (r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M)} \left[1 - \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{s}_M}{s_M^2} + \frac{ik}{s_M} (r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M) - \frac{r_M}{s_M} - 1 \right] = \\
&= ik \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M^2} \left(1 + \frac{i}{ks_M} \right), \quad \text{q. e. d.}
\end{aligned}$$

S použitím (4) vypočteme

$$\begin{aligned}
ik \int_{r_B}^{\infty} \frac{\exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M^2} \left(1 + \frac{i}{ks_M} \right) dr_M &= \left[\frac{r_M \exp[ik(r_M + s_M)]}{s_M (r_M s_M + \vec{r}_M \cdot \vec{s}_M)} \right]_{r_M=r_B}^{r_M=\infty} = \\
&= \frac{r_B}{s_B} \frac{\exp[ik(r_B + s_B)]}{r_B s_B + \vec{r}_B \cdot \vec{s}_B}, \tag{5}
\end{aligned}$$

neboť když $r_M \rightarrow \infty$, také $s_M \rightarrow \infty$.

e) Výsledný výraz pro okrajovou vlnu.

Dosadíme-li z (5) do (3), dostaneme výsledný tvar matematického vyjádření okrajové vlny

$$\psi^{(b)}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\exp[ik(r_B + s_B)]}{r_B s_B} \frac{\vec{s}_B \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l})}{r_B s_B + \vec{r}_B \cdot \vec{s}_B}. \tag{6}$$

Využijeme-li vlastnosti vnějšího součinu vektorů, dostaneme okrajovou vlnu ve tvaru uváděném Rubinowiczem v práci z roku 1953 (viz [2], str. 226):

$$\psi^{(b)}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\exp[ik(r_B + s_B)]}{r_B s_B} \frac{(\vec{s}_B \times \vec{r}_B) \cdot d\vec{l}}{r_B s_B + \vec{r}_B \cdot \vec{s}_B}. \tag{7}$$

Použijeme-li vztahů

$$\begin{aligned}
\vec{r}_B \times d\vec{l} &= \vec{n} r_B \sin(\vec{r}_B, d\vec{l}) dl, \\
\vec{s}_B \cdot (\vec{r}_B \times d\vec{l}) &= r_B s_B \cos(\vec{n}, \vec{s}_B) \sin(\vec{r}_B, d\vec{l}) dl, \\
r_B s_B + \vec{r}_B \cdot \vec{s}_B &= r_B s_B [1 + \cos(\vec{r}_B, \vec{s}_B)],
\end{aligned}$$

dostaneme z (6) vyjádření okrajové vlny v původním Rubinowiczově tvaru z roku 1917 (viz [1], str. 262):

$$\psi^{(b)}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\exp[ik(r_B + s_B)]}{r_B s_B} \frac{\cos(\vec{n}, \vec{s}_B)}{1 + \cos(\vec{r}_B, \vec{s}_B)} \sin(\vec{r}_B, d\vec{l}) dl. \tag{8}$$

(Je dobře si uvědomit, že \vec{n} je normála k ploše S' představující hranici geometrického stínu; \vec{n} nemusí být hlavní normálou křivky Γ , jež nemusí být rovinnou křivkou.)

