

# Astrofyzika III.

**H – R diagram, vznik hvězd,  
Fyzikální podmínky v nitru,  
zdroje energie hvězd**

**Vladimír Štefl**

**Ústav teoretické fyziky a astrofyziky**



# H - R diagram, historie

Ejnar Hertzsprung 1873-1967

Henry Norris Russell 1877-1957

**ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.**

Nr. 4296.

Band 179. 24.

Über die Sterne der Unterabteilungen *c* und *ac* nach der Spektralklassifikation von Antonia C. Maury.<sup>1)</sup>

Von Ejnar Hertzsprung.

In ihrer Arbeit »Spectra of Bright Stars« (Harv. Ann. 28 Part I) ordnet Antonia C. Maury die untersuchten Spektren von 681 Sternen der Mehrzahl nach in einer kontinuierlichen Reihe von 22 Gruppen an, welche mit den Orionsternen anfangt, um durch die Sirius- (Gruppe VII) und Sonnen- (Gruppe XIV) Typen gehend mit den roten Sternen zu enden. Innerhalb jeder Gruppe werden die Spektren weiter nach dem Aussehen der Linien in Unterabteilungen »Divisions« getrennt und zwar bezeichnet *c* Spektren mit sehr scharfen, *b* mit sehr breiten Linien und *a* solche, die dazwischen liegen. Weitere Zwischenstufen werden mit den kombinierten Buchstaben *ac* und *ab* bezeichnet.

Die Spektren der Unterabteilung *c* zeichnen sich ferner dadurch aus, daß unter den »Metall«-Linien einige anscheinend nicht mit Sonnenlinien zusammenfallen. Viele von diesen Metalllinien sind ungewöhnlich stark und die relativen Intensitäten entsprechen nicht dem Sonnenspektrum:

»In general, Division *c* is distinguished by the strongly defined character of its lines, and it seems that stars of this division must differ more decidedly in constitution from those of Division *a* than is the case with those of Division *b*« (l. c. S. 5).

Die *c*-Sterne hören mit der Gruppe XIII und die *ac*-Sterne mit der Gruppe XIV auf, so daß in den Gruppen mit höheren Nummern keine solche Sterne mehr vorkommen.

Daß unter den Sternen, welche zu derselben Spektralklasse gezählt werden, große physische Unterschiede bestehen, ist u. a. durch die Parallaxenmessungen wahrscheinlich gemacht. So werden z. B.  $\delta$  Cygni und  $\alpha$  Tauri beide zur Gruppe XVIa gezählt, während  $\delta$  Cygni, trotzdem er anscheinend um etwa 4 Sterngrößen schwächer als  $\alpha$  Tauri ist, doch eine größere Parallaxe besitzt. Die auf eine Parallaxe von 1" reduzierte Sterngröße beträgt für  $\delta$  Cygni A ca. 3<sup>m</sup> und für unsere Sonne (Spektrum XIVa) ca. 0<sup>m</sup>, welche Zahlen bei Annahme von gleicher Masse mit der gewöhnlichen Auffassung der Spektralentwicklung, daß nämlich der abgekühlte röttere Stern geringere absolute Leuchtkraft besitzt, gut übereinstimmen. Dies ist aber für  $\alpha$  Bootis,  $\alpha$  Orionis und  $\alpha$  Scorpii mit fast unmeßbar kleinen Parallaxen nicht der Fall. Diese Sterne haben trotz rötlicher Farbe sehr große absolute Leuchtkraft. Die Spektren von  $\alpha$  Aurigae und unserer Sonne sind sehr nahe gleich. Wären die beiden Sterne aber absolut gleich

hell, müßte  $\alpha$  Aurigae eine Parallaxe von 0,78 haben, was nicht zutrifft. Auch  $\alpha$  Aurigae hat viel größere absolute Leuchtkraft als die Sonne. Daß die Ursache dieser großen Helligkeitsunterschiede wahrscheinlich nicht in der Verschiedenheit der Massen zu suchen ist, habe ich a. a. O.<sup>1)</sup> auseinandergesetzt.

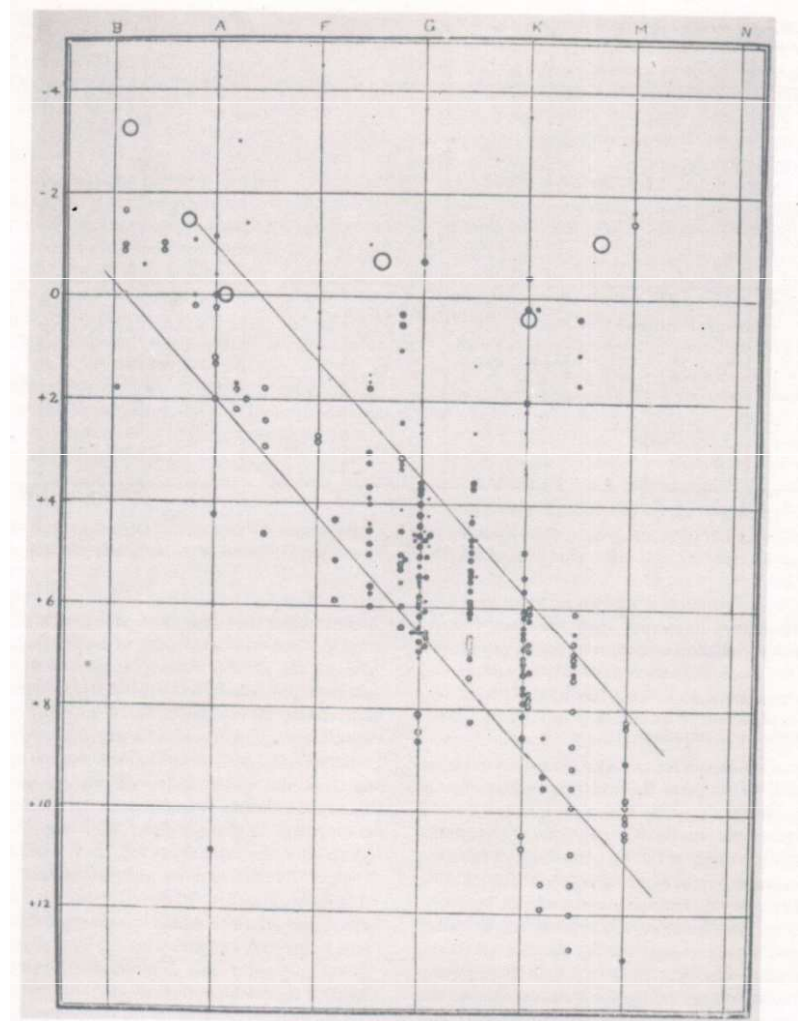
Es fragt sich nun, ob es nicht möglich sein wird, spektrale Äquivalente solcher Helligkeitsunterschiede zu finden, kleine Unterschiede in den Spektren aufzufinden, die mit den großen Änderungen der absoluten Helligkeit zusammengehen, speziell ob die Merkmale der Unterabteilungen *c*, *a* und *b* solche Äquivalente anzeigen.

Um dieses zu prüfen, habe ich die Eigenbewegungen nach Kapteyn<sup>2)</sup> benutzt und gefunden, daß innerhalb jeder Gruppe zwischen den Unterabteilungen *a* und *b* kein systematischer Unterschied der auf gleiche Sterngröße reduzierten mittleren sekularen Parallaxe besteht, daß aber die Eigenbewegungen der *c*-Sterne als bisher unmeßbar klein zu bezeichnen sind.

Von Antonia C. Maurys 18 *c*- und 17 *ac*-Sternen kommen in dem Neuen Fundamentalkataloge des Berliner Astron. Jahrbuchs je 12 *c*- und *ac*-Sterne vor und außerdem zwei spektroskopische Doppelsterne, deren eine Komponente ein *c*-Stern zu sein scheint. Diese 26 Sterne sind in Tabelle 1 enthalten.

**Tabelle 1.**

Sterngröße H. R.	Spektrum <sup>3)</sup>	Sekuläre Eigenbewegung		
		normal für $\alpha, \beta$ - Sterne	Größe	Richtung
$\alpha$ H. Camelop.	4.42 VIc	6,79	0,65	356°
$\epsilon$ Aurigae (3.35)	XIIc	25.59	1,52	154
$\beta$ Orionis	0.34 VIc	35.16	0,24	92
$\delta^2$ Canis maj.	3.12 Vc	4.72	0,25	277
$\delta$ Canis maj.	1.98 XIIIc	13.06	1,06	289
$\eta$ Canis maj.	2.43 Vc	6.49	1,45	334
$\eta$ Leonis	3.58 VIIc	7.41	0,68	118
$\delta$ Ophiuchi	3.92 Vc	3.27	1,31	181
$\mu$ Sagittarii	4.01 VIc	6.49	0,48	229
$\gamma$ Cygni	2.32 XIIIc	111.69	0,43	87
$\alpha$ Cygni	1.33 VIIIc	23.77	0,44	99
$\rho$ Cassiop.	4.85 XIIIc	34.83	0,70	304



# Soudobá harvardská spektrální klasifikace

Charakteristiky jednotlivých spektrálních tříd:

**W:** Wolfovy-Rayetovy hvězdy jevící široké emisní čáry vodíku a helia.

**O:** Silné spojité spektrum, absorpční čáry ionizovaného helia.

**B:** Absorpční čáry neutrálního helia, Balmerovy série vodíku a ionizovaného kyslíku.

**A:** Silné čáry Balmerovy série vodíku a čáry ionizovaného vápníku a čáry kovů.

**F:** Čáry Balmerovy série slábnou, zesilují se čáry ionizovaného vápníku a kovů.

**G:** Silné čáry ionizovaného vápníku, slabá Balmerova série, početné čáry kovů, např. Fe.

**K:** Silné čáry kovů, slabé absorpční pásy molekul. Hvězdy mají oranžovou barvu.

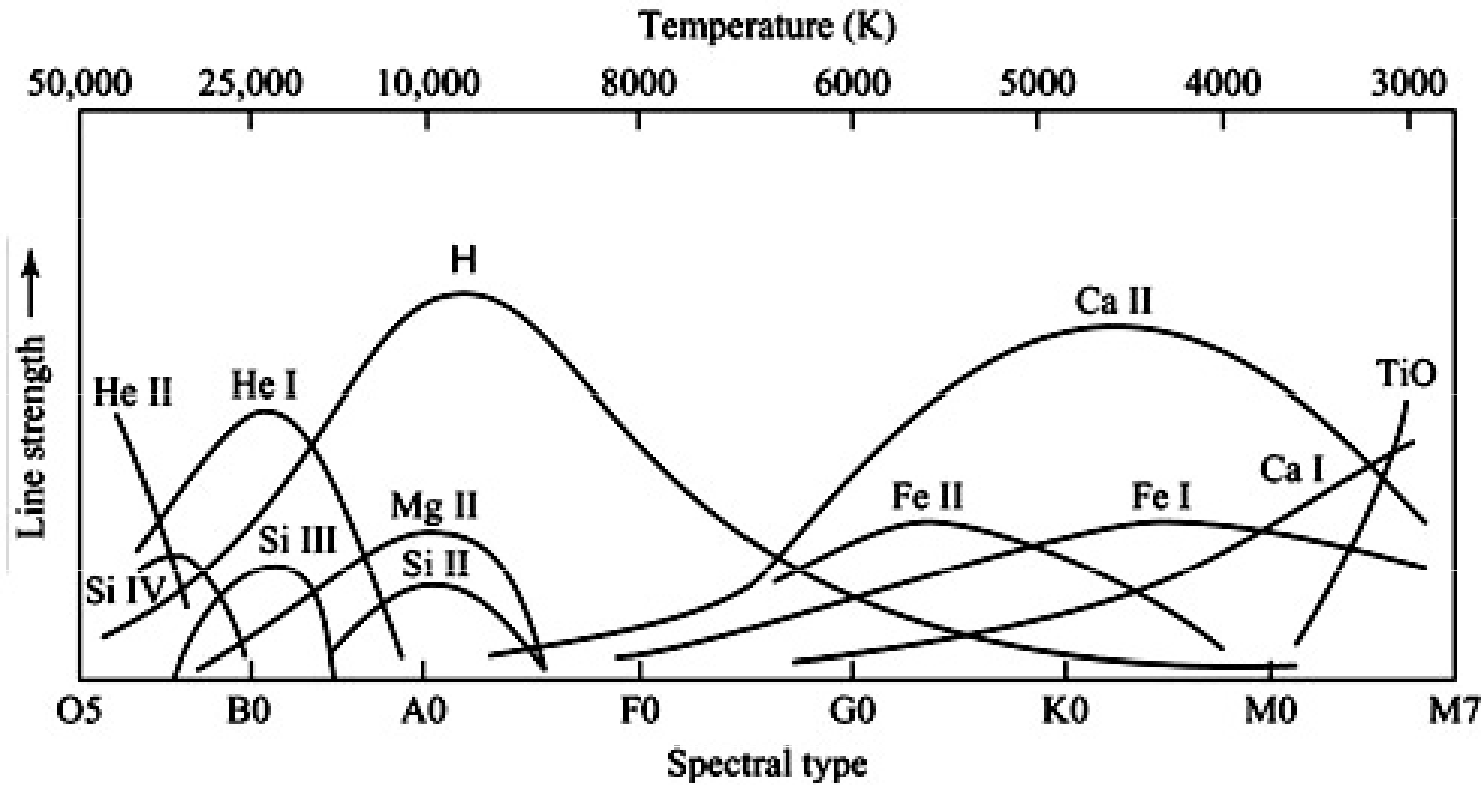
**M:** Silné pásy molekul, zejména oxidu titanatého. Hvězdy mají červenou barvu.

**L:** Chladní trpaslíci, září v IR, pásy molekul FeH, CrH, H<sub>2</sub>O, CO<sub>2</sub>.

**T:** Při teplotě pod 1499 K vzniká metan, typické IR čáry metanu.

**Y:** Čáry metanu CH<sub>4</sub>, čpavku NH<sub>3</sub>, vody H<sub>2</sub>O

# Závislost intenzita - teplota



trální čáry H  $\beta$  s teplotou

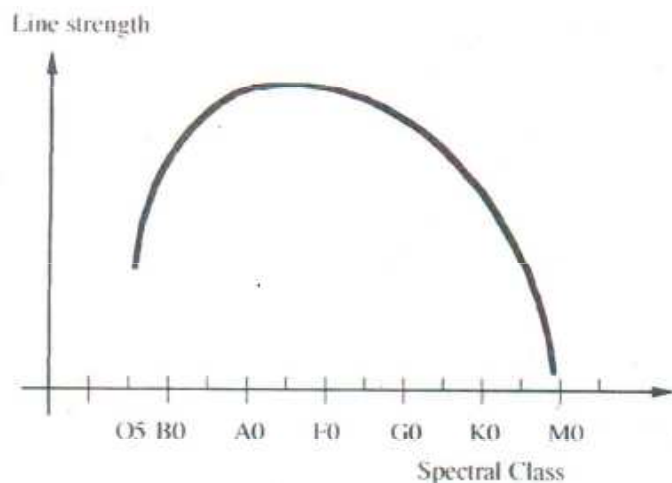
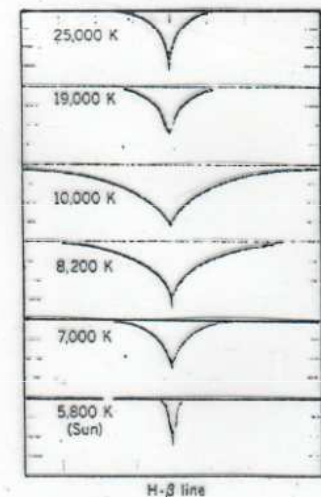


Figure 11.4 Variation of the strength of the Balmer series in stellar spectra.





# Harvadská spektrální klasifikace-označení spektra

## Označení spektra

(W) - O - B - A - F - G - K - M - L - T - Y

jemnější! desetinné dělení A0, A1, ... A9

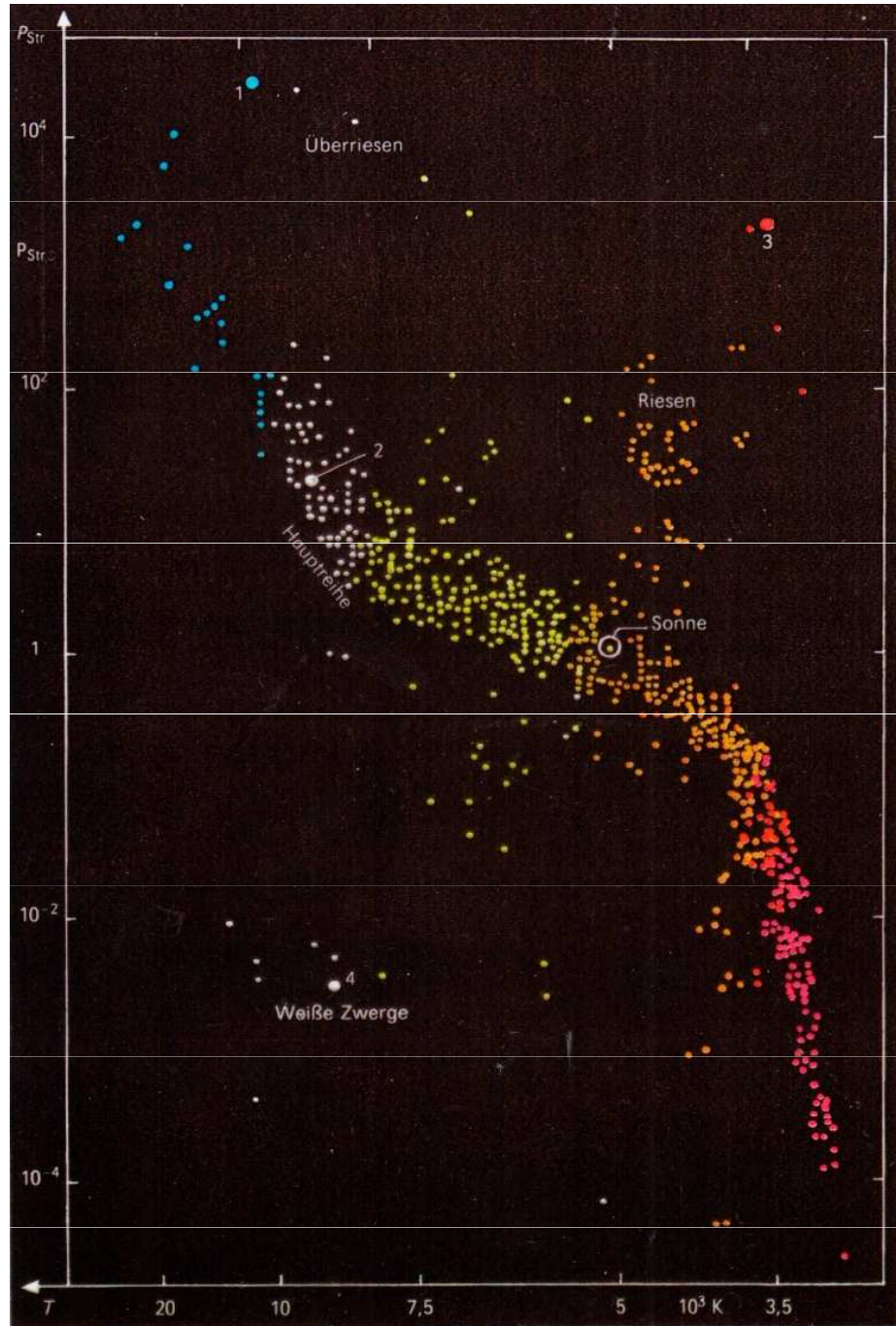
- e - emisní čáry
- n - neustálé, difúzní čáry
- s - ostré čáry
- v - proměnné čáry
- m - metalické čáry

přípony

- c - oblaky
- f - obl
- d - kvaslík
- sd - podkvaslík
- wd - bílý kvaslík

předpony

# H - R diagram



1 Rigel 2 Sirius A 3 Beteigeuze 4 Sirius B

Bild 3 Hertzsprung-Russell-Diagramm

# H - R diagram

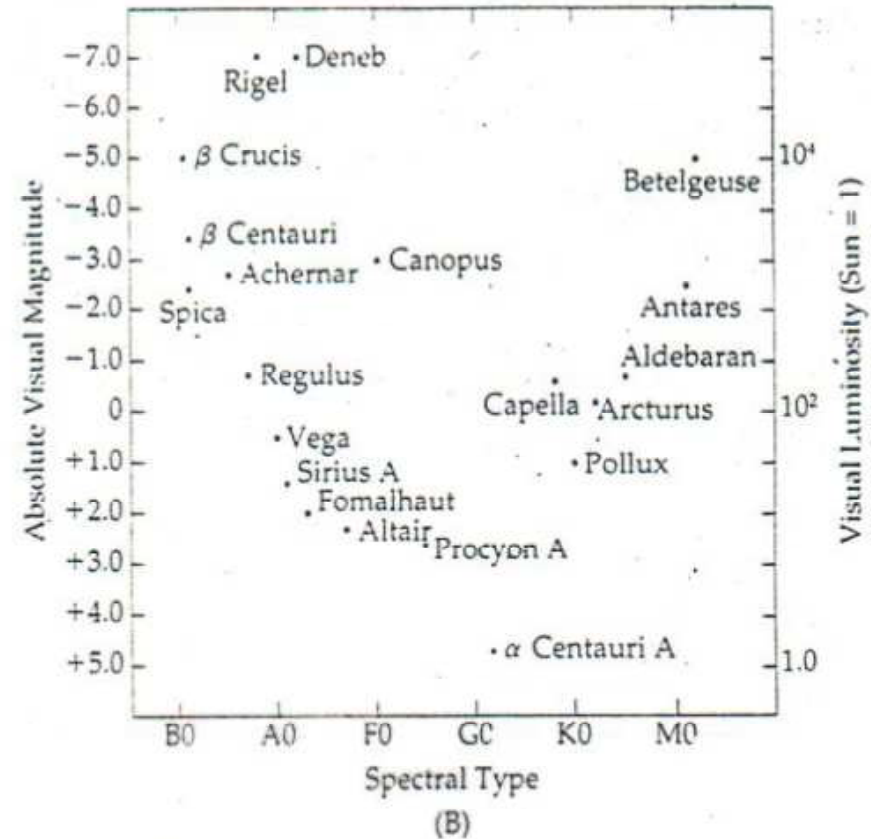
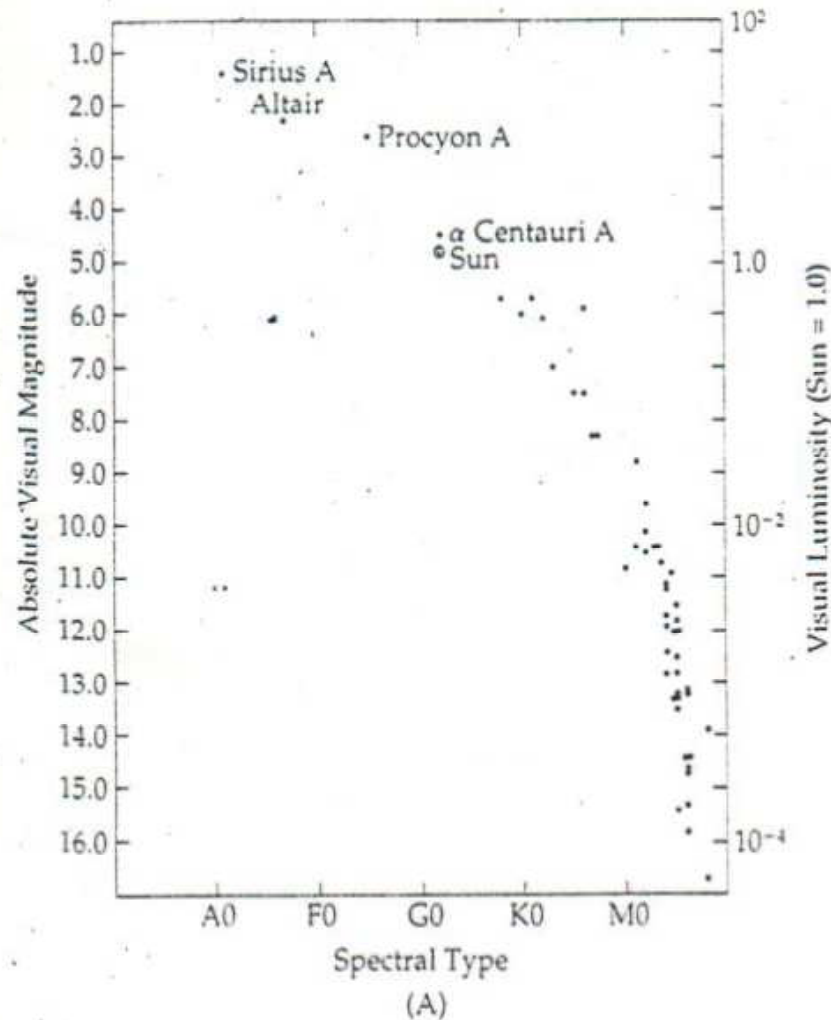
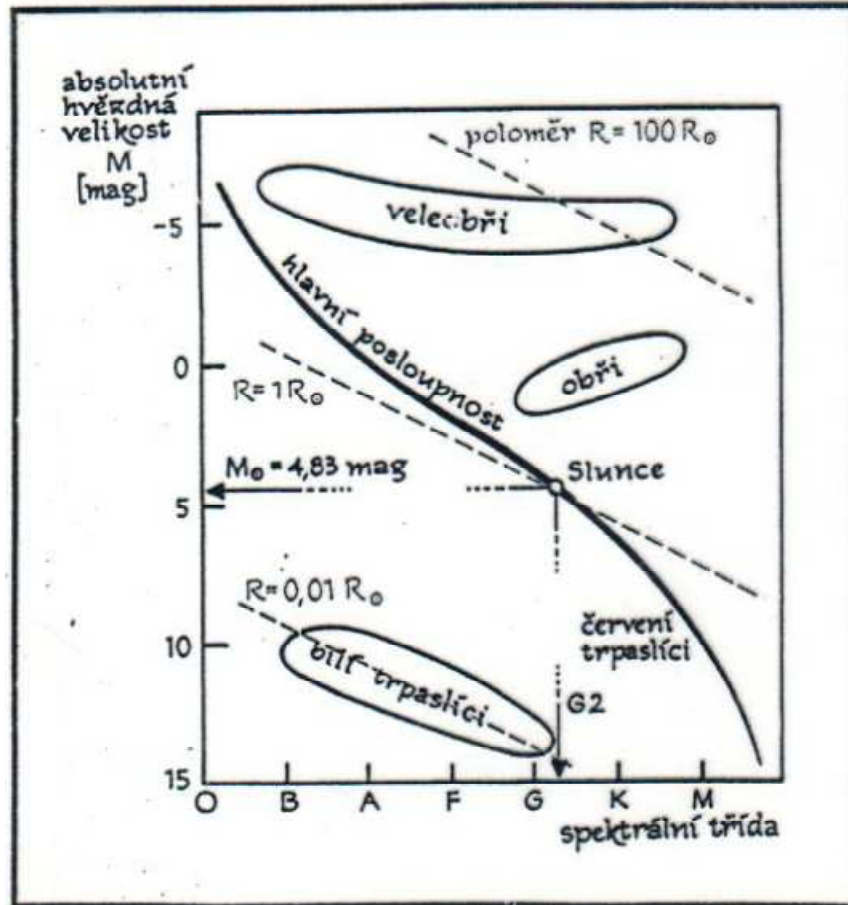


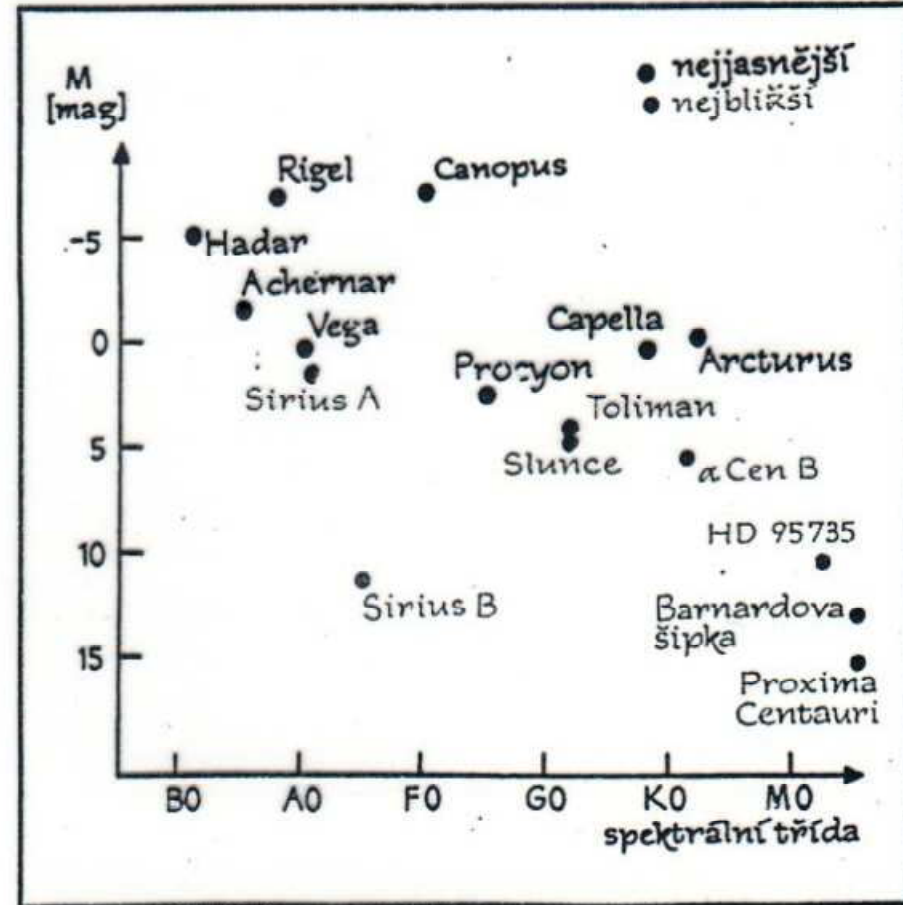
Figure 13-7 Hertzsprung-Russell diagrams. (A) For stars within 5 pc of the Sun. Note that most are low-luminosity, cool stars. (B) For the brightest stars in the sky. These tend to be very luminous stars.



# H - R diagram



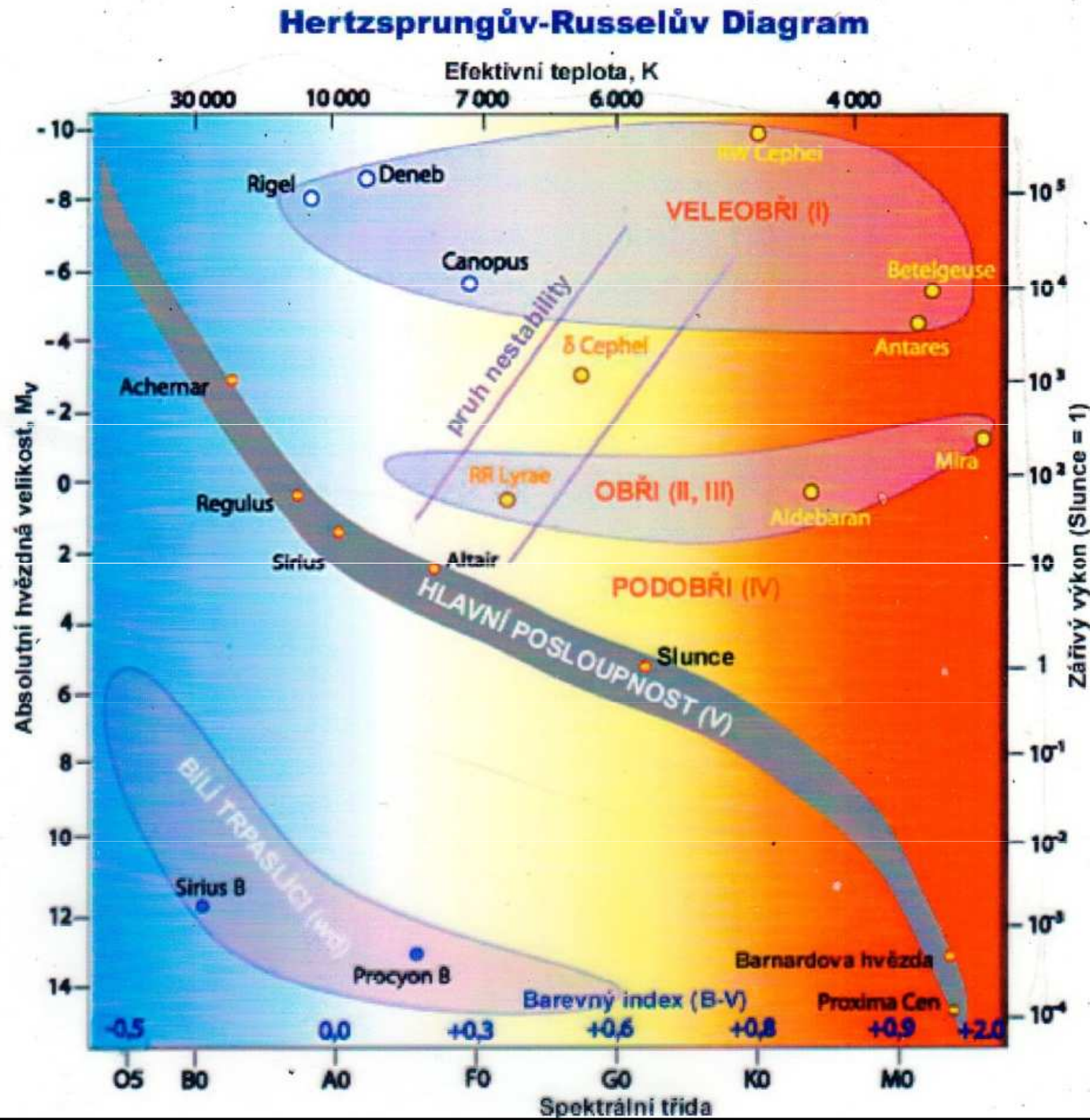
▲ Obr. L8.3. - Hertzsprungův-Russellův diagram.



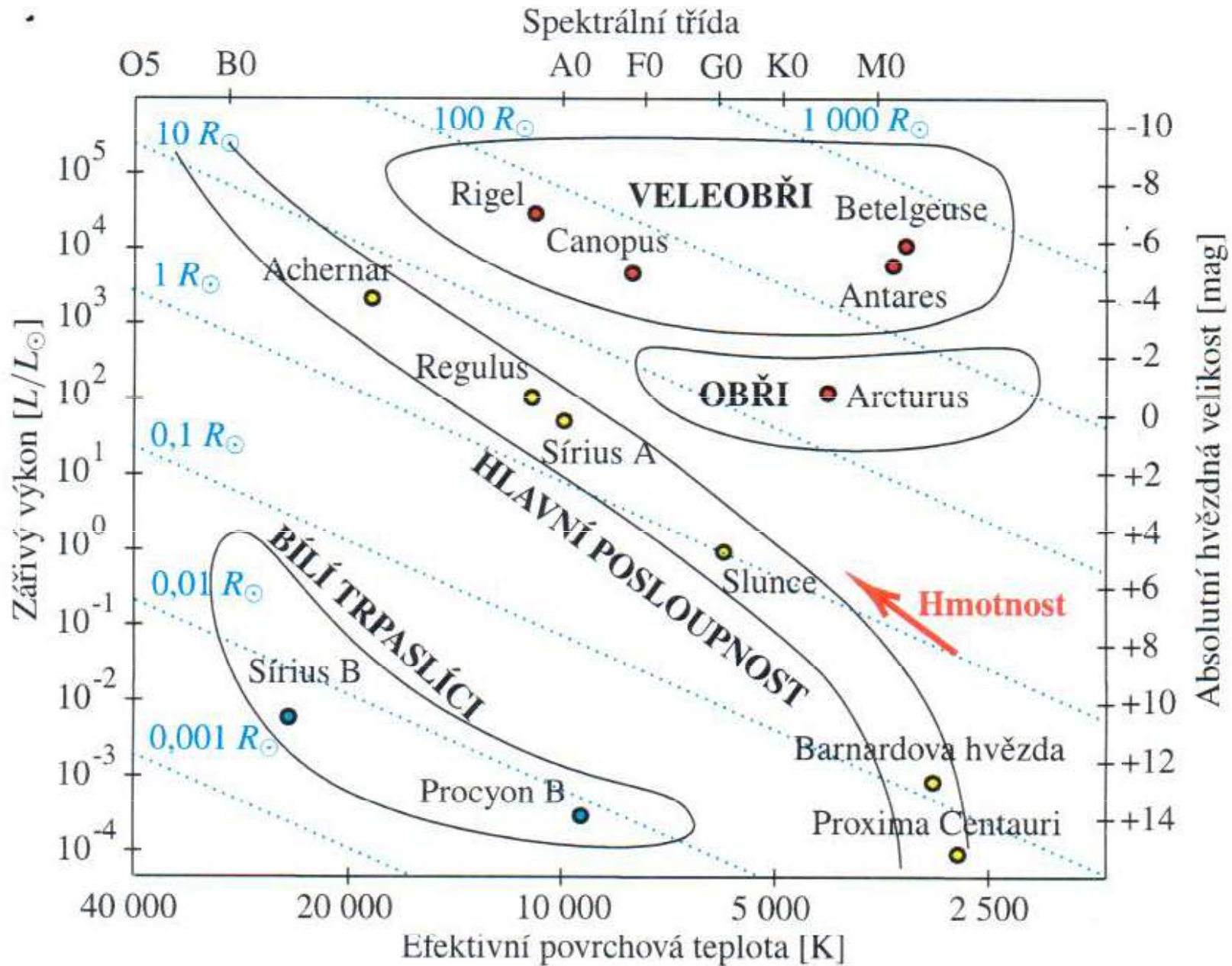
▲ Obr. L8.4. - HR diagram pro nejjasnější a nejbližší hvězdy.