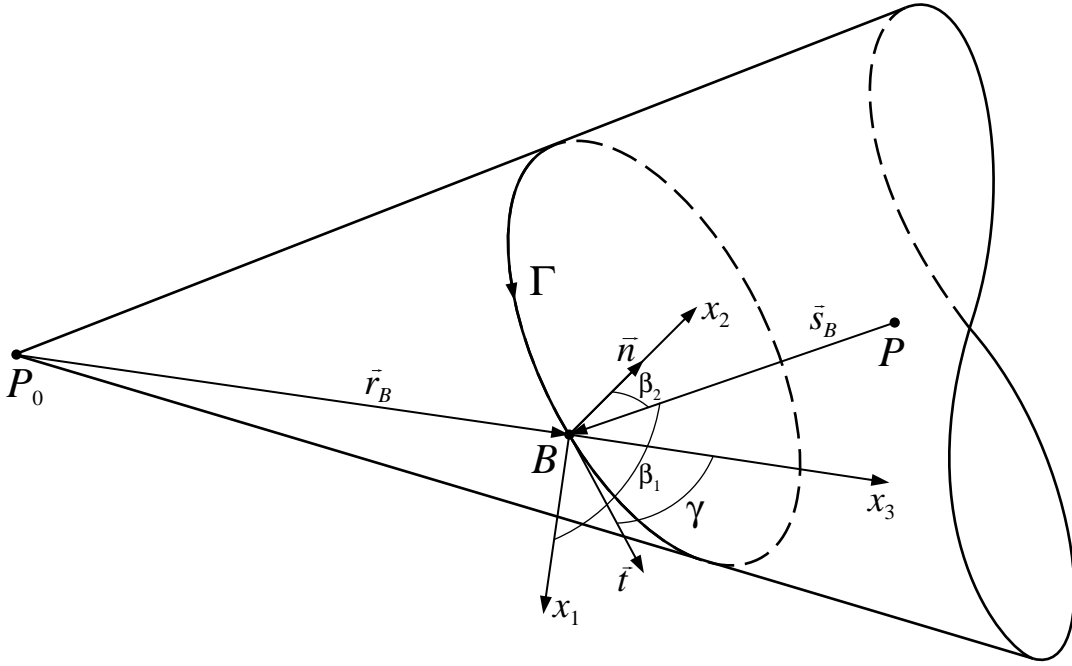
Výraz (6) resp. (7),(8) je Rubinowiczovo vyjádření okrajové vlny; zdůrazněme však, že difrakční jev jako celek je charakterizován vlnovou funkcí $\psi(P)$ počítanou podle 8.1(1) s významem symbolů 8.1(2) a (6) resp. (7),(8).

8.3 Vlastnosti Rubinowiczova vyjádření okrajové vlny

Interpretovat Rubinowiczovo vyjádření okrajové vlny je zřejmě mnohem obtížnější než interpretovat Fresnelův–Kirchhoffův difrakční integrál. Integrand v 8.2(6) až 8.2(8) můžeme považovat za sekundární kulovou vlnu vycházející z elementu $d\vec{l}$ okraje otvoru. Podstatné pro Youngovo pojetí difrakce je, že amplituda této sekundární kulové vlny $\exp(iks_B)/s_B$ je úměrná dopadající vlně $\exp(ikr_B)/r_B$ v místě „emitujícího“ elementu $d\vec{l}$ a nesouvisí s dopadající vlnou v jiných místech (srov. odst. 8.4 v dalším textu). Ve výrazu 8.2(8) pro okrajovou vlnu vyjadřuje faktor

$$R = \frac{\cos(\vec{n}, \vec{s}_B)}{1 + \cos(\vec{r}_B, \vec{s}_B)} \sin(\vec{r}_B, d\vec{l}) \tag{1}$$

poněkud komplikovanou směrovou závislost amplitudy sekundárních vln vycházejících z elementů $d\vec{l}$ okraje Γ . Je zřejmé, že tento faktor je vždy reálný. Sekundární vlny mají tedy ve všech směrech fázi $k(r_B + s_B)$ nebo $k(r_B + s_B) \pm \pi$ podle toho, zda faktor (1) je kladný nebo záporný. Vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku ve výrazu (1) i $\sin(\vec{r}_B, d\vec{l})$ jsou vždy nezáporné, rozhoduje o tom znaménko čitatele. Tento čítecitel je nulový, když vektor \vec{s}_B leží v rovině určené vektory \vec{r}_B a $d\vec{l}$. Amplituda sekundárních vln je tedy nulová, když bod pozorování P leží v rovině určené zdrojem P_0 a elementem $d\vec{l}$ okraje Γ , s výjimkou případu $\vec{s}_B/s_B = -\vec{r}_B/r_B$, tj. kdy bod pozorování P leží na přímce P_0B . V tomto případě je totiž roven nule jak čítecitel tak jmenovatel zlomku ve výrazu (1).



Obrázek 4: Soustava souřadnic $(B; x_1, x_2, x_3)$.