# H - R diagram - stavový, určuje stav hvězd

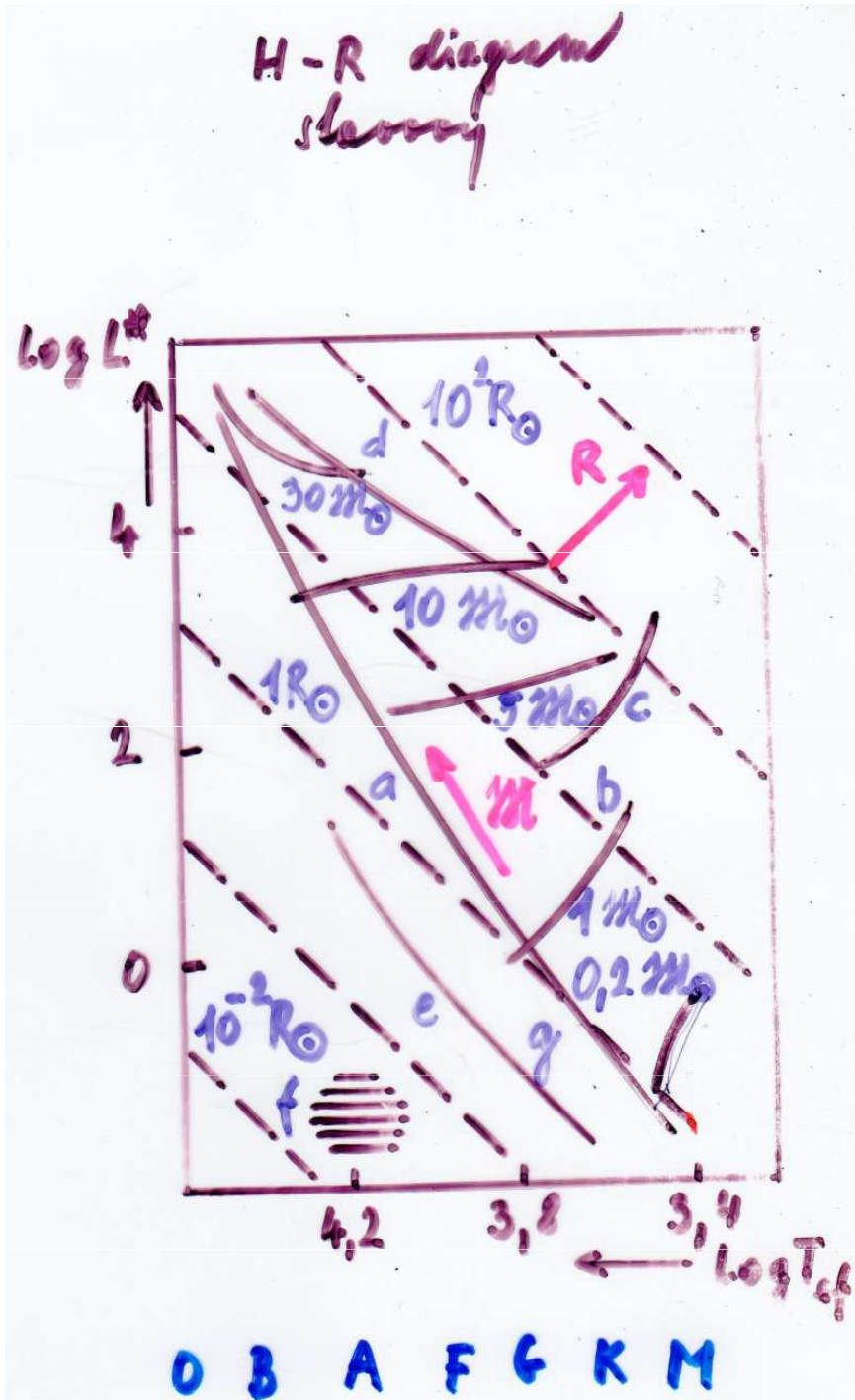


# H - R diagram





# H-R diagram, závislost L - Tef



$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{ef\odot}^4$$

$$L^* = R^{*2} \frac{T_{ef}^4}{T_{ef\odot}^4} \quad (1)$$

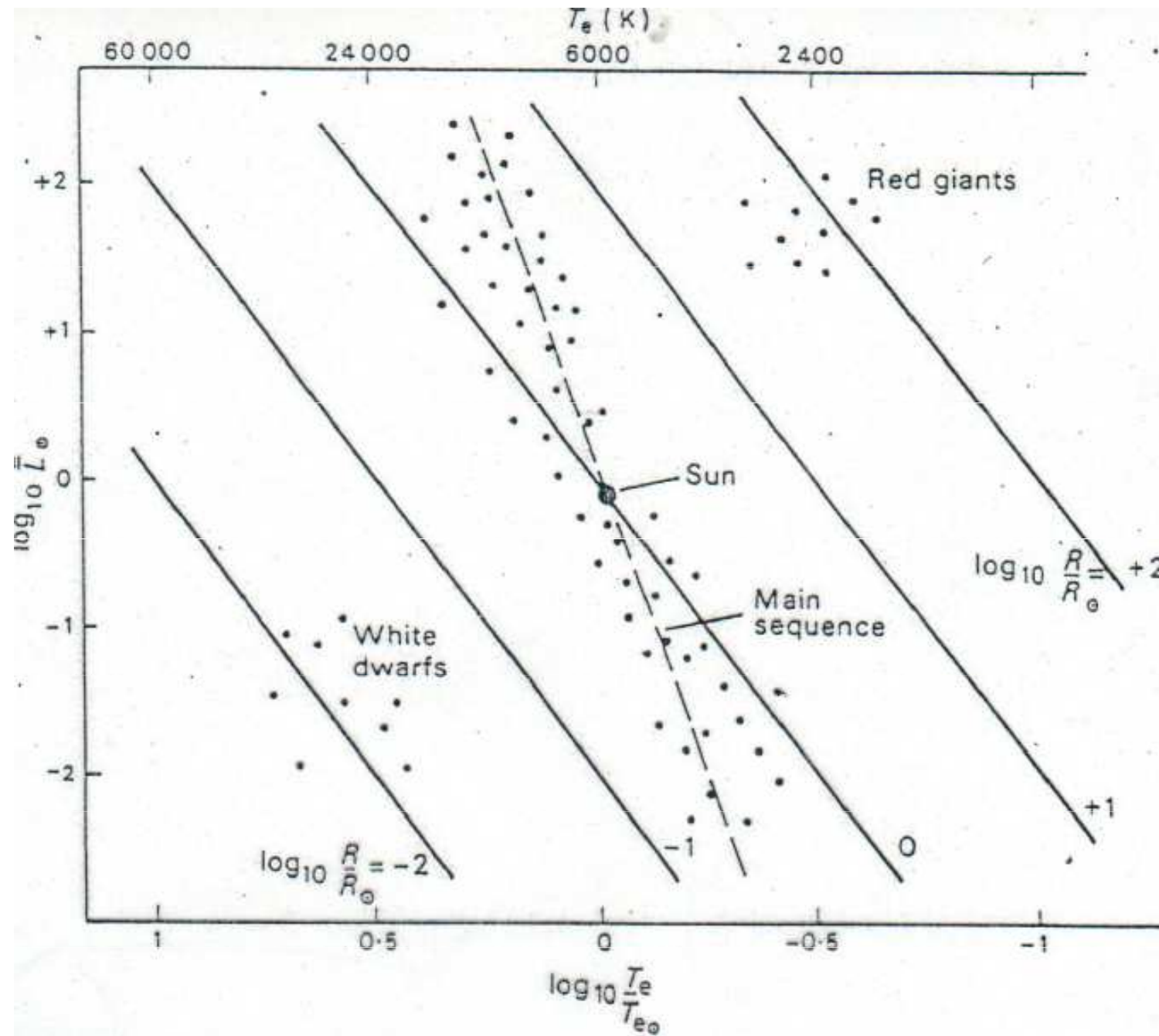
$$L^* = \frac{L}{L_{\odot}}$$

$$R^* = \frac{R}{R_{\odot}}$$

$$\log L^* = 2 \log R^* + 4 \log \frac{T}{T_{\odot}}$$

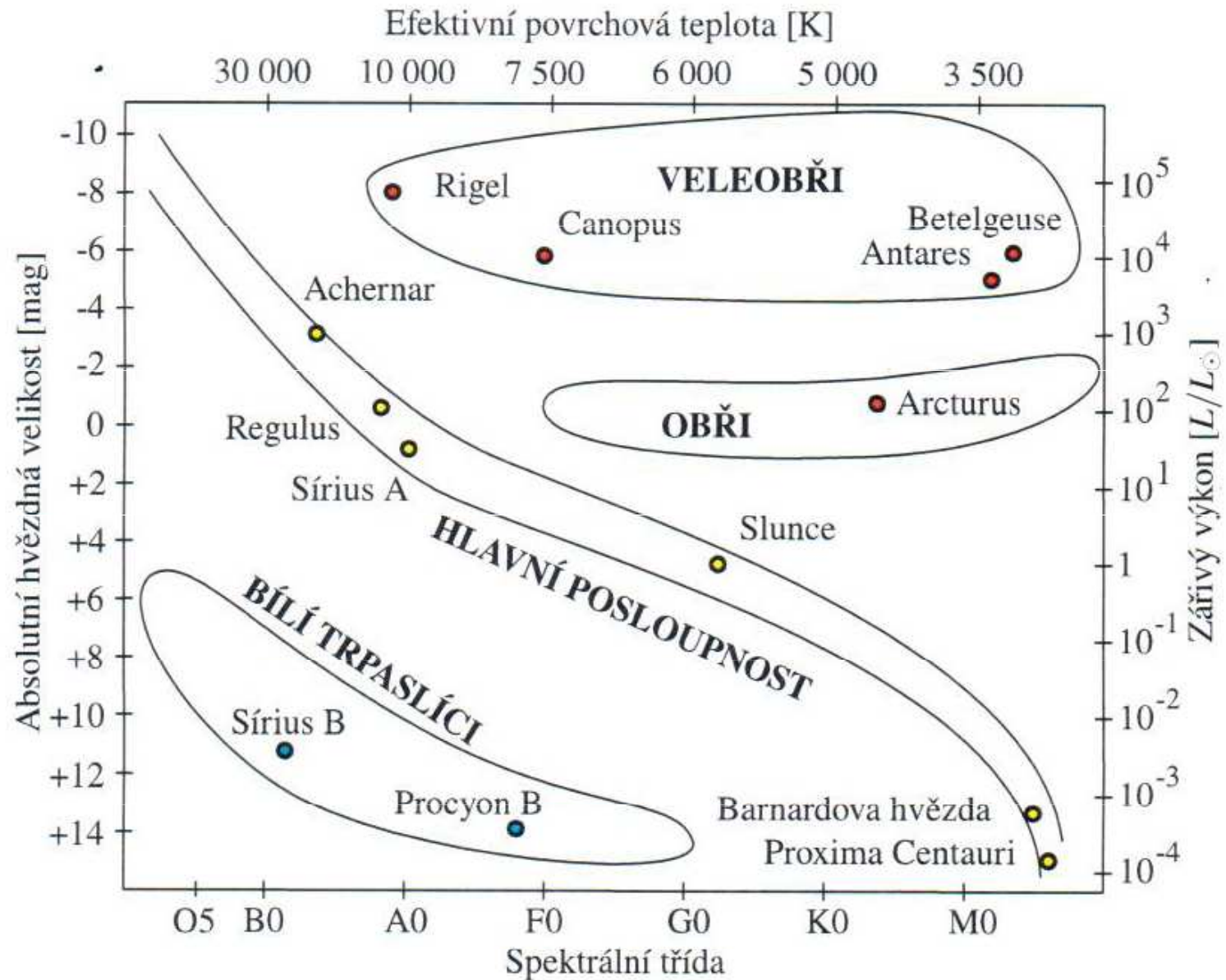
$$y = 4x + q$$

# H - R diagram





# H - R diagram



H. N. Russell  
1877 - 1957

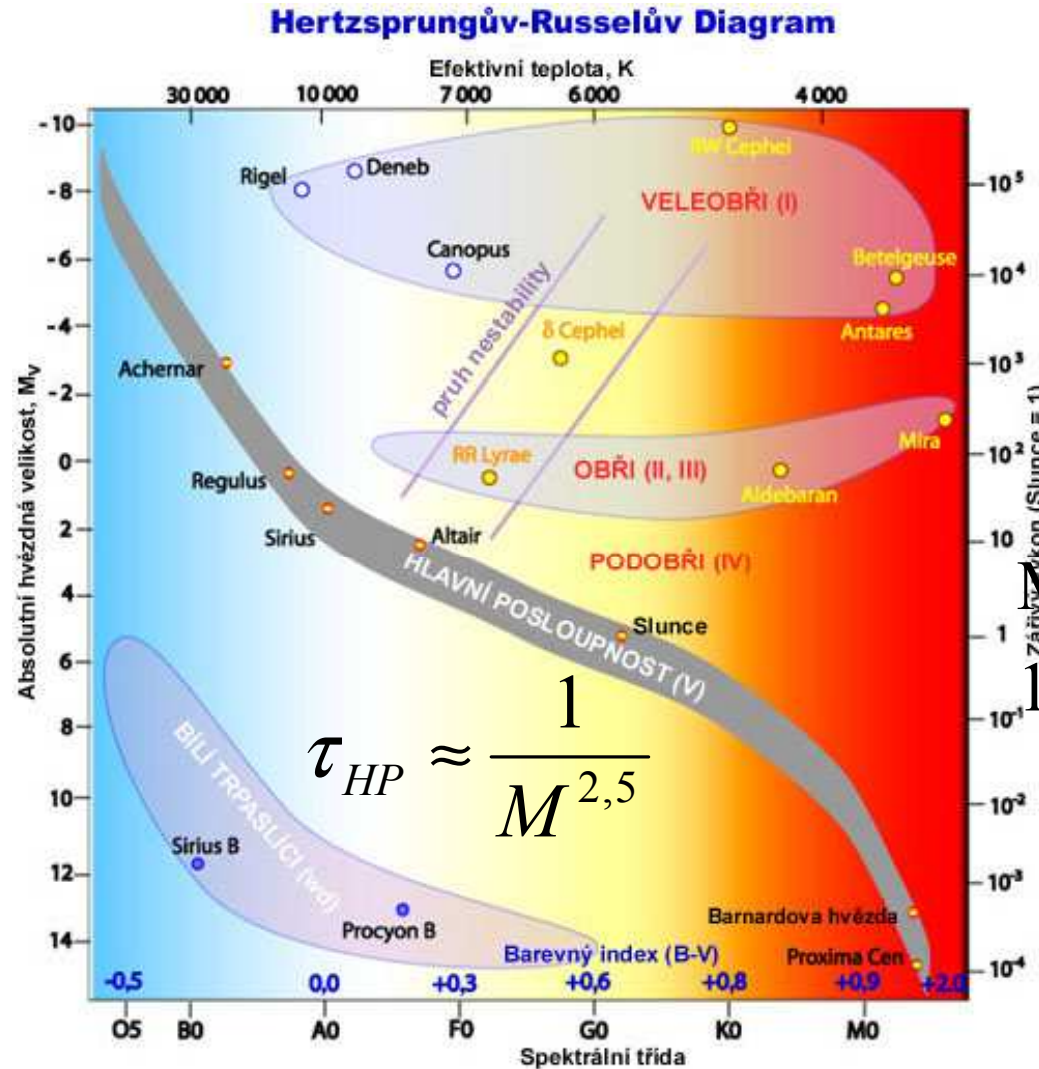


# Odhalování vývoje hvězd, souvislost jednotlivých oblastí

B. Strömngren  
1908 - 1987



G. Gamow  
1904 - 1968

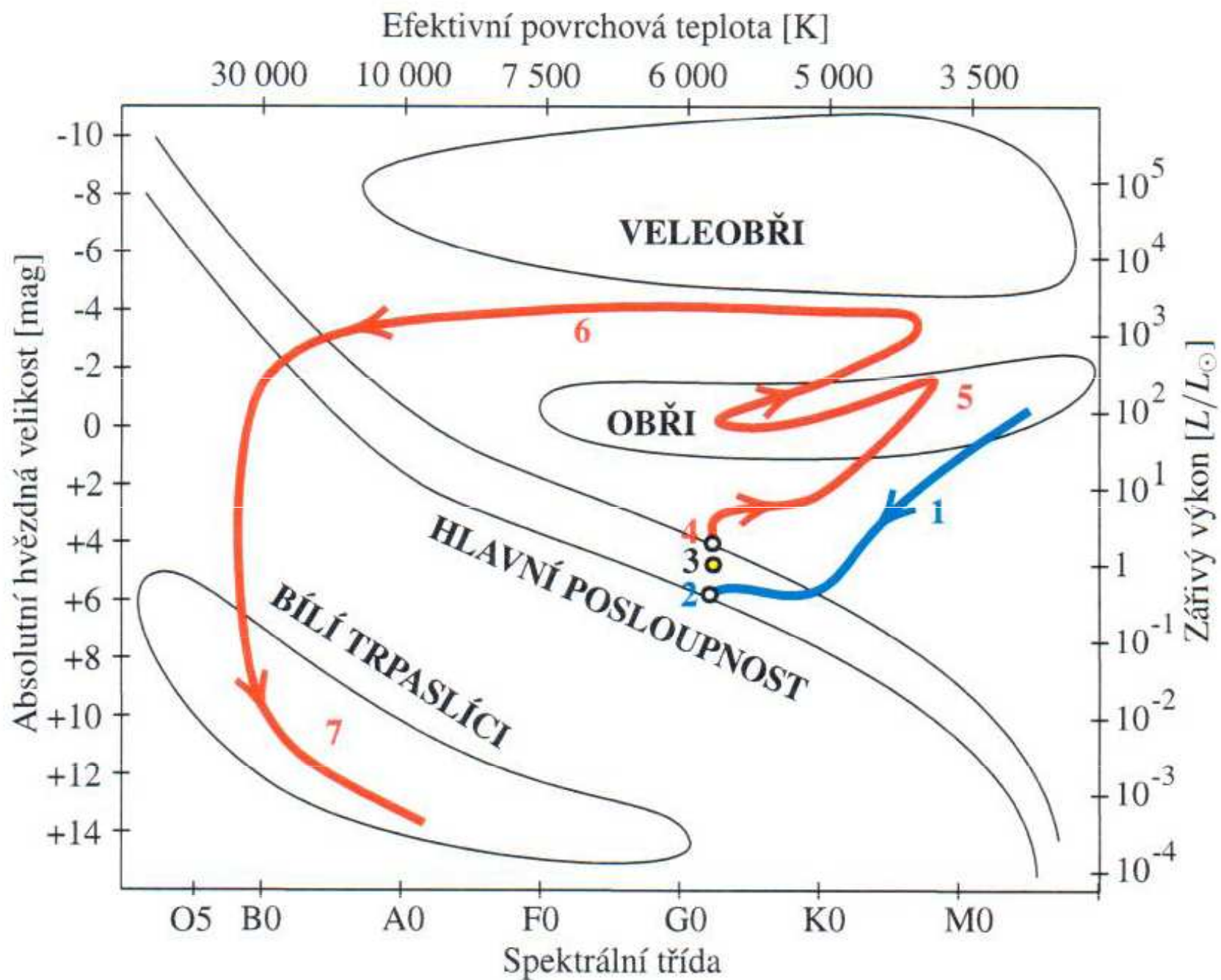


M. Schwarzschild  
1912 - 1997

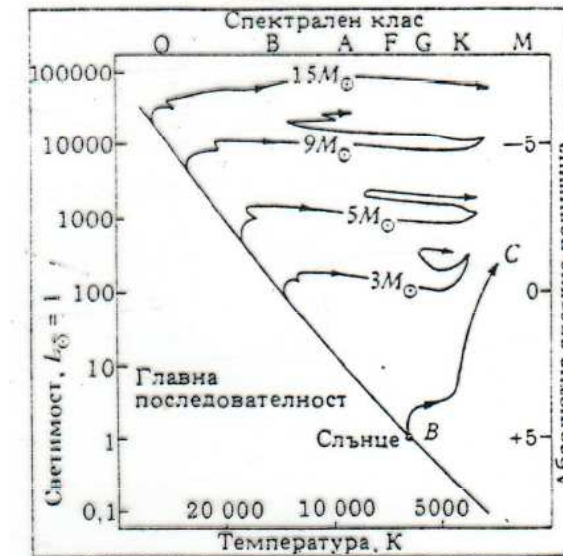
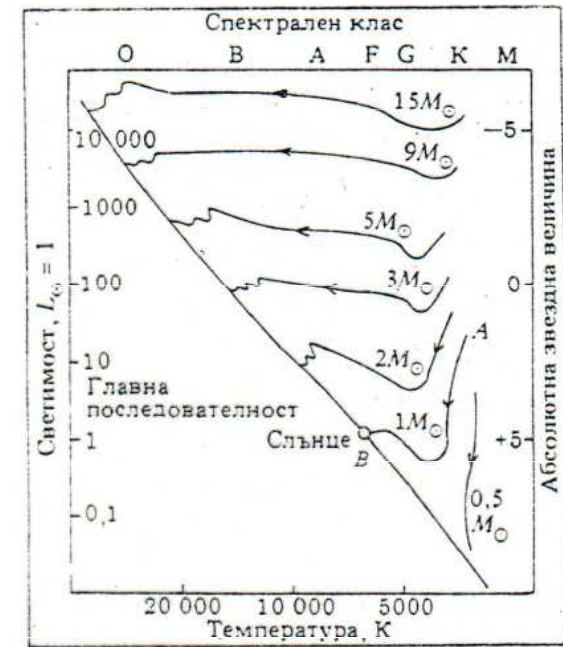
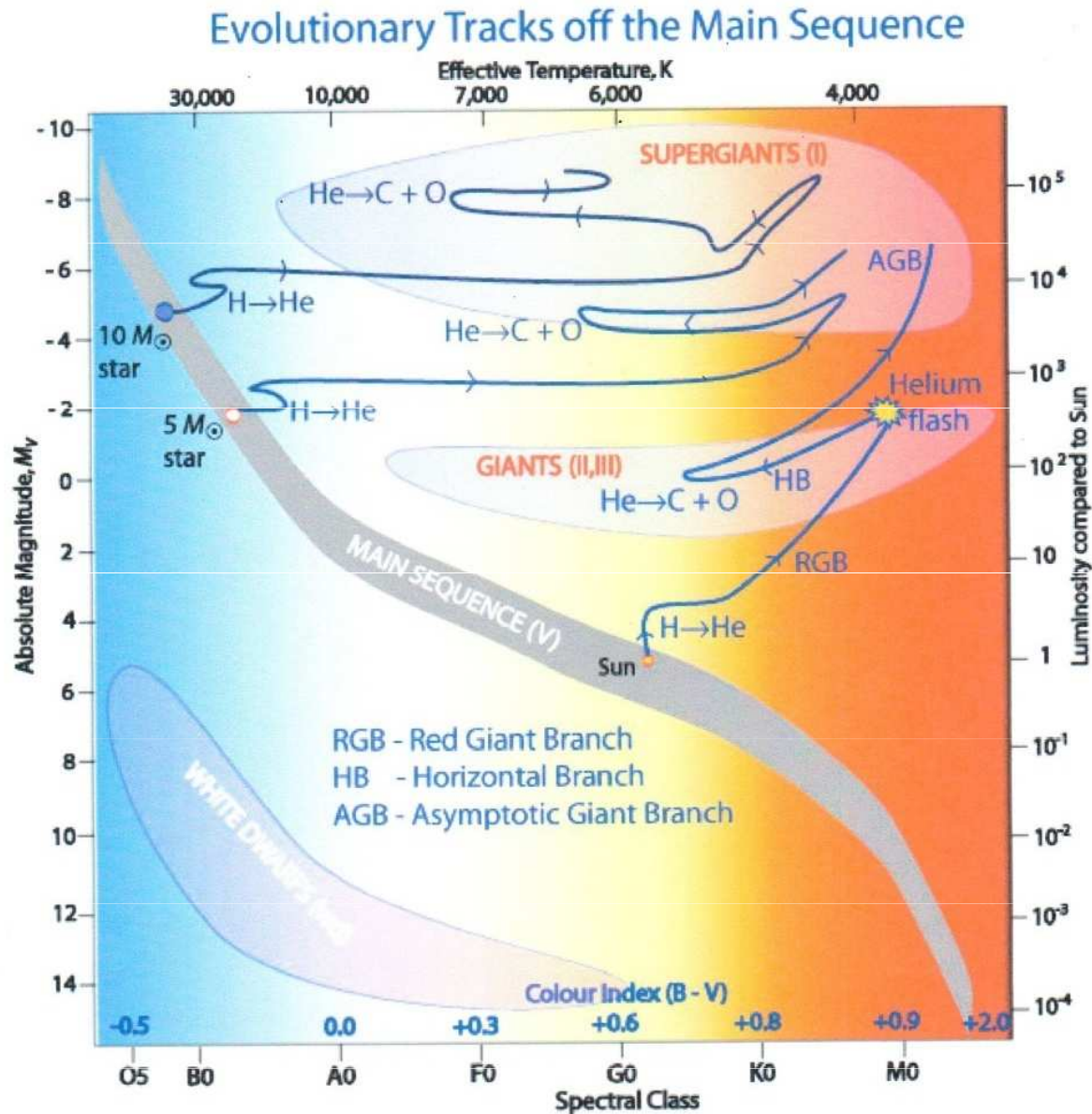




# H - R diagram

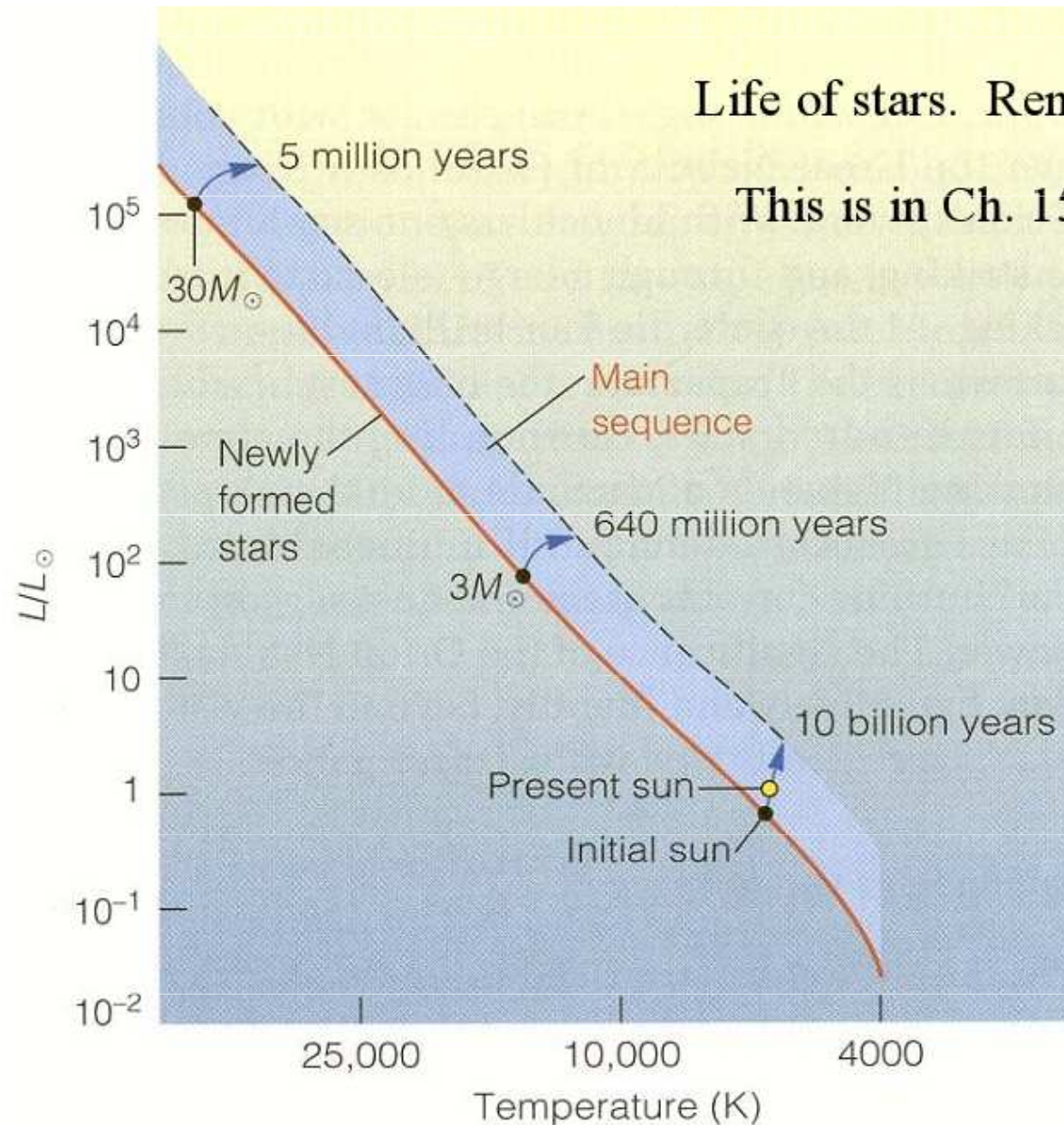


# H - R diagram - vývojový





# Vývoj na hlavní posloupnosti, posloupnost nulového stáří



$$T = \text{fuel}/\text{rate}$$

$$\text{Fuel} = M$$

$$\text{Rate} = L = M^{3.5}$$

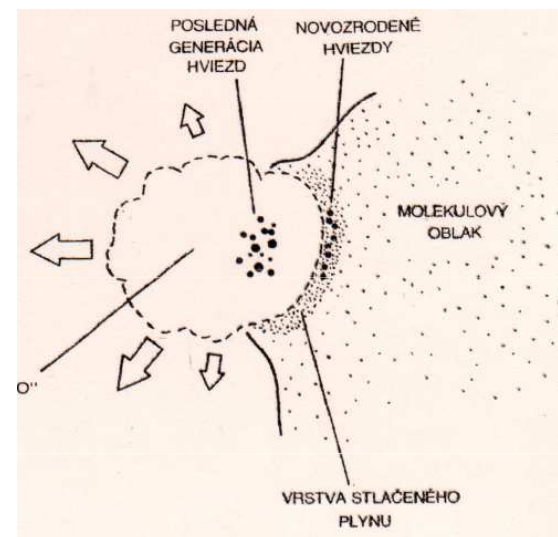
$$T = M / M^{3.5}$$

$$T = 1 / M^{2.5}$$

(In solar lifetimes,  
i.e. 10 billion years)

High Mass Stars are  
Short-Lived

# Vznik hvězd





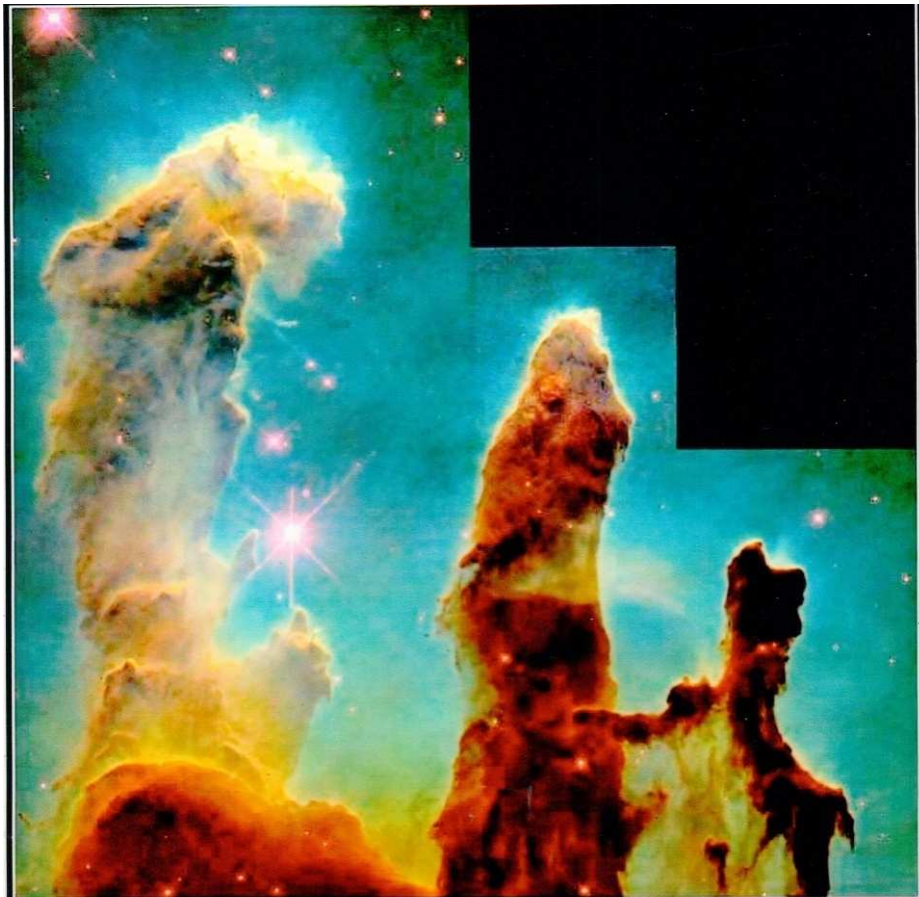
# Vznik hvězd



**molekulární vodíkový plyn v souhvězdí Štíra**

# Vznik hvězd – Orlí hnízd

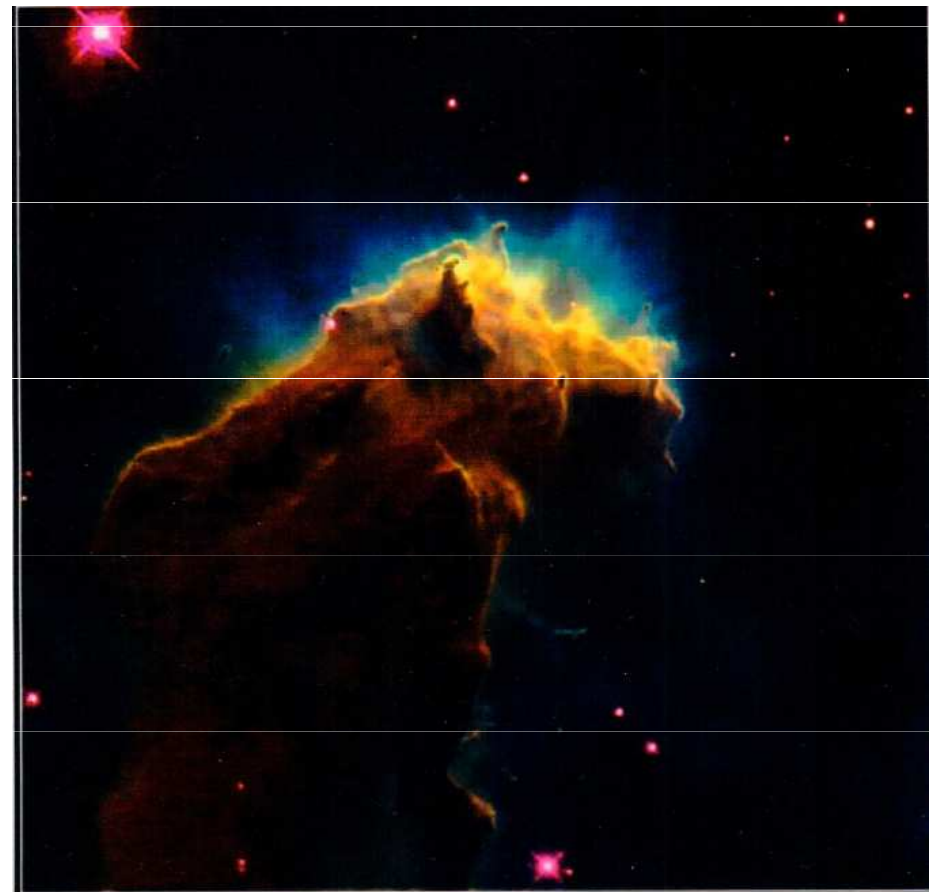
*barvy falešné...*



**Gaseous Pillars · M16**

HST · WFPC2

PRC95-44a · ST ScI OPO · November 2, 1995  
J. Hester and P. Scowen (AZ State Univ.), NASA



**Star-Birth Clouds · M16**

HST · WFPC2

PRC95-44b · ST ScI OPO · November 2, 1995  
J. Hester and P. Scowen (AZ State Univ.), NASA

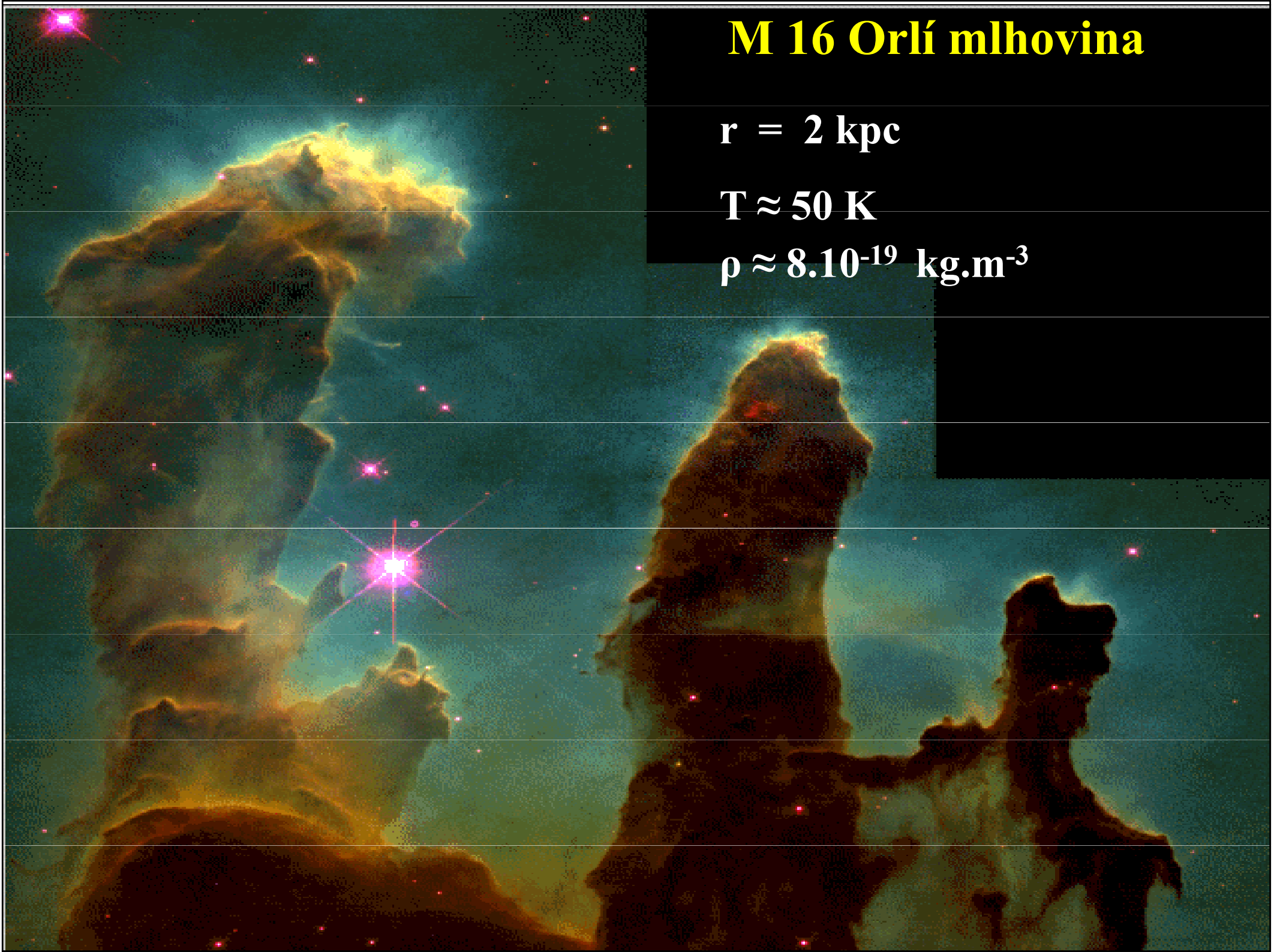


# M 16 Orlí mlhovina

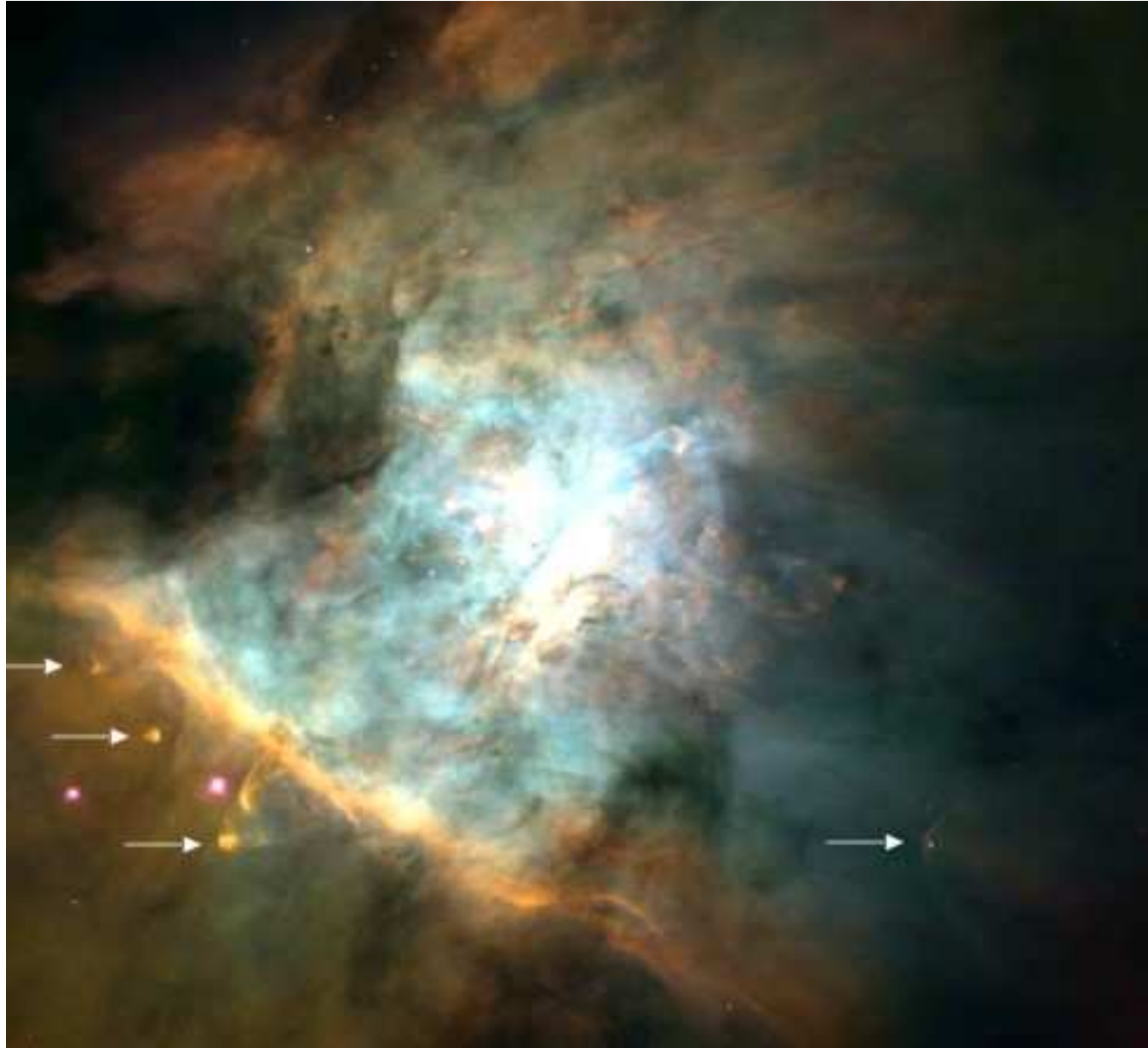
$$r = 2 \text{ kpc}$$

$$T \approx 50 \text{ K}$$

$$\rho \approx 8 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

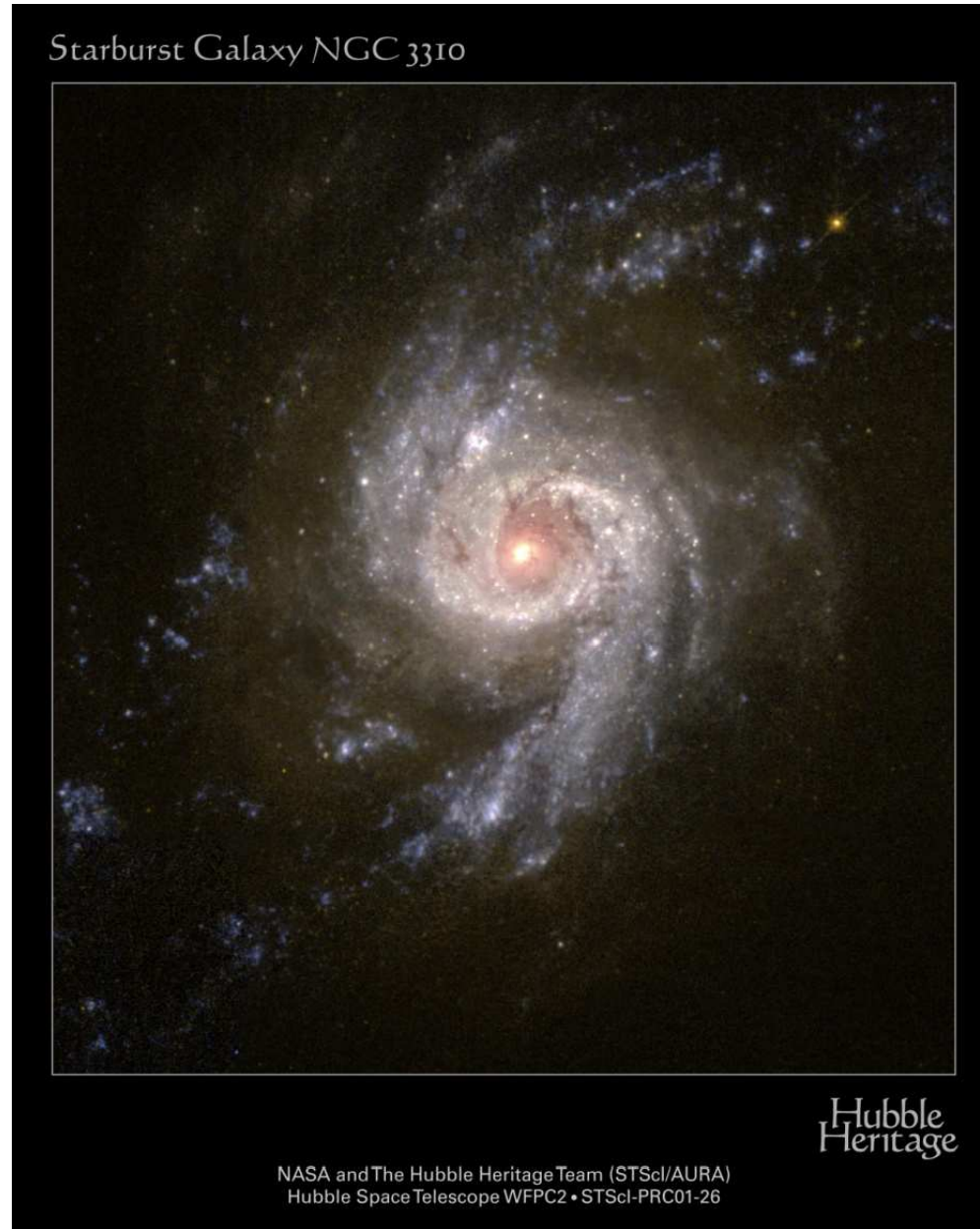


# Vznik hvězd





# Vznik hvězd v galaxii ve spirálních ramenech



# Vznik hvězd v současnosti

rozsáhlá mlhovina - částice prachu

podle hustoty 10 - 100 K

částice mají rozměry  $10^{-7}$  m, jejich

vlnová délka odpovídá infračervenému oboru, efektivní

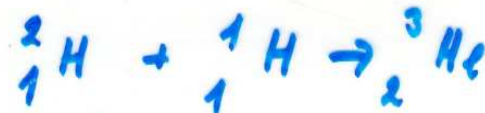
rozsáhlá

$$\lambda \sim 10^{-4} - 10^{-5} \text{ m}$$

gravitační smršťování, nárůst hustoty

a tlaku  $\Rightarrow$  podmínky pro term. reakce

$$T \sim 10^6 \text{ K}$$



nebo jiné reakce



je třeba pochopit, že ve hvězdě

při hustotách  $10^3$  K je velmi obtížné

reakce

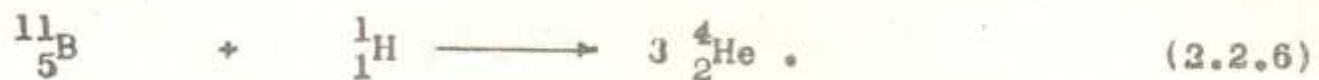
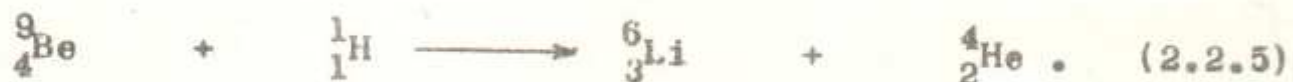
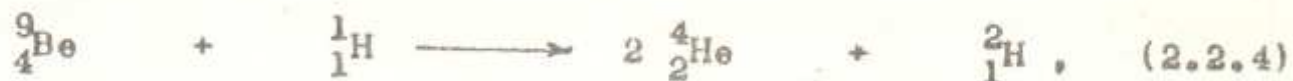
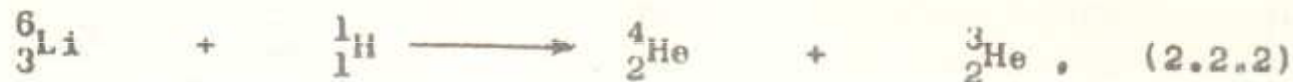


# Vznik hvězd v současnosti

Po dosažení teploty řádově  $10^6$  K v jádře začne probíhat reakce

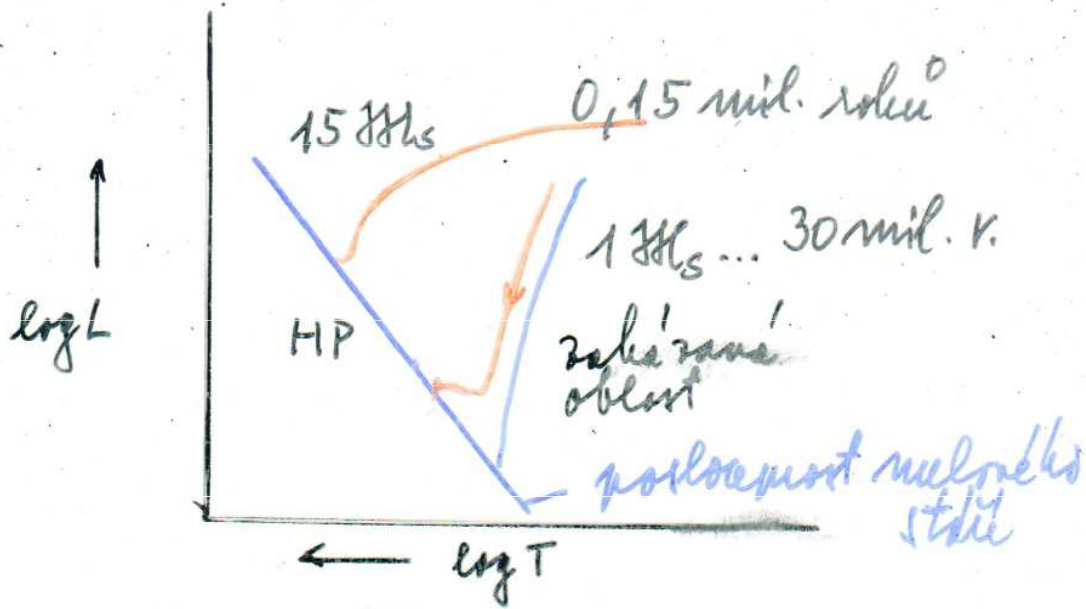


V přítomnosti lehkých prvků - lithia, berylia a bóru začne probíhat jejich spalování podle reakcí