Provedeme nyní podrobnou analýzu směrové závislosti faktoru R . Především je z výrazu (1) zřejmé, že – nezávisle na poloze bodu pozorování P – je faktor R úměrný sinu úhlu γ mezi vektorem \vec{r}_B a elementem $d\vec{l}$. Závislost faktoru R na směru od elementu $d\vec{l}$ k bodu pozorování P tedy určuje zlomek

$$R_1 = \frac{\cos(\vec{n}, \vec{s}_B)}{1 + \cos(\vec{r}_B, \vec{s}_B)}.$$

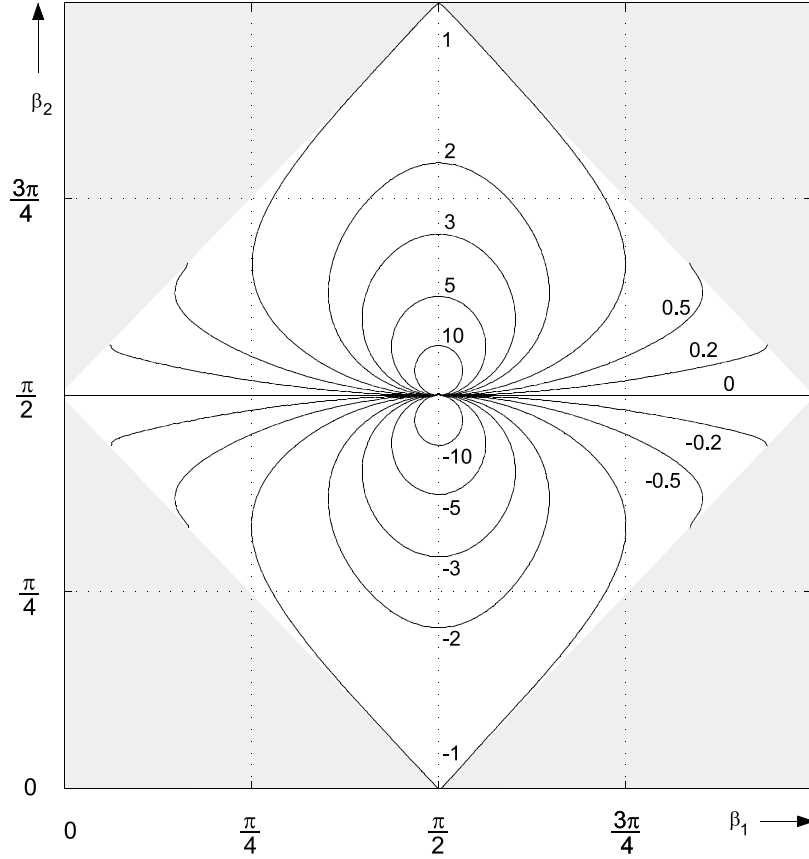
Abychom tuto závislost ozřejmili, zavedeme pravoúhlu kartézskou soustavu souřadnic $(B; x_1, x_2, x_3)$, viz obr. 4. Její počátek umístíme do bodu B okraje otvoru, osu x_3 zvolíme ve směru vektoru $\vec{r}_B = P_0\vec{B}$, osu x_2 ve směru normály \vec{n} a osu x_1 zvolíme tak, aby soustava $(B; x_1, x_2, x_3)$ byla pravotočivá. (Je zřejmé, že rovina $(B; x_1, x_3)$ je totožná s rovinou určenou vektory \vec{r}_B a $d\vec{l}$ a je tedy tečnou rovinou k ploše S' ohraničující geometrický stín. Dále je zřejmé, že souřadnice vektoru $d\vec{l}$, a tedy i $\vec{t} = d\vec{l}/dl$, v osách x_1 a x_2 jsou nezáporné.) Směr od elementu $d\vec{l}$ k bodu pozorování P je směrem vektoru $-\vec{s}_B$ a úhly tohoto vektoru s osami x_1 a x_2 označíme β_1 a β_2 . Je tedy

$$\vec{s}_B = -s_B \left(\cos \beta_1 \vec{i}_1 + \cos \beta_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2} \right),$$

$$\cos(\vec{r}_B, \vec{s}_B) = \frac{\vec{r}_B \cdot \vec{s}_B}{r_B s_B} = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2},$$

takže

$$R_1(\beta_1, \beta_2) = \frac{-\cos \beta_2}{1 - \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1 - \cos^2 \beta_2}}, \quad (2)$$



Obrázek 5: Graf funkce $R_1(\beta_1, \beta_2)$ v oblasti $(-\frac{\pi}{2} \leq \beta_1 - \beta_2 \leq \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} \leq \beta_1 + \beta_2 \leq \frac{3\pi}{2})$, v níž je funkce $R_1(\beta_1, \beta_2)$ reálná.

graf této funkce je na obr. 5. Je z něj vidět, že v rovině $(B; \vec{r}_B, \vec{d}\vec{l})$, tj. když $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, tedy v rovině tečné k hranici geometrického stínu S' , je amplituda sekundárních vln skutečně nulová, jak bylo uvedeno výše. V rovině kolmé na tuto rovinu, tj. když $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$, tedy v rovině kolmé k hranici geometrického stínu S' , je

$$R_1\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2\right) = \frac{-\cos \beta_2}{1 - \sin \beta_2} = \frac{-\sin\left(\beta_2 + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(\beta_2 + \frac{\pi}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\left(\beta_2 + \frac{\pi}{2}\right)\right]. \quad (3)$$

V „primárním“ směru $\vec{r}_B/r_B = -\vec{s}_B/s_B$, tj. když $\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}$, má faktor R singularitu a nabývá všech hodnot z intervalu $(-\infty, \infty)$.

Vlnová funkce $\psi(P)$, charakterizující difrakční jev jako celek, je jistě spojitá. Geometrická vlna $\psi^{(g)}(P)$ je však nespojitá v bodech plochy S' představující hranici stínu (srov. 8.1(2)). Z rovnice 8.1(1) pak vyplývá, že okrajová vlna $\psi^{(b)}$ ve tvaru 8.2(6) až (8) musí být rovněž nespojitá, a to tak, že kompenzuje nespojitost geometrické vlny.

Vidíme, že amplituda sekundárních vln má složitou směrovou závislost, kterou Young stěží mohl vytušit a vyjádřit matematicky. Proto nebyl úspěšný v kvantitativní interpretaci difrakčních jevů. Není také divu, že i poté, co Rubinowicz odvodil matematický výraz pro okrajovou vlnu, se při interpretaci difrakčních jevů dává přednost Fresnelovu pojetí, které je mnohem názornější.

8.4 Poznámka k Youngovu a Fresnelovu pojetí difrakce

Kromě malé názornosti má Youngovo pojetí ještě další nevýhodu ve srovnání s Fresnelovým pojetím difrakce.

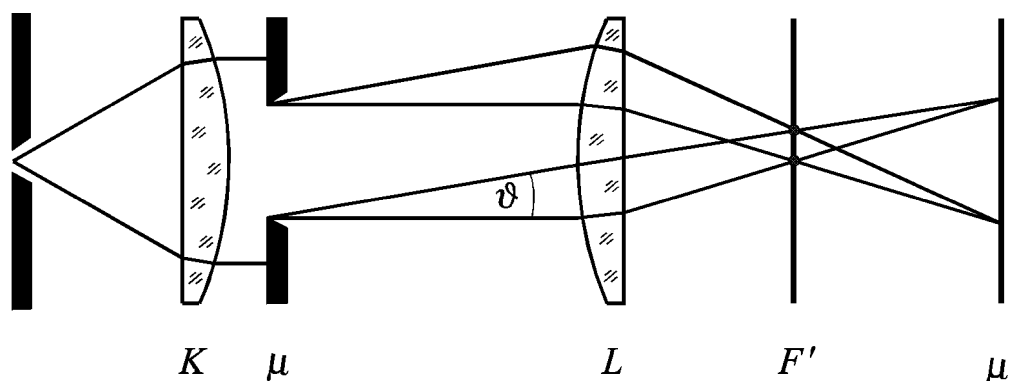
Fresnelovo pojetí lze použít k výpočtu i těch difrakčních jevů, kdy dopadající vlna je komplikovanější než kulová nebo rovinná, nebo kdy otvor ve stínítku není prázdný, ale je vyplněn nějakým filtrem s proměnnou propustností. V Kirchhoffově 6.4(4) resp. Rayleighově–Sommerfeldově 6.5(15) difrakčním integrálu pak stačí vzít za $\psi_0(M)$ hodnoty vlnové funkce v bodech té strany filtru, jež je odvrácena od zdroje.