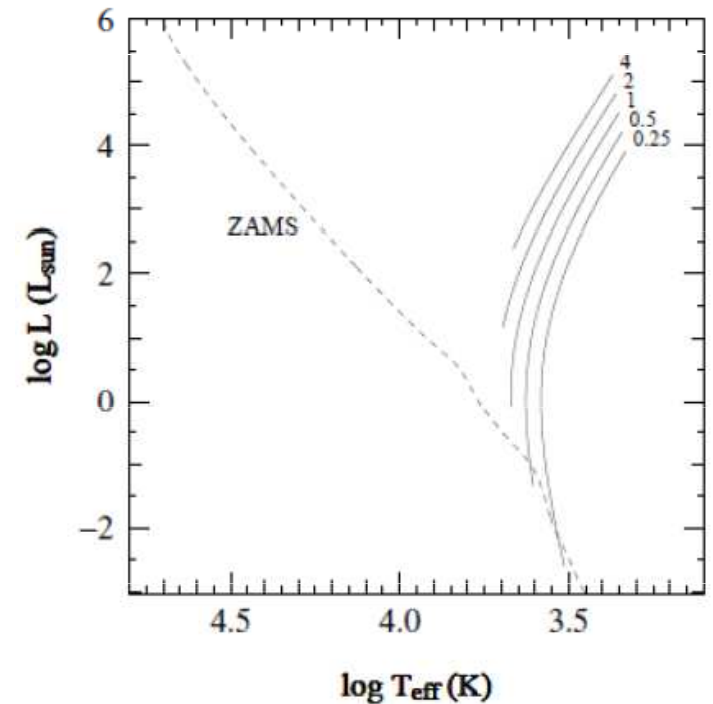
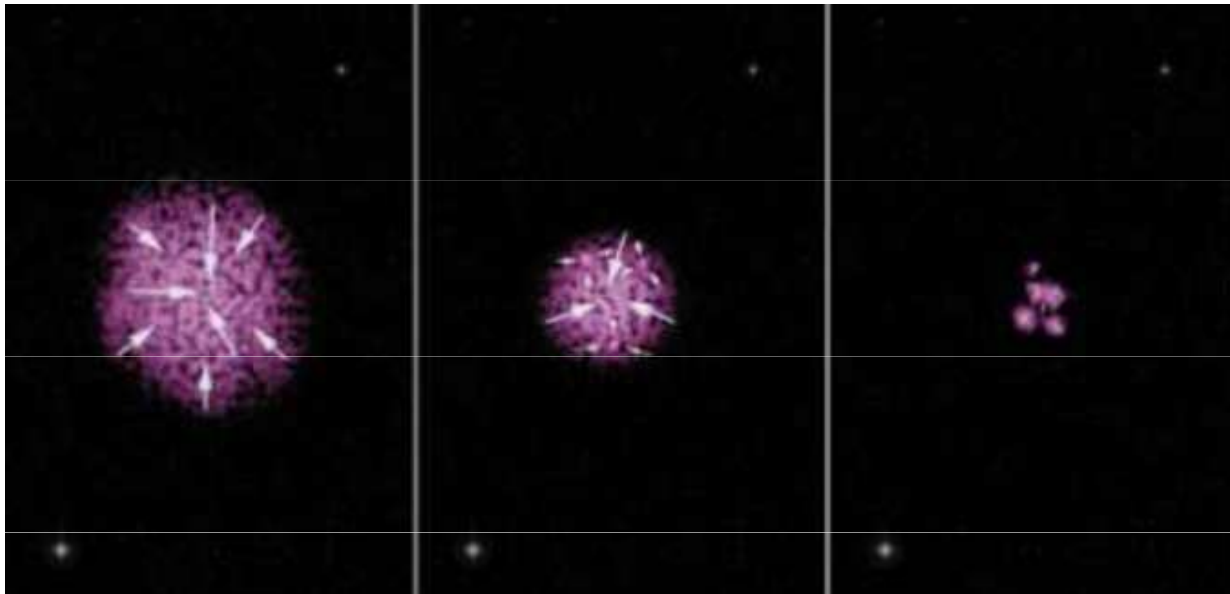
Tyto reakce mohou probíhat, protože coulombovský potenciálový val je relativně nízký a účinný průřez těchto reakcí je velký. Termonukleární reakce s deuteriem, lithiem, beryliem a bórem začínají probíhat jako první a jsou dostatečně intenzivní v prvním období vzniku hvězd, přesněji při přeměně protohvězdy ve hvězdu. Množství deuteria a lehkých prvků není velké a velmi rychle vyhoří, řádově za několik tisíc roků.

# Vznik hvězd, kaskádní fragmentace mračna

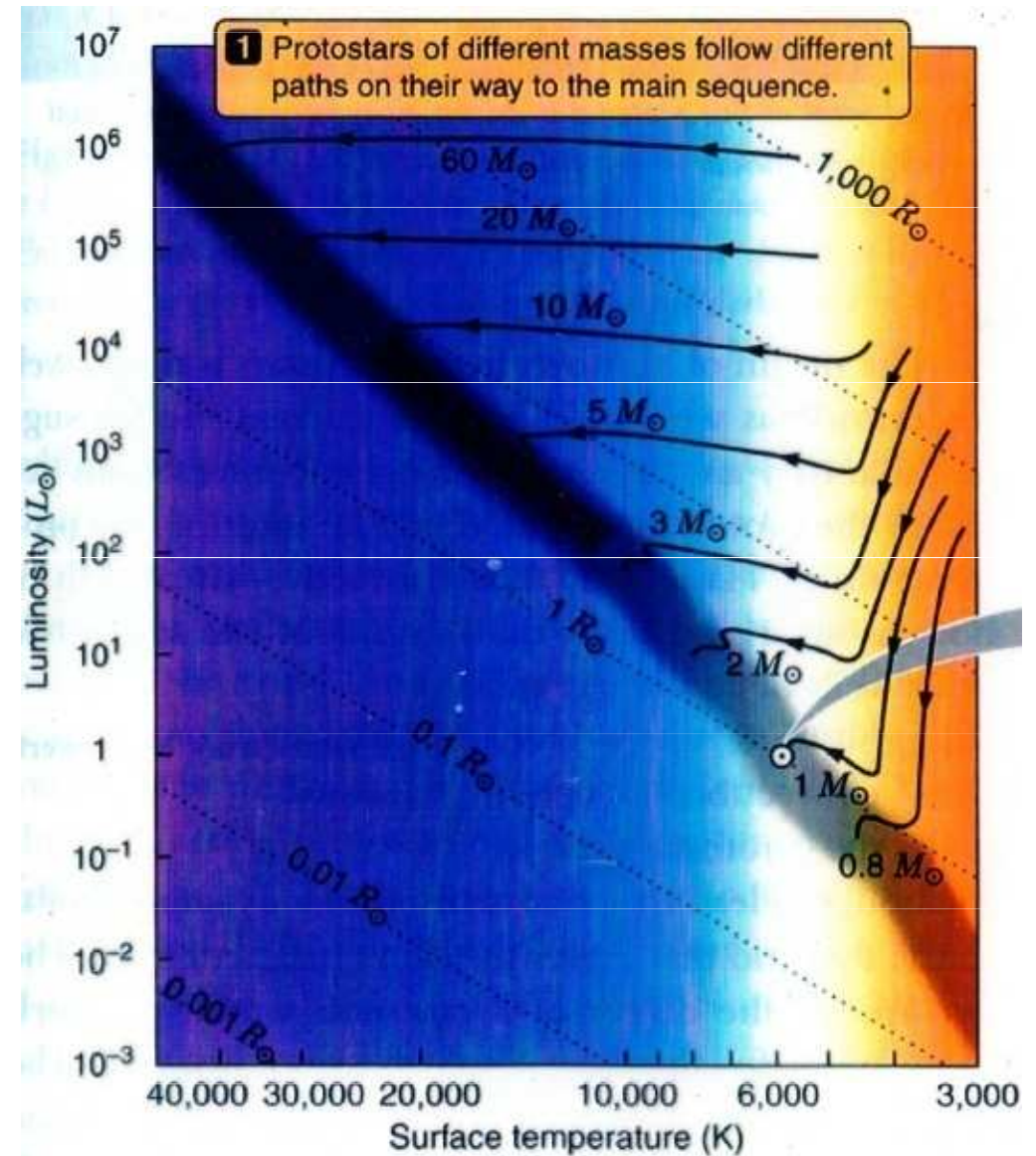
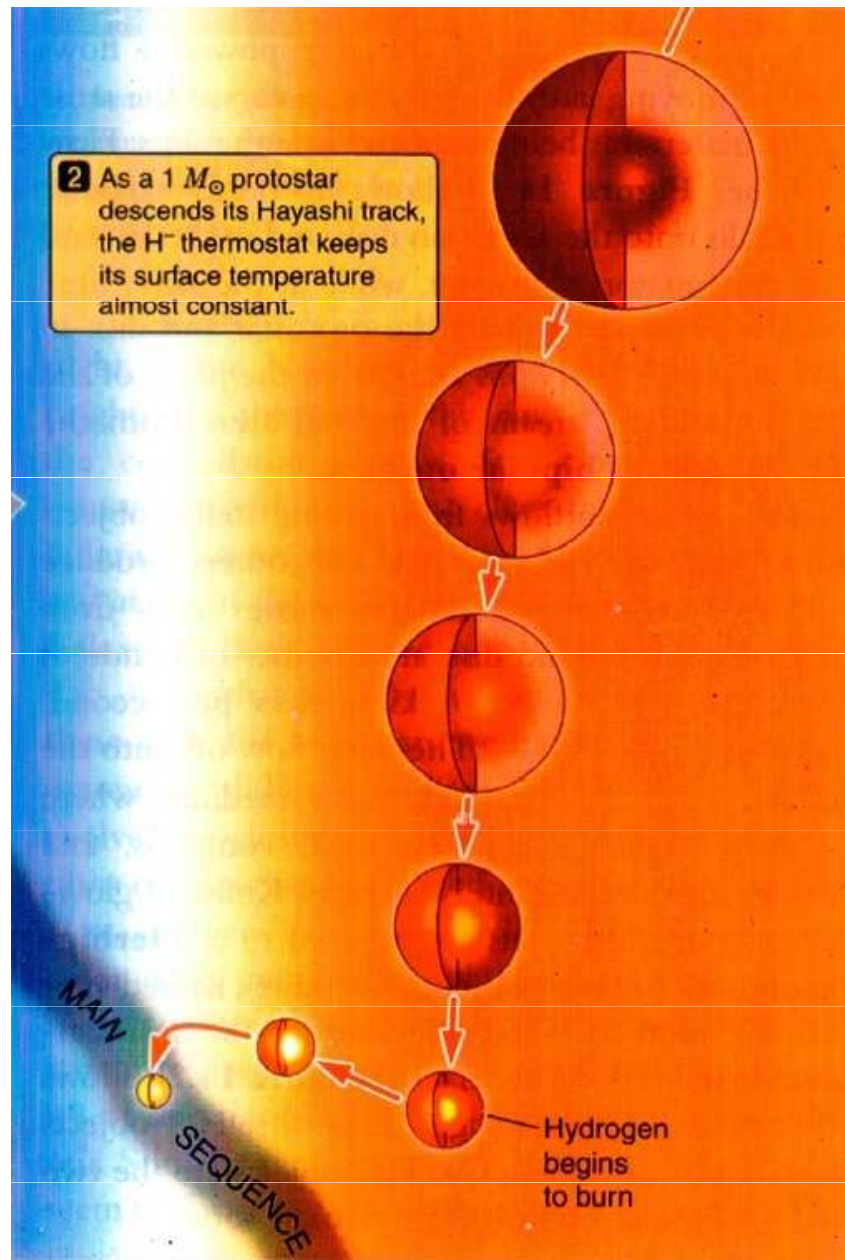


Hayashiko linie; zářivá oblast  
 nevislého rovinného stavu kvíz  
 kvazistatický stav  
 vlnitost vln

$$2 \langle W_R \rangle + \langle W_P \rangle = 0$$

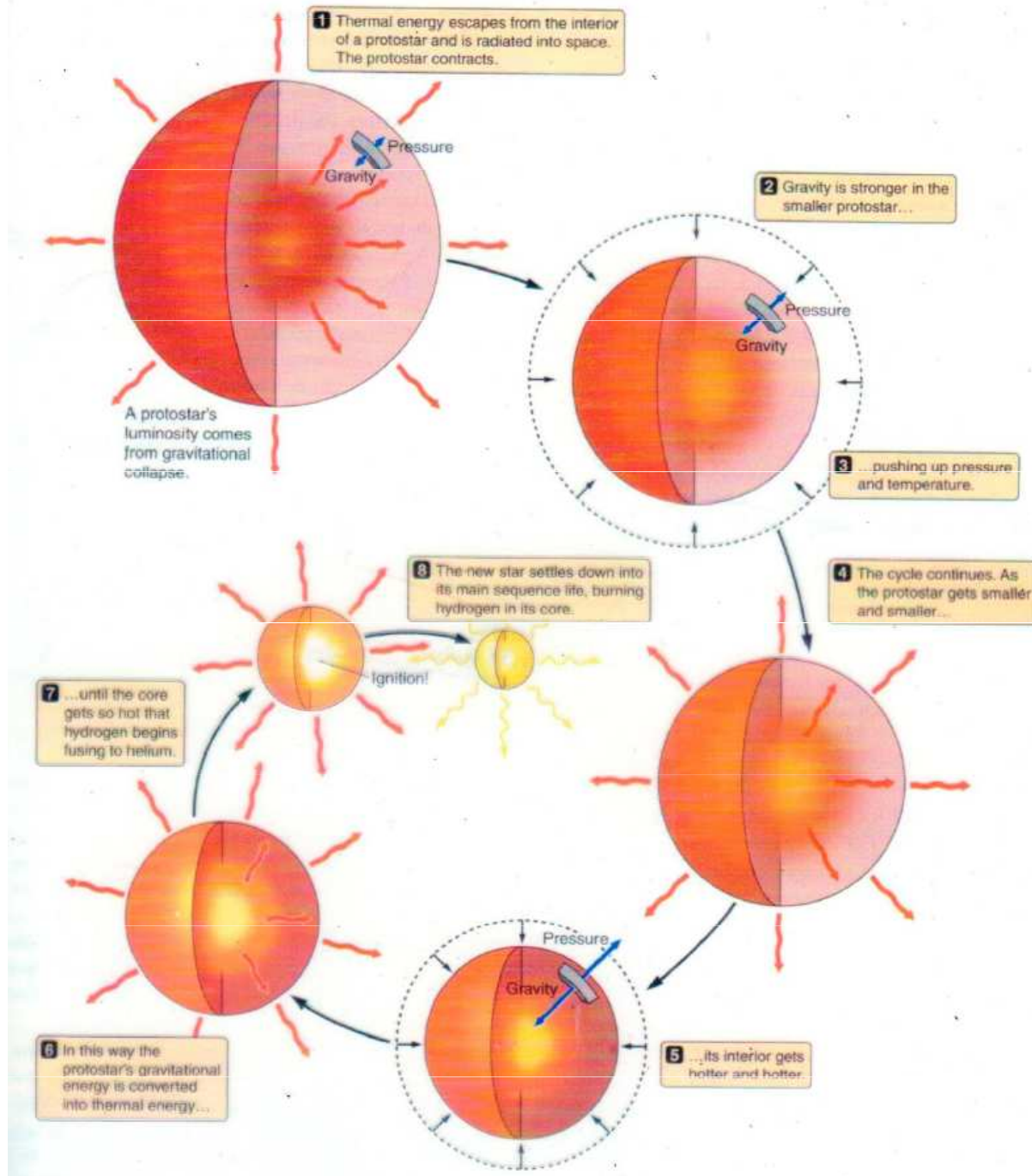


# Vznik hvězd, příchod na hlavní posloupnost





# Vznik hvězd, protohvězda





# Jeansova podmínka vzniku hvězd

H II, 10 000 K, 11 000  $M_{\odot}$

O4 45 000 K

$r = 1,1$  kpc

$d = 20$  pc ,  $D = 1^{\circ}$

$(10^6 - 10^7)$  částic v  $m^3$

**James Jeans 1877 – 1946**

co způsobuje vznik hvězd?

Gravitační síly + příznivé (fyzikální) podmínky

Jeansova délka  $R_J \sim (T/\rho)^{1/2}$



$$M_J \sim (T^3 / \rho)^{1/2}$$



# Jeansovo kritérium

## PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS.

### *I. The Stability of a Spherical Nebula.*

*By J. H. JEANS, B.A., Fellow of Trinity College, and Isaac Newton Student in the University of Cambridge.*

*Communicated by Professor G. H. DARWIN, F.R.S.*

Received June 15, —Read June 20, 1901. Revised February 28, 1902.

#### INTRODUCTION.

§ 1. THE object of the present paper can be best explained by referring to a sentence which occurs in a paper by Professor G. H. DARWIN.\* This is as follows:—

“The principal question involved in the nebular hypothesis seems to be the stability of a rotating mass of gas; but, unfortunately, this has remained up to now an untouched field of mathematical research. We can only judge of probable results from the investigations which have been made concerning the stability of a rotating mass of liquid.”

In so far as the two cases are parallel, the argument by analogy will, of course, be valid enough, but the compressibility of a gas makes possible in the gaseous nebula a whole series of vibrations which have no counterpart in a liquid, and no inference as to the stability of these motions can be drawn from an examination of the behaviour of a liquid. Thus, although there will be unstable vibrations in a rotating mass of gas similar to those which are known to exist in a rotating liquid, it does not at all follow that a rotating gas will become unstable, in the first place, through vibrations which have a counterpart in a rotating liquid: it is at any rate conceivable that the vibrations through which the gas first becomes unstable are vibrations in which the compressibility of the gas plays so prominent a part, that no vibration of the kind can occur in a liquid. If this is so, the conditions of the formation of planetary systems will be widely different in the two cases.

# Jeansovo kritérium

Pro jednoduchost vyšetřujeme stabilitu stejnorodého kulového oblaku o hmotnosti  $M$ , poloměru  $R$ , teplotě  $T$ .

$$E_p \sim -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad U \sim \frac{3}{2} NkT, \quad N = \frac{M}{\mu m_H}.$$

kde  $N$  je počet částic v oblaku.

$$V. \quad V. \quad 2U < |E_p|,$$

pro gravitační smršťování musí platit

$$\frac{3MkT}{\mu m_H} < \frac{3GM^2}{5R} \quad M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad M > M_J,$$

$$M_J = \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho} \left( \frac{5kT}{G\mu m_H} \right)^3}.$$

Oblak, má-li se gravitačně zhroutit, musí mít hmotnost větší než je Jeansova kritická hmotnost, která, jak vidíme závisí především na teplotě ( $\sim T^{3/2}$ ), méně pak i na hustotě  $\rho^{-1/2}$ .

Z toho ovšem plyne, že hvězdy mohou vznikat jen v těch nejhustějších a nejchladnějších oblastech molekulových mračen. Tyto podmínky jsou nejčastěji splněny v centrech mračen,

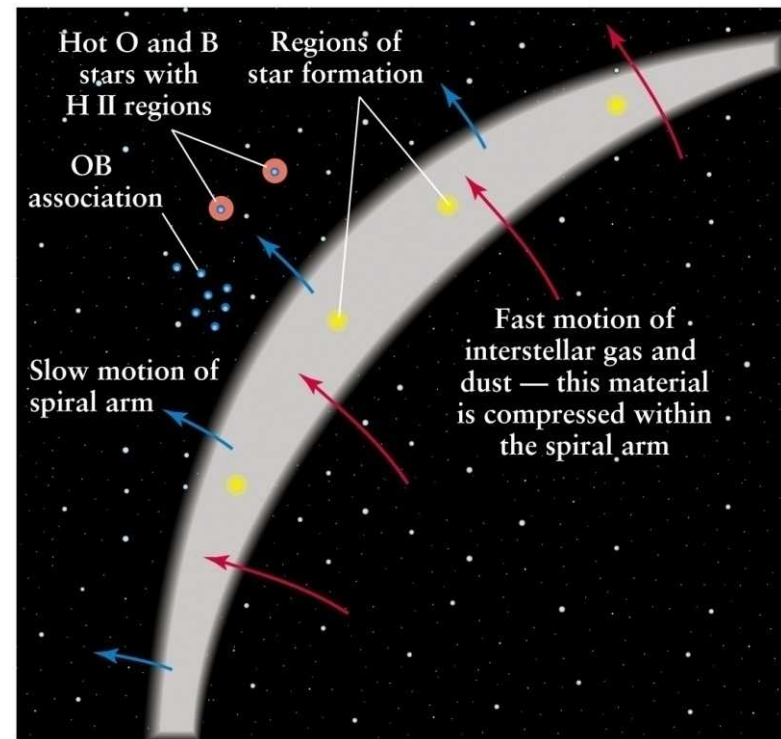
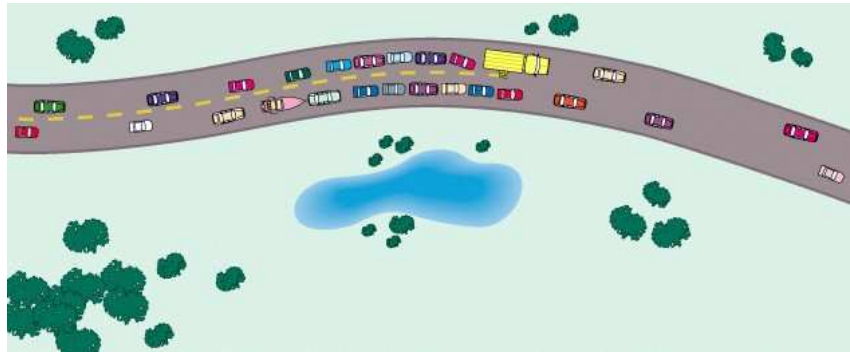


# Vznik hvězd – iniciace

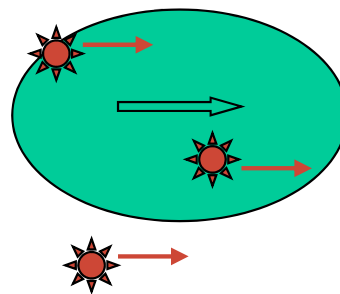
nastartování procesu gravitačního smršťování nastane při

- a) *Molekulové mračno se setkává s expandující oblastí horkého ionizovaného vodíku*
- b) *Exploze blízké supernovy – rázová vlna*
- c) *Průchod mračna hustotní vlnou ve spirální struktuře galaxie*
- d) *Nepružná srážka galaxií*

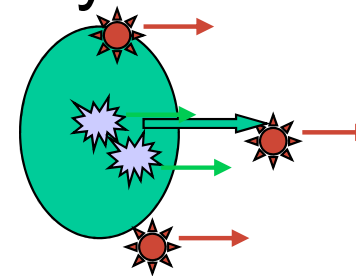
# Vznik spirální struktury u galaxií, spirální hustotní vlny - vznik hvězd



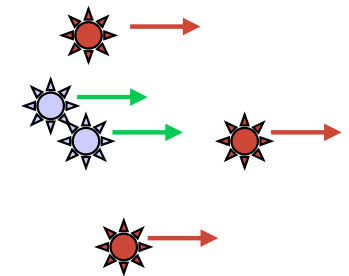
## Gas compression in density wave



malá hustota  
plynu



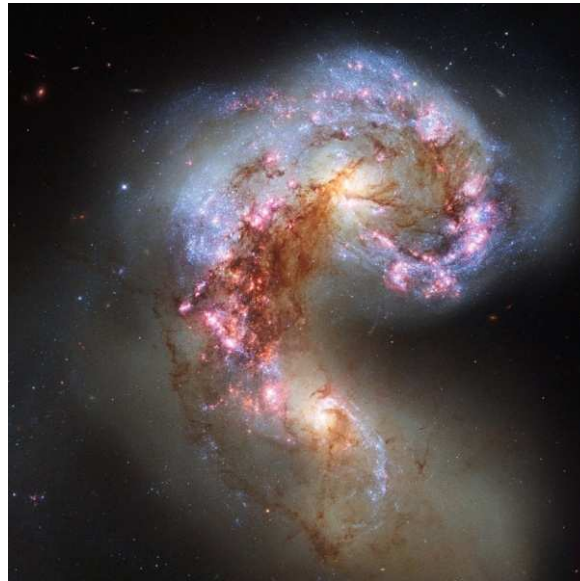
vznik  
nových  
hvězd



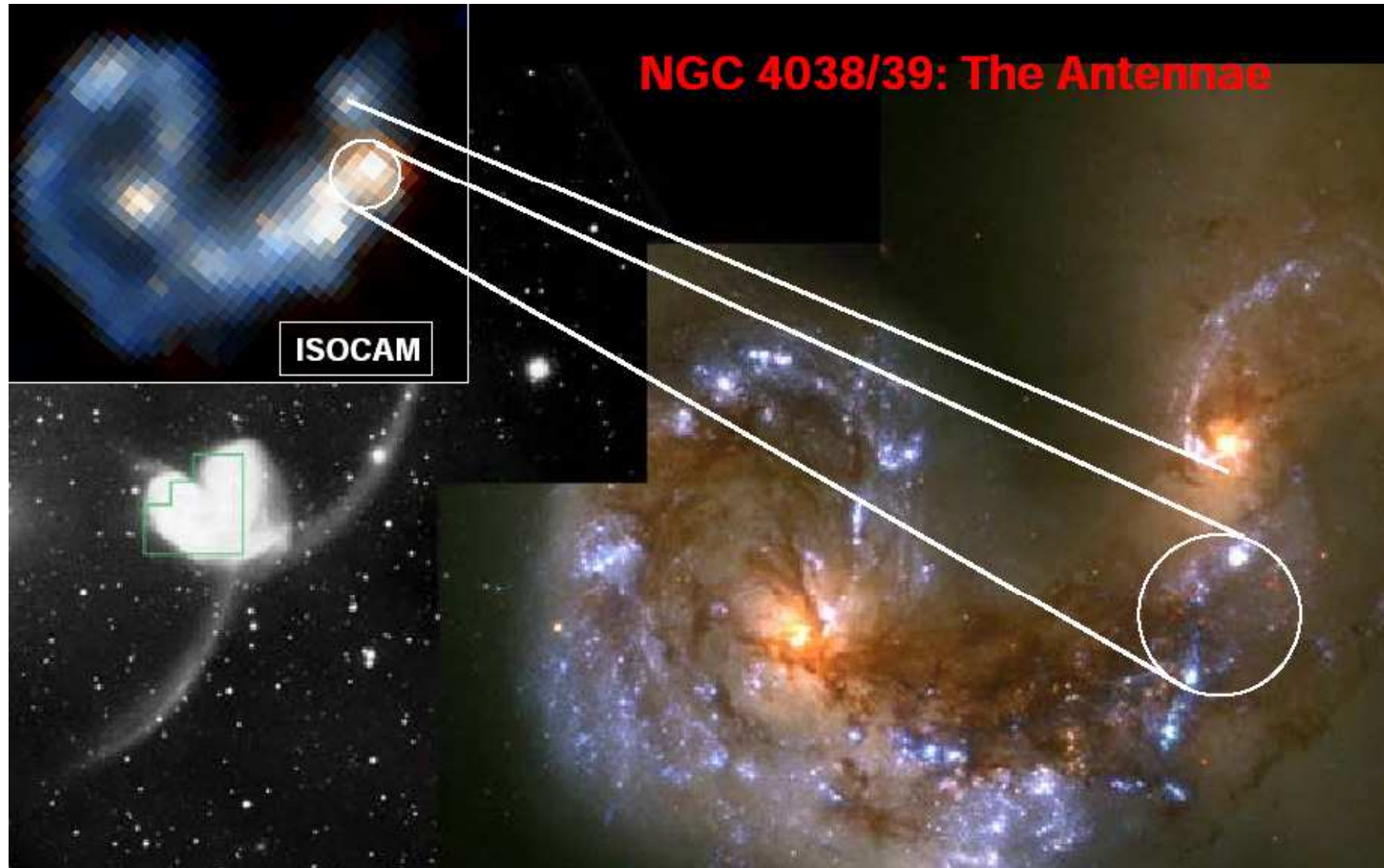
nové hvězdy  
se starými



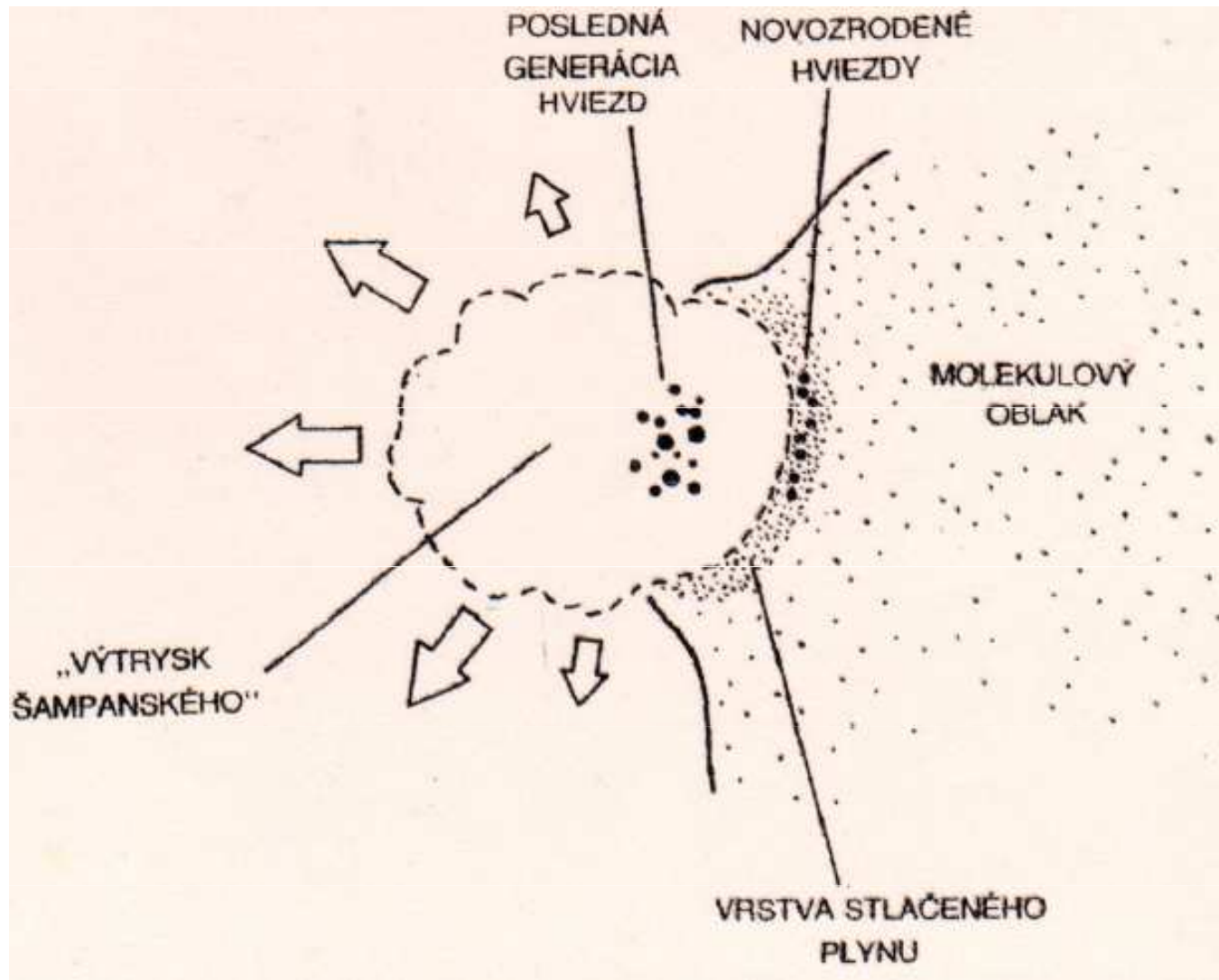
# Srážky galaxií



# Interagující galaxie, skupinový vznik hvězd



# Molekulové mračno

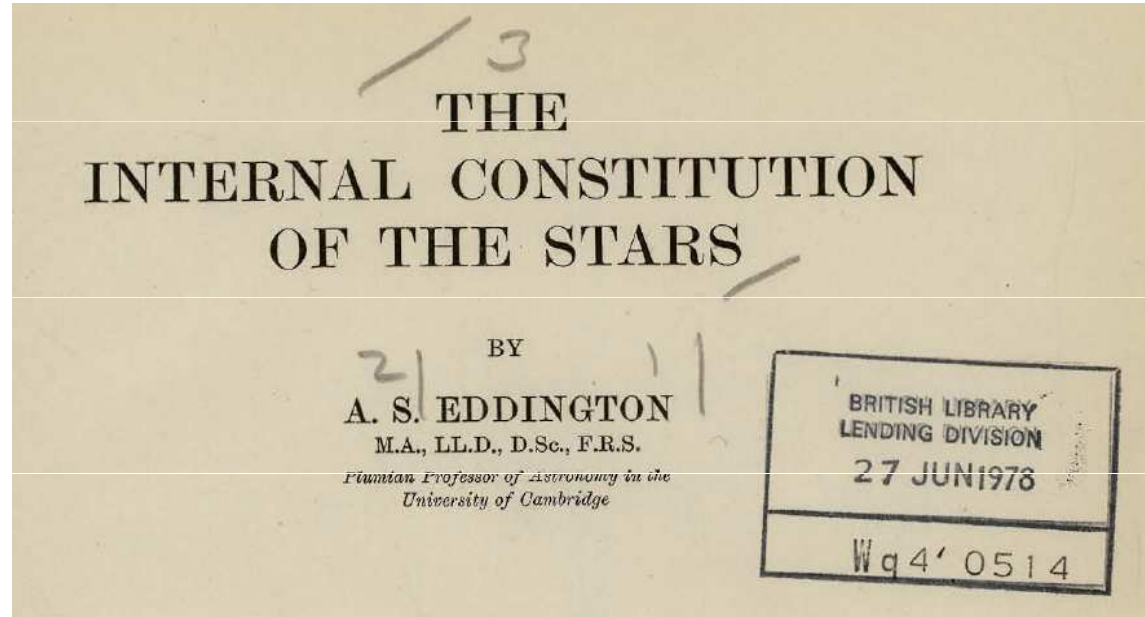




# Fyzikální podmínky v nitru hvězd - HP



**A.S. Eddington 1882-1944:**  
*Stavba nitra hvězd 1926*



fyzikální představy o nitru Slunce,  
hvězd, výpočty

$$T_c \approx 1,5 \cdot 10^7 \text{ K}$$

$$P_c \approx 10^{16} \text{ Pa}$$

neznal konkrétní zdroje energie hvězd

*Není nic jednoduššího, než jsou hvězdy*

# Hvězdy hlavní posloupnosti

nejdelší období vývoje hvězd, doba dána hmotností, hvězdy s hmotností řádově  $10 M_S$  setrvají na hlavní posloupnosti - HP několik milionů roků, hvězdy s hmotností  $1 M_S$  asi 10 miliard roků,

při  $2 M_S$  6krát kratší doba setrvání na HP než Slunce,

při  $10 M_S$  300krát kratší doba setrvání na HP než Slunce

$$t_{HP} \sim \frac{1}{M^n}, \text{ kde } n (2-3)$$

zdrojem energie termionukleární syntéza jader atomu vodíku na jadra atomu helia,  
*p-p řetězec, CNO cyklus*

*hvězdy - plynné koule v rovnovážném stavu, velký počet částic, vzájemně se přitahujících, výsledná přitažlivá síla je dostatečně velká, aby je udržela pohromadě*

# Tlak v nitru hvězd

## Tlak v nitru hvězd

výrazná ionizace hvězdné látky, model ideálního plynu, tlak plynu

$$P_g = \frac{\rho}{\mu_r} A T, \text{ pozor } A \dots \text{plynová konstanta, } 8,31 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

relativní hmotnostní zastoupení vodíku  $X$ , helia  $Y$ , těžších prvků  $Z$ , platí  $X + Y + Z = 1$

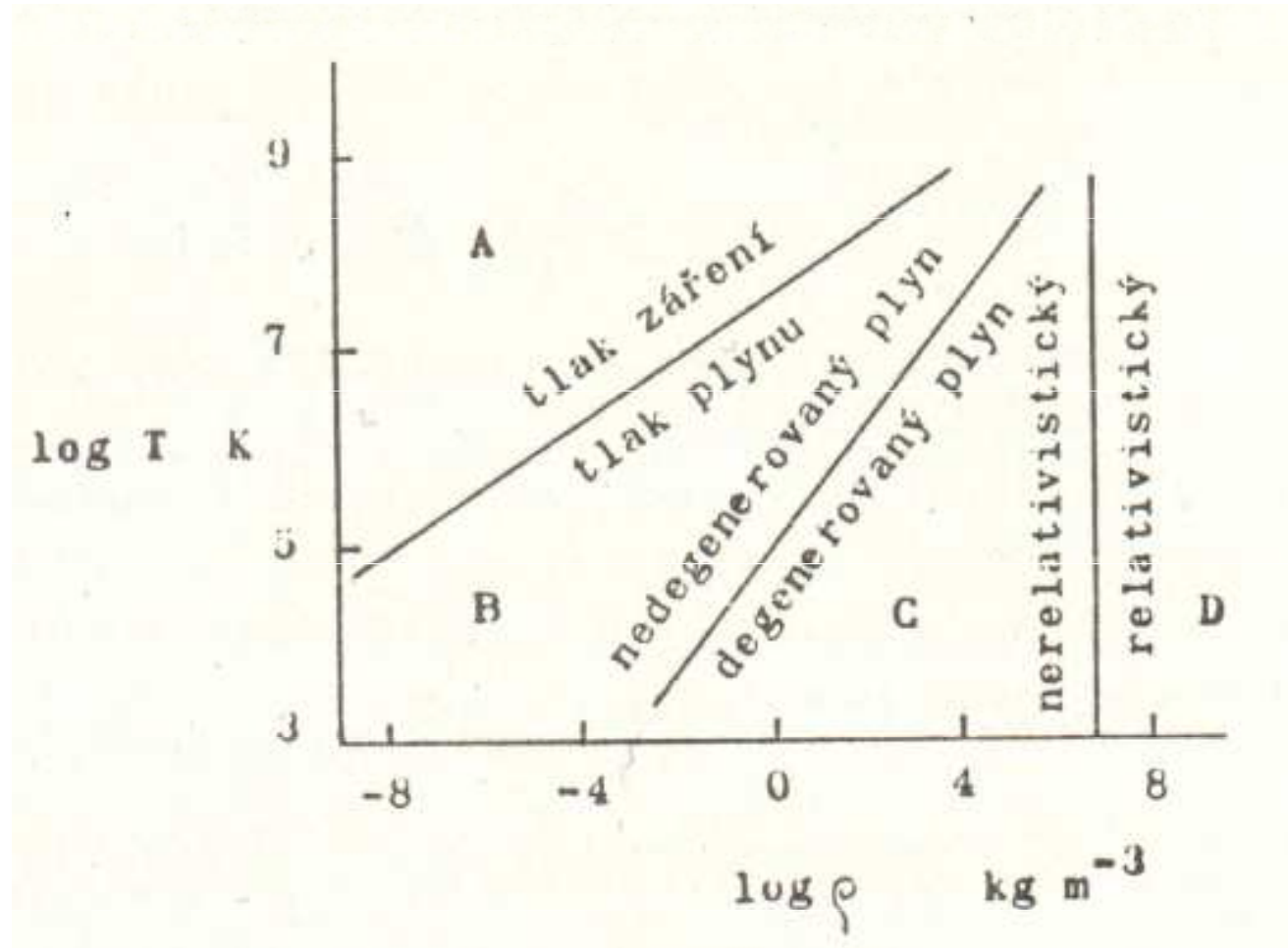
zjednodušující předpoklad, jádra těžších prvků obsahují přibližně 2krát více protonů a neutronů než je elektronů v atomu, střední relativní hmotnost připadající na jednu částici, střední molární hmotnost

$$\mu_r = \frac{2}{3X + 0,5Y + 1}$$

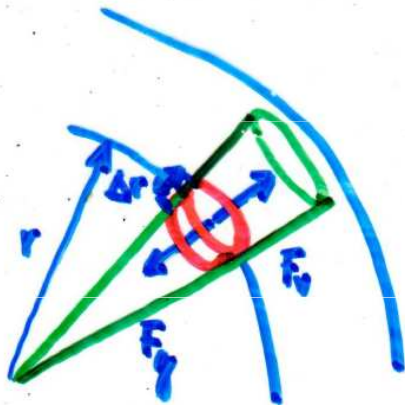
tlak záření  $P_r = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{c} T^4$ , celkový tlak  $P = P_g + P_r + P_e$



# Závislost tlaku na teplotě a hustotě



# Rovnice hydrostatické rovnováhy



váha v nitru kůrky  
podstava  $\Delta S$ , výška  $\Delta r$   
hmotnost  $\rho(r)\Delta S\Delta r$

$$F_g = G \frac{2\pi(r)\rho(r)\Delta S\Delta r}{r^2}$$

$\Rightarrow$  rozdíly tlaku na spodní polokoule

$$\Delta p = -G \frac{2\pi(r)\rho(r)\Delta r}{r^2}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} = -G \frac{2\pi(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\Delta 2\pi(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \Delta r$$

gradient celkového tlaku  
= součinu gravitačního  
zrychlení a hustoty

$$\Delta p = -g\rho\Delta r$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta r} < 0$$

tlak od středu kůrky klesá!

# Odhad tlaku v nitru hvězd, Slunce

Provedeme přibližný výpočet tlaku v centrální oblasti nitra hvězd. Vyjdeme z rovnice hydrostatické rovnováhy, jenž vyjadřuje gradient tlaku ve hvězdě:

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho. \quad (3.1.2.1)$$

Objem kulové vrstvy omezené kulovými plochami o poloměrech  $r$ ,  $r + dr$  je roven

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (3.1.2.2)$$

a její hmotnost je

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (3.1.2.3)$$

Z rovnic (3.1.2.1) a (3.1.2.3) obdržíme

$$dP = - \frac{G M_r}{4\pi r^2} dM_r. \quad (3.1.2.4)$$

Integrací rovnice od středu k povrchu hvězdy dostaneme

$$P_c = \frac{G}{4\pi} \int_0^R \frac{M_r}{r^4} dM_r. \quad (3.1.2.5)$$

Protože poloměr hvězdy  $R$  je větší než libovolný poloměr  $r$  kulové vrstvy, musí platit

$$P_c > \frac{G}{4\pi} \int_0^R \frac{M_r}{r^4} dM_r = \frac{G}{4\pi R^4} \int_0^R M_r dM_r = \frac{G M^2}{8\pi R^4}. \quad (3.1.2.6)$$



# Viriálová věta

In an isolated system of particles that exert forces on each other describable by scalar potentials, the system's moment of inertia  $I$ , total kinetic energy  $K$ , total potential energy  $U$  and total mechanical energy  $E$  are related by

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + U = K + E$$

Suppose further that the position configuration of the particles is either periodic (e.g. orbital motion) or statistically constant over time (e.g. thermal equilibrium). Then

$$\left\langle \frac{d^2 I}{dt^2} \right\rangle = 0,$$

# Odhad teploty v nitru hvězd, Slunce, viriálová věta

and the system's average total kinetic energy  $\langle K \rangle$  and average total potential energy  $\langle U \rangle$  are related by

$$\langle K \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle = -E \quad .$$

centrál. teplota:

$$\left\langle \frac{3}{2} N k T \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \right\rangle$$

$$\Rightarrow T \approx 10^7 \text{ K}$$

$$\langle W_K \rangle = -\frac{1}{2} \langle W_P \rangle$$



# Gravitační termodynamika hvězd

termonukleární reakce **vodík** → **helium**

rovnovážný stav: **hydrostatická a tepelná rovnováha**, ustálené hodnoty kinetické a potenciální energie

termonukleární reakce → nárůst kinetické energie hvězd

termodynamická soustava hvězdy - dva stupně volnosti: teplotu, **objem**:  
dodání tepla - objem narůstá, energie koná práci proti gravitačním silám  
→ transformuje se do energie gravitačního pole

podle V.V. - dvojnásobek původně dodané –  $\langle W \rangle = \frac{1}{2} \langle W_p \rangle = -\langle W_k \rangle$

**kinetická energie klesá, hvězda se ochlazuje**

# Hvězdy - přírodní termostat

Hlavní posloupnost – stav tepelné rovnováhy, zářivý výkon konstantní, energie produkovaná v nitrech = vyzařovaná z povrchu  $L_{tjad} = L$  .

Porušení tepelné rovnováhy - změna celkové energie  $\frac{dW}{dt} = L_{tjad} - L$  .