U Youngova pojetí difrakce je tomu bohužel jinak. Sekundární vlny vycházejí z elementu okraje stínítka a závisí na dopadající vlně jen prostřednictvím hodnoty, již dopadající vlna má v příslušném elementu okraje stínítka. Nemohou tedy nést informaci o hodnotách vlnové funkce v jiných bodech (tedy uvnitř) otvoru. Proto Youngovo pojetí difrakce a Rubinowiczova reprezentace nejsou použitelné v případech, kdy otvor v nepropustném stínítku je vyplněn nějakým filtrem s proměnnou propustností, nebo když dopadající vlna není právě kulová nebo rovinná (např. když má gaussovský profil).

Toto vážné omezení použitelnosti okrajové vlny odstranili Miyamoto a Wolf [4], kteří vyjádřili vlnovou funkci charakterizující difrakční jev křivkovým integrálem i v případě obecné dopadající vlny. Přitom se však nutně vytratilo Youngovo pojetí: amplituda vlnění vycházejícího z elementu okraje otvoru ve stínítku závisí na hodnotách vlnové funkce dopadající vlny nejen v místě uvažovaného elementu, ale i v jiných místech (viz též [3], str. 322 a další, [5], [6]).

8.5 Poznámka o okrajové vlně ve Fraunhoferově difrakci

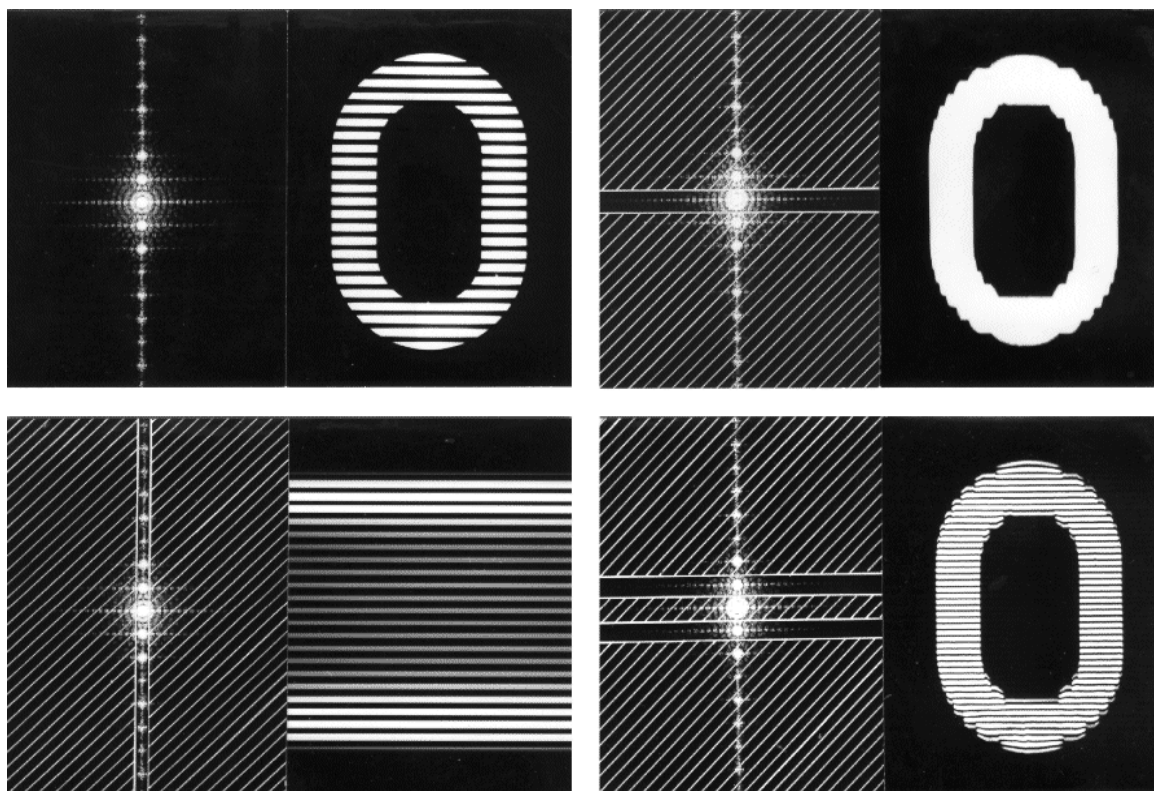
Až dosud jsme mluvili o okrajové vlně v souvislosti s Fresnelovou difrakcí. Okrajová vlna však hraje významnou roli také — a možná především — ve Fraunhoferově difrakci. V případě Fraunhoferovy difrakce na prázdném otvoru v nepropustném stínítku je totiž geometrickou vlnou jen vlna šířící se v primárním směru, tedy primární stopa. S výjimkou této primární stopy celý Fraunhoferův difrakční obrazec představuje právě jen okrajovou vlnu.