Zvýšení energie termonukleárními reakcemi  $L_{tjad} > L \rightarrow \frac{dW}{dt} > 0$  ,

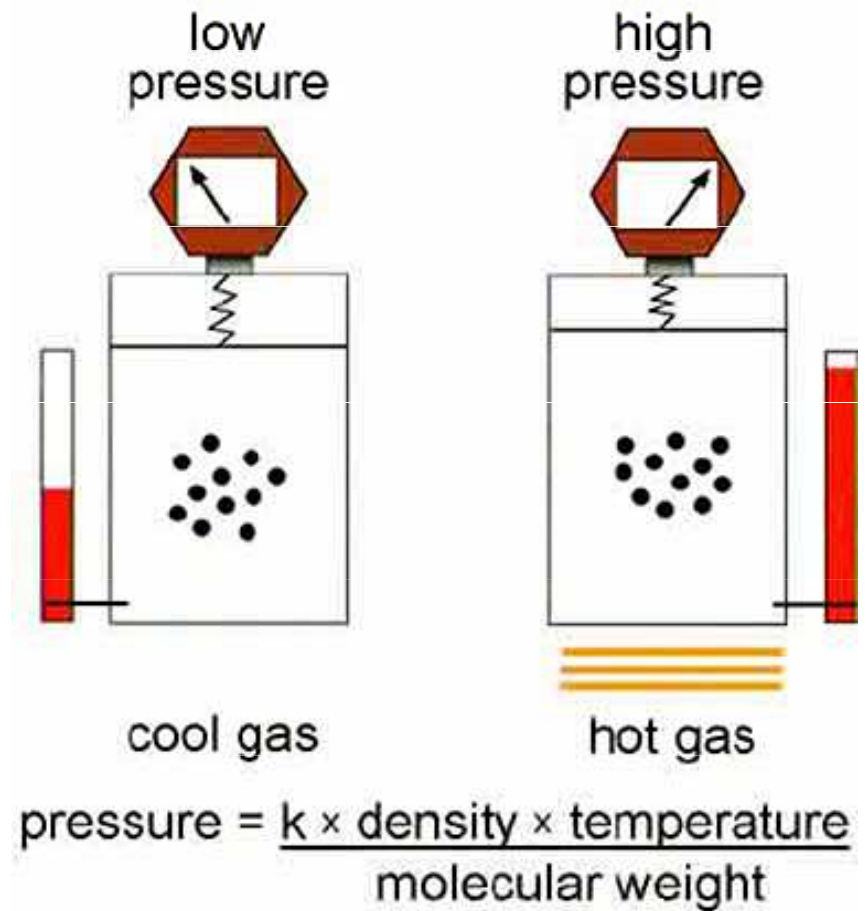
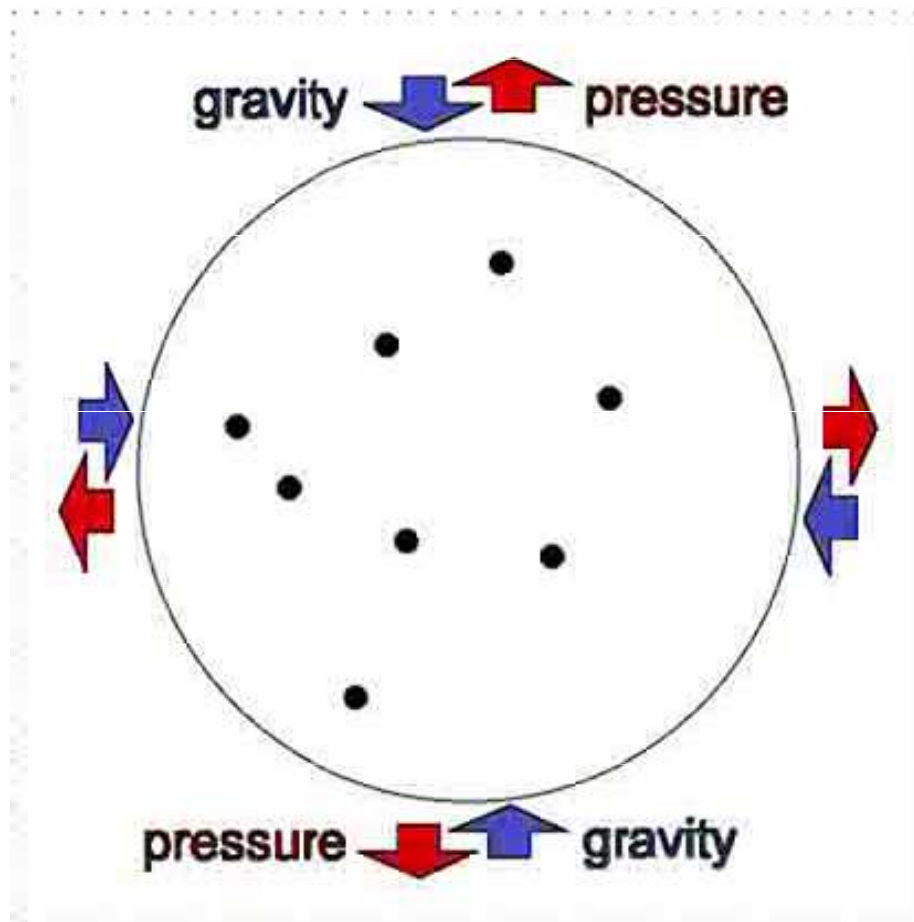
hvězdy zvětšují objem, kinetická energie částic se snižuje jakož i teplota. Následně poklesne tempo termonukleárních reakcí, silně závislé na teplotě - hvězdy se vrátí do rovnovážného stavu.

Naopak, při snížení produkce energie  $L_{tjad} < L \rightarrow \frac{dW}{dt} < 0$  .

Kinetická energie částic narůstá, objem hvězd zmenšuje, budou se smršťovat. Teplota nitra se zvýší, tempo termojaderných reakcí také.

**Hvězdy pracují jako přírodní termostat.**

# Fyzikální podmínky v nitru hvězd





# Gravitační termodynamika hvězd

- záporná měrná tepelná kapacita hvězdy jako celku, při dodání tepla se ochlazuje
- stabilita vůči tepelným poruchám → stabilita termonukleárních reakcí, pozvolné hoření nevede k explozi, zářivý výkon hvězd konstantní
- myšlenkové úvahy o energii - V. V. → termodynamické vlastnosti hvězd
- na středoškolské úrovni kvalitativní předvídání fyzikálního chování hvězd → porozumění problematice

-

Domański, J.: Twierdzenie o wiriale w nauczaniu astronomii. Fizyka w Szkole **24** (1978), č. 3, s. 127 - 131.

Štefl, V.: Viriálová věta ve vyučování astrofyzice na gymnáziu. PMFA **25** (1980), č. 6, s. 348 - 352.

Šolc, M., Švestka, J., Vanýsek, V.: Fyzika hvězd a vesmíru. SPN, Praha 1983.

# Rovnice stavby hvězd

stavbu soustava čtyř nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, která vzájemně váže čtyři neznámé funkce stavových veličin  $P(r)$ ,  $T(r)$ ,  $M(r)$  a  $L(r)$ :

**rovnice hydrostatické rovnováhy**

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \rho \frac{M(r)}{r^2} \quad \text{Okrajové podmínky}$$

$$\text{nitro: } r = 0, M(0) = 0, L(0) = 0$$

**rovnice kontinuity**

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \text{povrch: } r = R, L_r = L, M_r = M, T = T_{\text{ef}}$$

$$P = 0, \rho = 0$$

**rovnice zářivé rovnováhy**

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon,$$

**rovnice přenosu energie zářením,**

**pomalý pokles teploty**

$$\text{V případě, že: } \frac{d(\ln P)}{d(\ln T)} > \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa \rho L(r)}{64\pi \sigma T^3 r^2},$$

**rovnice přenosu energie konvekcí,**

**rychlý pokles teploty**

$$\text{jinak: } \frac{dT(r)}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP(r)}{dr}.$$

# Rovnice stavby hvězd

Hydrostatic equilibrium:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2}$$

Mass conservation:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Energy generation:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon$$

Energy transport:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3 \bar{\kappa} \rho}{16\sigma r^2} \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

Adiabatic temperature gradient:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{rad}} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\mu}{k} \frac{GM_r}{r^2}$$

Convection occurs if:

$$\frac{T}{P} \frac{dP}{dT} < \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Equations of state

Pressure:

$P = P(\rho, T, \text{composition})$  in general

$$= \frac{\rho k T}{\mu} + \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad \text{throughout most normal stars}$$

Opacity:

$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(\rho, T, \text{composition})$  in general

Energy generation:

$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \text{composition})$  in general

Boundary conditions:

$$\left. \begin{array}{l} M_r \rightarrow 0 \\ L_r \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ as } r \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} T \rightarrow 0 \\ P \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ as } r \rightarrow R_{\text{star}}$$

$M_r, L_r$ : mass or luminosity contained within radius  $r$ .



# Rovnice mechanické rovnováhy - Poissonova

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{G M_r}{r^2}$$

$$dP + \rho g dr = 0$$

$$g = G \frac{M_r}{r^2} =$$

$$= \frac{G}{r^2} \int 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dP}{dr} + \rho \frac{G}{r^2} \int 4\pi r^2 = 0$$

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -G \int 4\pi r^2 \rho dr$$

Poissonova rovnice:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) + 4\pi G \rho = 0$$

Nutno zadat zvlášť mezi složkami a hustotou

# Rovnice stavby hvězd, polytropní závislost

Diferenciální rovnice (3.2.1.1) a (3.2.1.3) při zadané hmotnosti a poloměru hvězdy určují její mechanickou rovnováhu. Pro další výpočty soustavu obou rovnic upravíme do rovnice jedné, ve které je obsažena závislost mezi tlakem a hustotou v nitru hvězdy ve vzdálenosti  $r$  od středu

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho. \quad (3.2.1.6)$$

K řešení rovnice je nutno zadat závislost mezi tlakem a hustotou. Za předpokladu, že přenos energie z nitra hvězd směrem k povrchu se uskutečňuje konvekcí, je závislost vyjádřena adiabatickým zákonem, viz vztah (3.1.4.5). Závislost je možno použít rovněž pro hvězdy nacházející se ve stavu zářivé rovnováhy.

Pro větší obecnost lze závislost mezi tlakem a hustotou vyjádřit jako rovnicí polytropy

$$P = K \rho^{\gamma^*}, \quad (3.2.1.7)$$

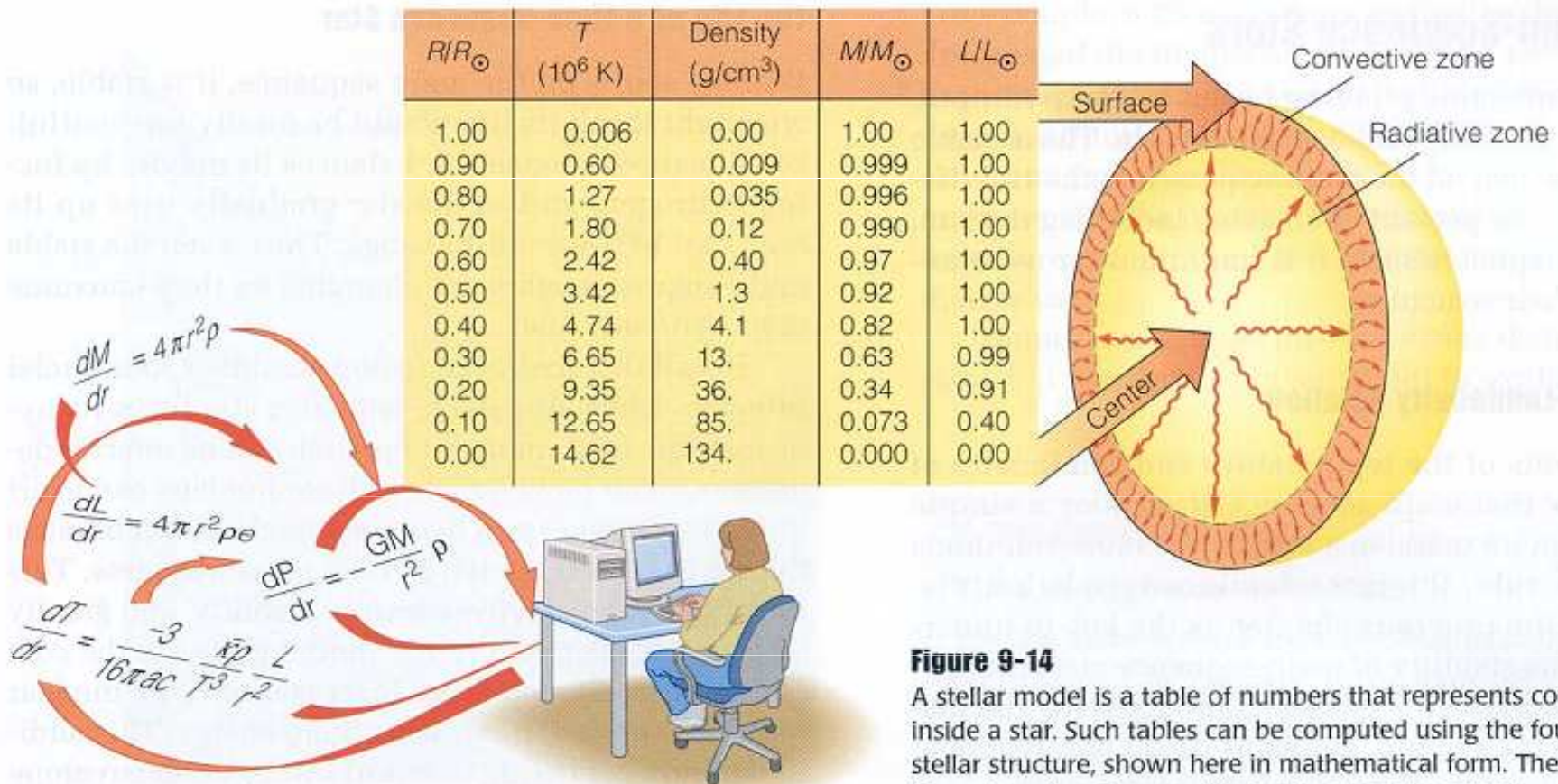
kde  $K$  je konstanta.  $\gamma^*$  lze zapsat

$$\gamma^* = 1 + \frac{1}{n}, \quad (3.2.1.8)$$

$n$  značí index polytropy. Toto matematické vyjádření má astrofyzikální význam, odpovídá určitému modelu hvězd. Pro reálné hvězdné modely platí  $1,5 \leq n \leq 5$ . Prostřednictvím rovnice polytropy (3.2.1.7) lze numerickými metodami obdržet řešení rovnice (3.2.1.6). S rostoucím indexem polytropy se zvětšuje stupeň koncentrace hmotnosti ke středu hvězd. Pro plně konvektivní model při  $n = 1,5$  je  $\rho_c = 6 \bar{\rho}$ , v případě  $n = 2$  je  $\rho_c = 11,4 \bar{\rho}$  a jestliže  $n = 3$  je  $\rho_c = 54,2 \bar{\rho}$ .

# Rovnice stavby hvězd

- I. Conservation of Mass
- II. Conservation of Energy
- III. Hydrostatic Equilibrium
- IV. Energy Transport



**Figure 9-14**

A stellar model is a table of numbers that represents conditions inside a star. Such tables can be computed using the four laws of stellar structure, shown here in mathematical form. The table in this figure describes the sun. (Illustration design by author)



# Modely hvězd – vstup na HP

Model hvězdy s hmotností  $1 M_{\odot}$  v počátečním stádiu hlavní posloupnosti podle M. Schwarzschilda. Chemické složení na povrchu  $X = 0,73$ ,  $Y = 0,25$ ,

$$\frac{M}{M_{\odot}} = 1, \quad \frac{L}{L_{\odot}} = 0,578, \quad \frac{R}{R_{\odot}} = 1,021$$

$\frac{r}{R}$	$\frac{M_r}{M}$	$\frac{L_r}{L}$	log P	log T	log $\rho$
0,00	0,000	0,000	16,130	7,093	4,888
0,10	0,052	0,348	15,996	7,048	4,796
0,20	0,292	0,893	15,616	6,934	4,530
0,30	0,594	0,994	15,060	6,792	4,116
0,40	0,805	1,000	14,426	6,646	3,628
0,50	0,916	1,000	13,770	6,501	3,117
0,60	0,967	1,000	13,105	6,358	2,595
0,70	0,988	1,000	12,417	6,211	2,054
0,80	0,996	1,000	11,674	6,051	1,471
0,90	0,999	1,000	10,758	5,767	0,839
0,98	1,000	1,000	8,922	5,031	-0,261

# Model Slunce

Model Slunce podle Allena. Chemické složení na povrchu  $X = 0,71,$

$Y = 0,265$

$\frac{r}{R_{\odot}}$	$\frac{M_r}{M_{\odot}}$	$\frac{L_r}{L_{\odot}}$	log P	$T, 10^6 \text{ K}$	$\rho, \text{ kg m}^{-3}$
0,00	0,000	0,000	16,53	15,5	$1,6 \cdot 10^5$
0,04	0,008	0,08	16,46	15,0	$1,4 \cdot 10^5$
0,1	0,07	0,42	16,20	13,0	$8,9 \cdot 10^4$
0,2	0,35	0,94	15,72	9,5	$4,1 \cdot 10^4$
0,3	0,64	0,998	15,08	6,7	$1,3 \cdot 10^4$
0,4	0,85	1,000	14,37	4,8	$3,6 \cdot 10^3$
0,5	0,94	1,000	13,67	3,4	$1,0 \cdot 10^3$
0,6	0,982	1,000	13,01	2,2	$3,5 \cdot 10^2$
0,7	0,994	1,000	12,08	1,2	$0,8 \cdot 10^2$
0,8	0,999	1,000	11,18	0,7	$1,8 \cdot 10$
0,9	1,000	1,000	9,94	0,31	2,0
0,95	1,000	1,000	8,82	0,16	0,4
0,995	1,000	1,000	6,68	0,03	0,02
1,000	1,000	1,000	--	0,006	0,0

# Opacita

světelná pružina rozptylu a pohlcování  
fotoni,

vlnění ~ chem. složení, teplotě, hustotě

I. při  $T \uparrow$  opacita světelná pružina rozptylu -  
Comptonův rozptyl

$$\kappa = \kappa_1 \quad \kappa \dots \text{m}^2 \text{kg}^{-1}$$

II. při  $T$  středních pro volodějící vlnění - vlnění  
a vlnění - vlnění přechody

platí Kroneckerův zákon:

$$\kappa = \kappa_2 \rho T^{-3/2} \quad \kappa_2 \dots \text{konst.}$$

III. při  $T \downarrow$  je část atomů neionizovaná, referenci  
pro vlnění - vlnění přechody

$$\kappa = \kappa_3 \rho^2 T^4$$

Opacita je malá při velkých vzdálenostech a nízkých  
teplotách

$$L \sim \frac{\mu^4}{\kappa} \kappa^3$$



# Opacita

## 3.1.3. Opacita

Schopnost hvězdné látky zeslabovat procházející záření charakterizuje opacita - neprůzračnost. Opacita je určována procesy, ve kterých se rozptylují a pohlcují fotony - rozptyl záření na volných elektronech, pohlcování fotonů atomy s přechodem elektronů z jedné vázané dráhy na druhou s vyšší energií nebo do volného stavu a absorpce fotonů elektrony při přechodu z jedné volné dráhy na druhou s vyšší energií. Pro konkrétní výpočet opacity je nutno znát rychlost průběhu většiny těchto procesů. Opacita závisí na chemickém složení, teplotě a hustotě.

Ve hvězdných nitrech jsou atomy vodíku a helia plně ionizovány, nemohou tudíž absorbovat záření. U těžších prvků však existují vnitřní elektrony, proto opacita závisí na obsahu těchto prvků v nitrech hvězd.

Při vysokých teplotách mají fotony velkou energii, proto jsou absorbovány slaběji, opacita je určována rozptylem záření volnými elektrony - Comptonův rozptyl. V prvním přiblížení lze psát

# Opacita v nitru hvězd

$$\kappa = \kappa_1, \quad (3.1.3.1)$$

kde  $\kappa_1$  je konstantní hodnota pro hvězdy daného chemického složení, rozměr  $\kappa$  je  $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ .

U nižších teplot se stávají rozhodujícími vázaně-volné a volně-vázané přechody, v určitém teplotním intervalu opacita roste s rostoucí hustotou a se zmenšováním teploty, což lze vyjádřit kramerovým zákonem

$$\kappa = \kappa_2 \rho T^{-3,5}, \quad (3.1.3.2)$$

kde  $\kappa_2$  je konstanta při zadaném chemickém složení.

Při dále klesajících teplotách je velká část atomů ještě neionizována, proto je velmi málo elektronů volných k rozptylu záření a výraznými se stávají vázaně-vázané přechody. Opacita klesá s teplotou podle vztahu

$$\kappa = \kappa_3 \rho^{0,5} T^4. \quad (3.1.3.3)$$

Z předchozího výkladu lze učinit závěr, že opacita je malá při velmi vysokých a nízkých teplotách.

Opacita hvězdné látky je důležitá pro vnitřní stavbu hvězd, neboť určuje tok procházejícího záření, tedy rozložení teploty v nitru hvězd. Závislost svítivosti hvězd na střední molekulové hmotnosti, opacitě a hmotnosti je vyjádřena přibližným kvalitativním vztahem

$$L \sim \frac{\mu^4}{\kappa} M^3, \quad (3.1.3.4)$$

# Opacita v nitru Slunce

## Random Motion of Photons: Kramers' Law

Kramer's Law

$$\kappa_{es} \propto \rho T^{-3.5}$$

Electron scattering provides a constant background opacity:

$$\kappa_{es} = \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = (1 + X_1) \frac{\sigma_T}{2m_H} \approx (1 + X_1) \times 0.02 [\text{m}^2/\text{kg}]$$

Location	Opacity (m <sup>2</sup> /kg)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Mean Free Path (mm)
0.0 Solar Radii	0.1	1.5 x 10 <sup>5</sup>	0.07
0.6 Solar Radii	1.0	3.5 x 10 <sup>2</sup>	3.0
0.9 Solar Radii	10	1.2 x 10 <sup>1</sup>	8.0

We used the mean free path of 1mm for the average over the radius of the Sun  
(for the random walk)



# Modely hvězd různých typů

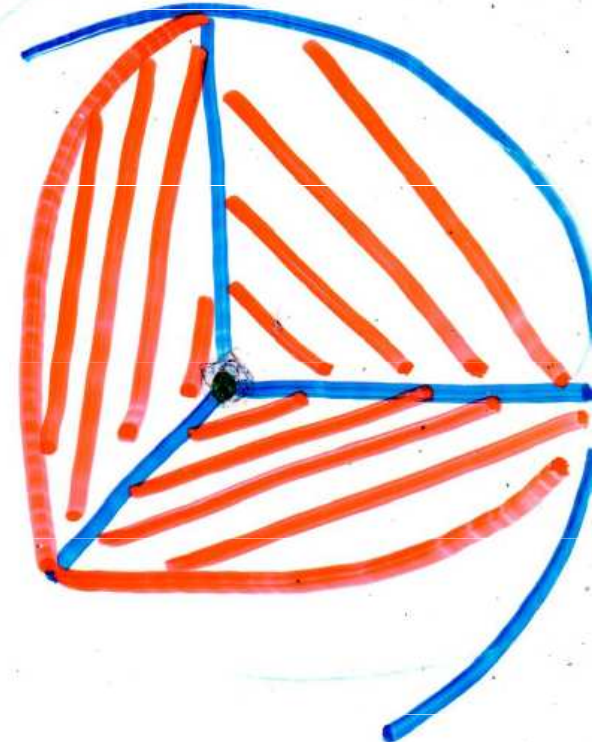
$3,6 \cdot 10^3 L_{\odot}$   
 $3,6 R_{\odot}$   
 $10 M_{\odot}$



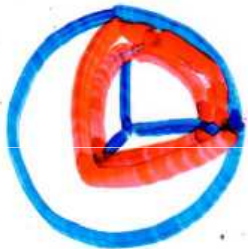
$0,06 L_{\odot}$   
 $0,6 R_{\odot}$   
 $0,6 M_{\odot}$



$225 L_{\odot}$   
 $21 R_{\odot}$   
 $1,3 M_{\odot}$



$1 M_{\odot}$

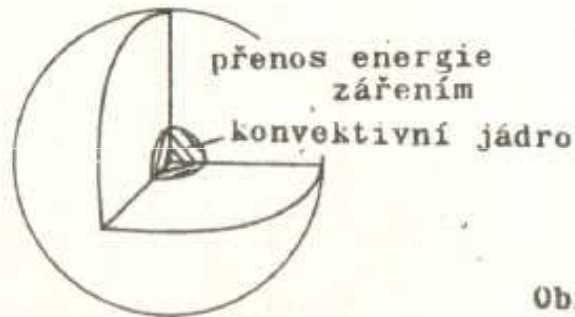


$0,003 L_{\odot}$   
 $0,02 R_{\odot}$   
 $1 M_{\odot}$



B.T.