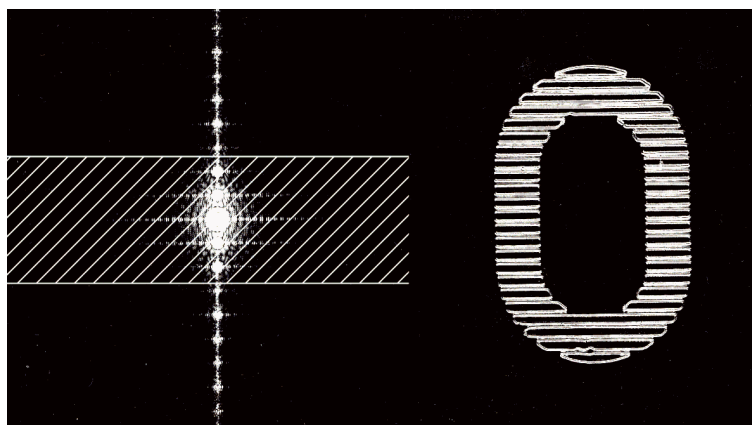
Obrázek 6: Schéma zobrazení roviny μ do roviny μ' čočkou L ukazuje, že zobrazení lze ovlivňovat zásahem do spektra prostorových frekvencí v obrazové ohniskové rovině F' , tj. zásahem do Fraunhoferovy difrakce. Jestliže v rovině F' odstraníme jen primární stopu, mluvíme o zobrazení v temném poli. Je-li v rovině μ binární filtr, je jeho obraz v rovině μ' získáný metodou temného pole obrazem vytvořeným okrajovou vlnou.

Jak je známo z přednášky o fourierovských metodách v teorii difrakce [7], odst. 13.1 a 13.2, je nejstarším (1888) matematickým vyjádřením okrajové vlny Abbeova transformace (viz též [8]). Jde ovšem o speciální případ okrajové vlny, a sice o okrajovou vlnu pro Fraunhoferovu difrakci od okraje stínítka, který tvoří rovinná křivka. Pro otvory vymezené prostorovou křivkou odvodil výraz pro fraunhoferovskou okrajovou vlnu Rubinowicz v r. 1954 ([9], viz též [3], str. 214 až 224). Nebudeme zde tato odvození reprodukovat. Místo toho poukážeme na souvislost okrajové vlny s jednou významnou zobrazovací metodou. Touto metodou je zobrazení v temném poli.

Při zobrazení v temném poli se ve Fraunhoferově difrakci (rovina F' v obr. 6) odstraňuje primární stopa a k dalšímu zobrazení se propouští jen světlo procházející vnějšími částmi difrakčního obrazce. Primární stopa ve Fraunhoferově difrakci však odpovídá nedifraktovanému svazku, tj. geometrické vlně. Znamená to tedy, že se vylučuje nedifraktované světlo a k dalšímu zobrazení se používá jen difraktovaného světla. Obraz, který takto vznikne, pak informuje o tom, odkud difraktované světlo pochází, tj. v kterých místech k difrakci došlo. A tu vidíme, že zobrazujeme-li takto stínítko s otvory, obsahuje obraz v temném poli právě jen obrysy otvorů. Příklad je na obr. 7 a 8. První dvojice na obr. 7 ukazuje písmeno



Obrázek 7: Zpracování obrazu zásahem do Fraunhoferovy difrakce. Objektem je písmeno O vytvořené z vodorovných proužků. Fraunhoferova difrakce a věrný obraz písmene je v levé horní části obrázku. Je-li k dalšímu zobrazení propuštěn z Fraunhoferovy difrakce jen úzký proužek propouštějící primární stopu, jsou proužky z obrazu písmene odstraněny (vpravo nahoře). Naopak, je-li z Fraunhoferovy difrakce propuštěn jen úzký svislý proužek (mnohem užší než je naznačeno v levém dolním obrázku), zmizí písmeno a obraz je vytvořen pouze z proužků. Obrázek vpravo dole ukazuje, jak lze dosáhnout obrazu písmene vytvořeného dvojnásobným počtem proužků.



Obrázek 8: Velmi nešetrný způsob zobrazení v temném poli: Velká část centrální oblasti Fraunhoferova difrakčního obrazce je zastíněna. Výsledkem je obraz písmene O tvořený jen obrysy proužků.

O sestavené z proužků a jeho Fraunhoferův difrakční obrazec. Další dvojice ukazují zastínění různých částí Fraunhoferova difrakčního obrazce a obrazy písmene O z toho vzniklé. Dvojice na obr. 8 demonstruje zobrazení v temném poli. V difrakčním obrazci je zastíněna celá střední část a obraz z toho vzniklý je písmeno O tvořené pouze obrysy proužků. Podobně zářící okraje otvorů nebo obrysy částic se často pozorují při zobrazování v temném poli ve světelné a elektronové mikroskopii. Tato skutečnost je ovšem dobře vysvětlitelná pojmy fourierovské optiky: Funkce propustnosti nepropustného stínítka s otvorem je binární (nabývá hodnoty 0 vně otvoru a 1 uvnitř). Její hodnoty se tedy mění právě jen v bodech okraje otvoru, zato velmi prudce. Proto ke spektru prostorových frekvencí přispívají nenulovými hodnotami právě jen okraje otvoru. A prostorové frekvence jsou úměrné difrakčním úhlům.

K difrakci tedy skutečně dochází na okrajích otvorů v překážkách a okrajová vlna je představa velmi dobře zdůvodněná experimentem i teorií.

Reference

- [1] Rubinowicz A.: Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen. *Annalen der Physik* (4) **53** (1917), 257-278. Též *Selected Papers*. PWN, Warszawa 1975, 9–30.
- [2] Rubinowicz A.: Eine einfache Ableitung des Ausdruckes für die Kirchhoffsche Beugungswelle. *Acta physica Polonica* **12** (1953), 225-229. Též *Selected Papers*. PWN, Warszawa 1975, 235–239.
- [3] Rubinowicz A.: *Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung*. Zweite Auflage. Springer Verlag, Berlin 1966.
- [4] Miyamoto K., Wolf E.: Generalization of the Maggi–Rubinowicz theory of the boundary diffraction wave. Part I and II. *J. Opt. Soc. Am.* **52** (1962), 615-625; 626-637.
- [5] Rubinowicz A.: Beugungswelle im Falle einer beliebigen einfallenden Lichtwelle. *Acta physica Polonica* **21** (1962), 61–87. Též *Selected Papers*. PWN, Warszawa 1975, 324–350.
- [6] Rubinowicz A.: The Miyamoto–Wolf Diffraction Wave. In *Progress in Optics IV*. (E. Wolf, ed.). North–Holland Publ. Co., Amsterdam 1965, 199–240.
- [7] Komrska J.: Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze. Text přednášek. ÚFI FSI VUT Brno 2001.
- [8] Komrska J.: Abbeova transformace a Abbeova věta v teorii Fraunhoferovy difrakce. *Čs. čas. fyz. A* **27** (1977), 636–640.
- [9] Rubinowicz A.: Die Rolle der Beugungswelle in den Fraunhoferschen Beugungserscheinungen. *Acta physica Polonica* **13** (1954), 3–13. Též *Selected Papers*. PWN, Warszawa 1975, 240–250.