# Modely hvězd různých typů



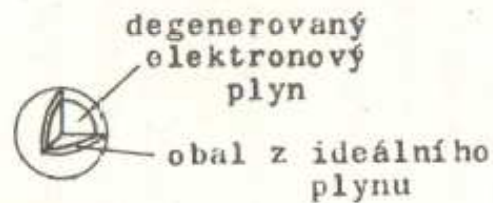
Obr. 13. Model hvězdy hlavní posloupnosti s velkou hmotností



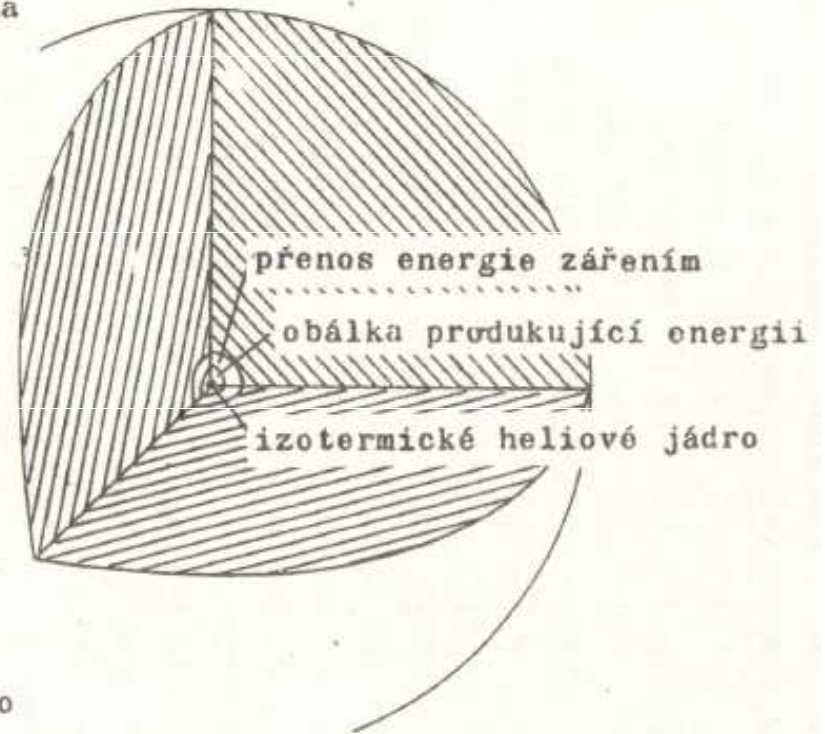
Obr. 15. Model červeného trpaslíka



Obr. 14. Model Slunce

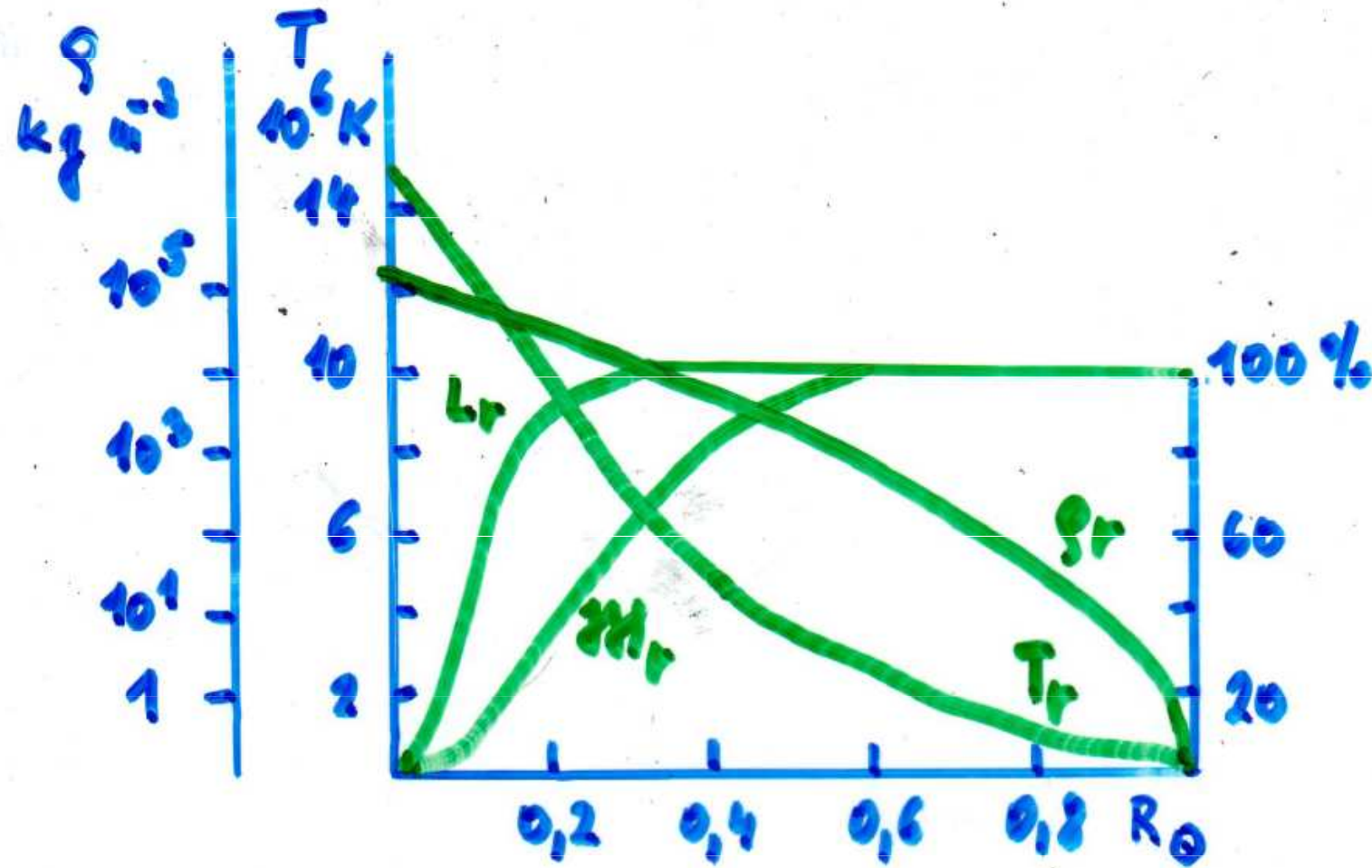


Obr. 17. Model bílého trpaslíka



Obr. 16. Model červeného obra

# Model nitra Slunce



Rozložení  $M_r$ ,  $L_r$ ,  $g_r$  a  $T_r$  v nitru Slunce



# Výzkum Slunce - kde se bere energie ?

**zelený paprsek**, atmosféra – hranol, atmosférická refrakce  
je větší pro **kratší vlnové délky**, **modré světlo** zeslabováno  
silněji než **zelené**



# Uvolňování energie ve hvězdách

podmínka dlouhodobosti zdrojů

$L \sim 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$  , nejstarší horniny Země, Měsíc –  $t \sim 4,5 \cdot 10^9 \text{ r}$

potřebná energie  $E = L \cdot t = 4 \cdot 10^{26} \cdot 4,5 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^7 = 5,4 \cdot 10^{43} \text{ J}$

gravitační potenciální energie  $10^{41} \text{ J}$

termonukleární reakce  $\Delta E = \Delta m c^2$

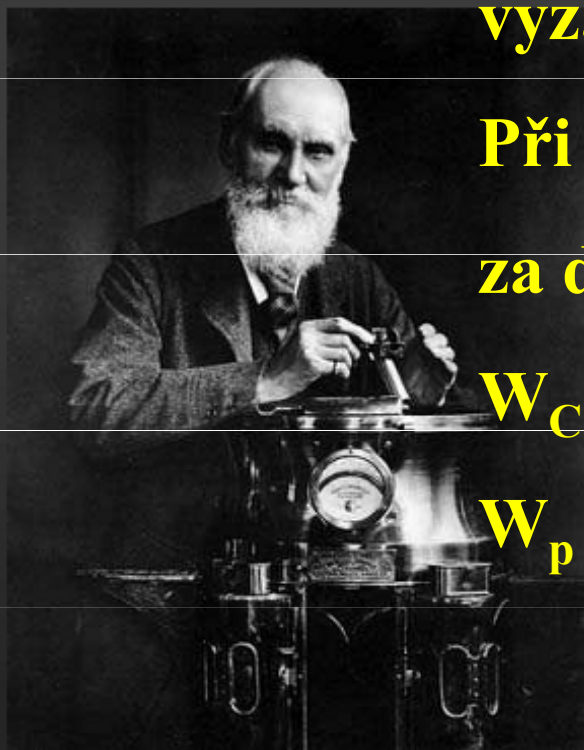
účinnost termonukleárních reakcí 0,7 %

odhad při podmínce vzniku prvků až po železo  $\Delta m c^2 = 0,007 M_{\odot} c^2 \sim 10^{45} \text{ J}$

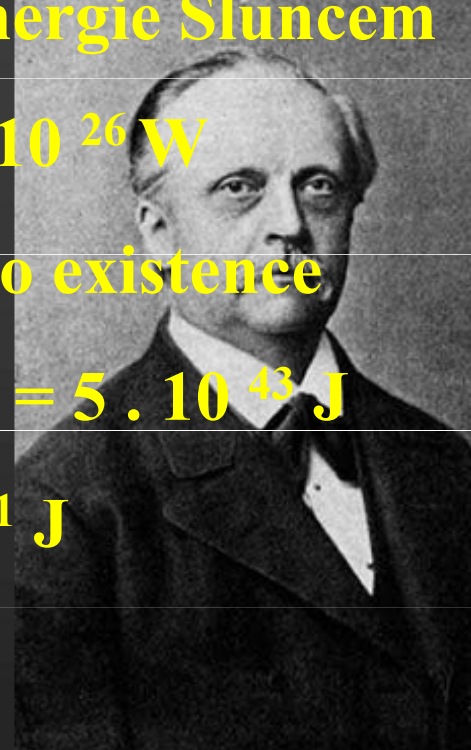
**dostatečný zdroj energie**

# Zdroj energie Slunce - gravitační energie?

Powering the Sun: Gravitational Energy???



Lord Kelvin (1824-1907)



Hermann von Helmholtz  
(1821-94)

vyzářená energie Sluncem

Při  $L_S = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$

za dobu jeho existence

$W_C = L_S \cdot t = 5 \cdot 10^{43} \text{ J}$

$W_p = -10^{41} \text{ J}$





# Zdroje energie

**H . N. Russell (1877 - 1957) formuloval požadavky na zdroje energie hvězd**

1. Uplatňují se při vysokých teplotách a hustotách, tedy v nitrech hvězd, nikoliv planet
2. Zvýšení uvolňování energie nesmí vést k explozivním procesům
3. Velikost uvolňované energie je regulována, platí zářivá rovnováha

# Zdroj energie hvězd – hmotnostní úbytek



- Chaplin to Einstein: “People love me, because they understand *everything* I say, and they love you, because they understand *nothing* of what you say...”

# Zdroje hvězdné energie

Zdroje hvězdné energie

gravitační potenciální energie

$$W_p = -\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} \quad \text{při } \rho = \text{konst.}$$

pro slunce

$$W_p \approx -10^{41} \text{ J}$$

termodynamická energie

potenciální energie elektrostatické

částic

$$2 \text{ protony} : E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \approx 10^3 \text{ keV}$$

k dispozici pouze 1 keV

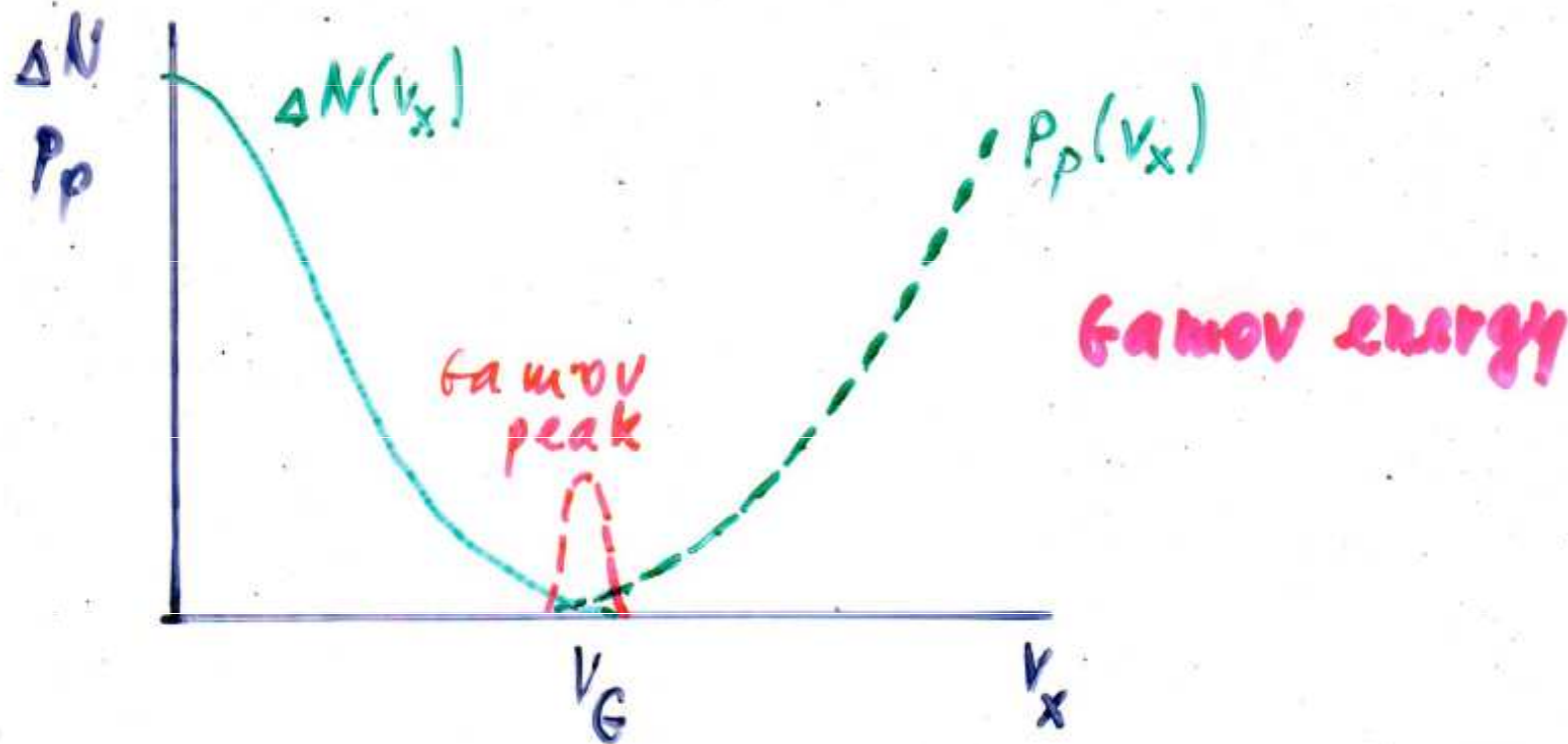
?

a) kinetická nebo statistická energie

↓ b) hustoty gas!



# Zdroje hvězdné energie



rozdíl v rychlosti  $\Delta N(T_x) \sim T_x$  —

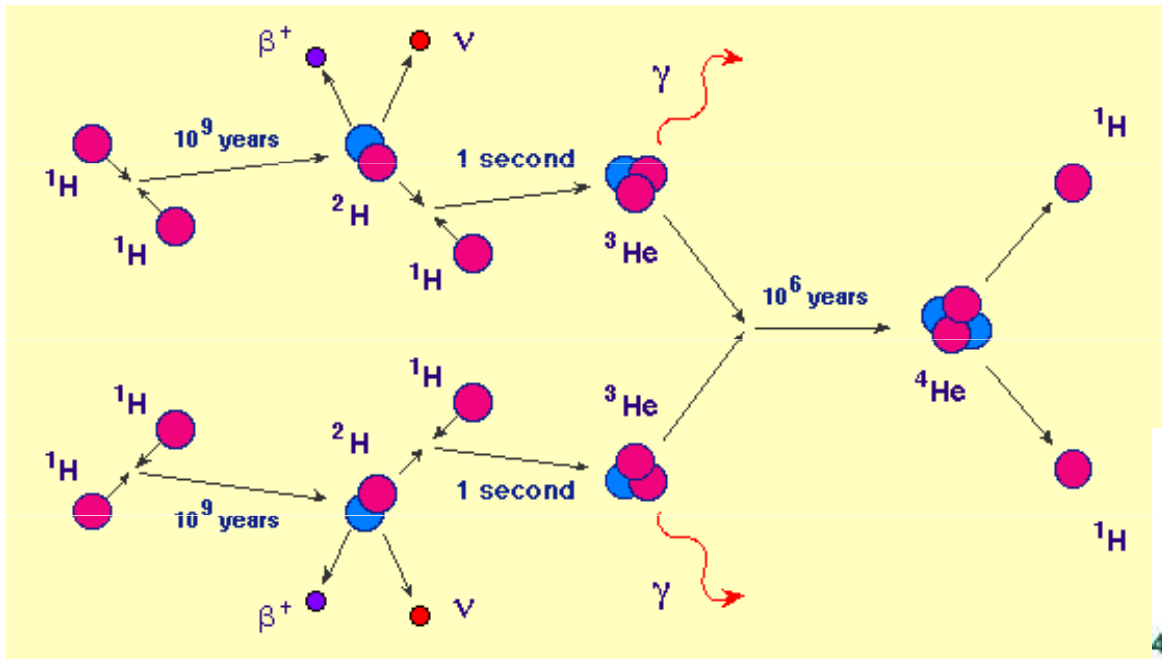
neodpovídá vlně přímiku pot. vlně  $P_p(T_x) \sim T_x$  ---

výsledek, vlně obě  $f_{\nu}$  ---

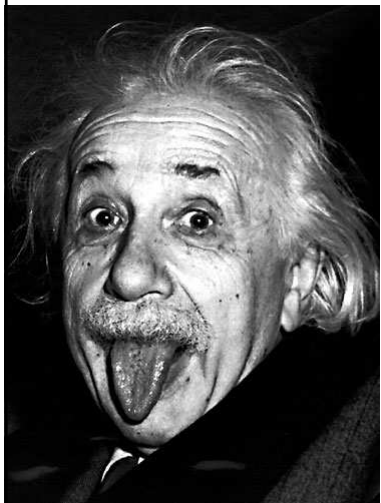
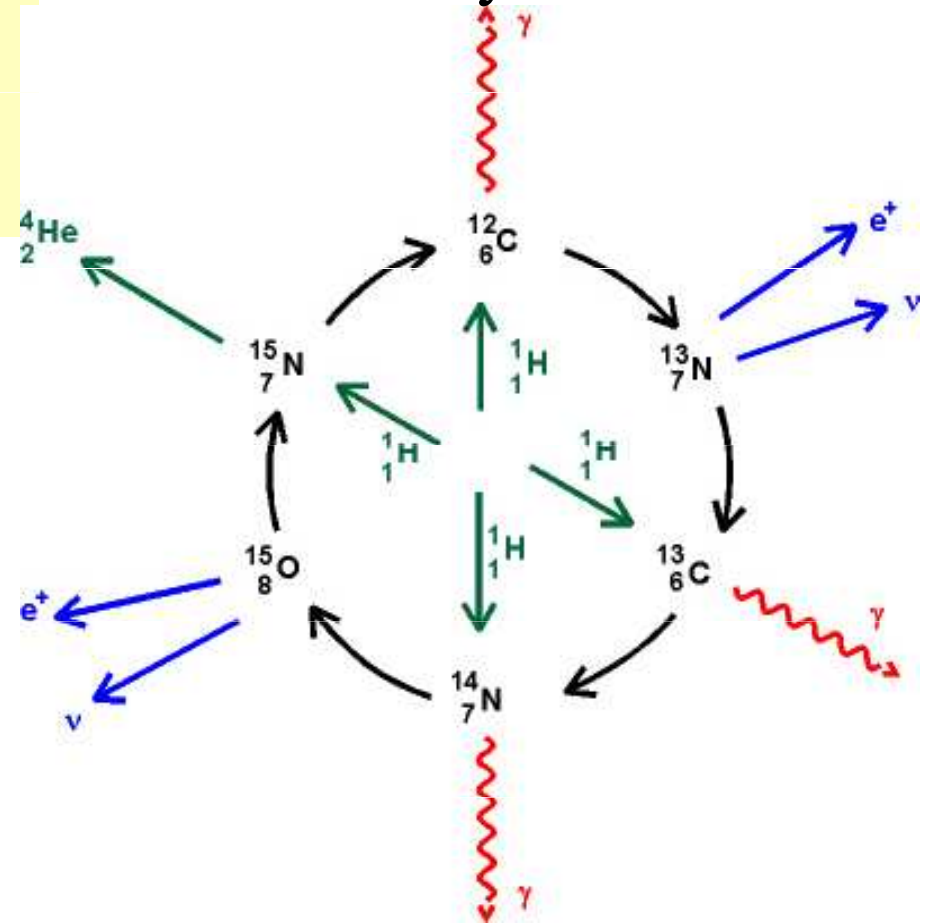
měří  $\begin{matrix} z_{1l} \\ z_{2l} \end{matrix}$

# Termonukleární reakce - řetězce a cykly

p-p řetězec



CNO cyklus



$$\Delta E = \Delta m c^2$$

$$4m_p - m_{\text{He}} = 5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

pro Slunce

$$\Delta m = 4 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

# Termonukleární reakce p-p řetězec

spodní část HP, T (5 - 16) milionů stupňů, ze čtyř protonů vznik jádra atomu helia, první varianta, přes 70 % pravděpodobnost

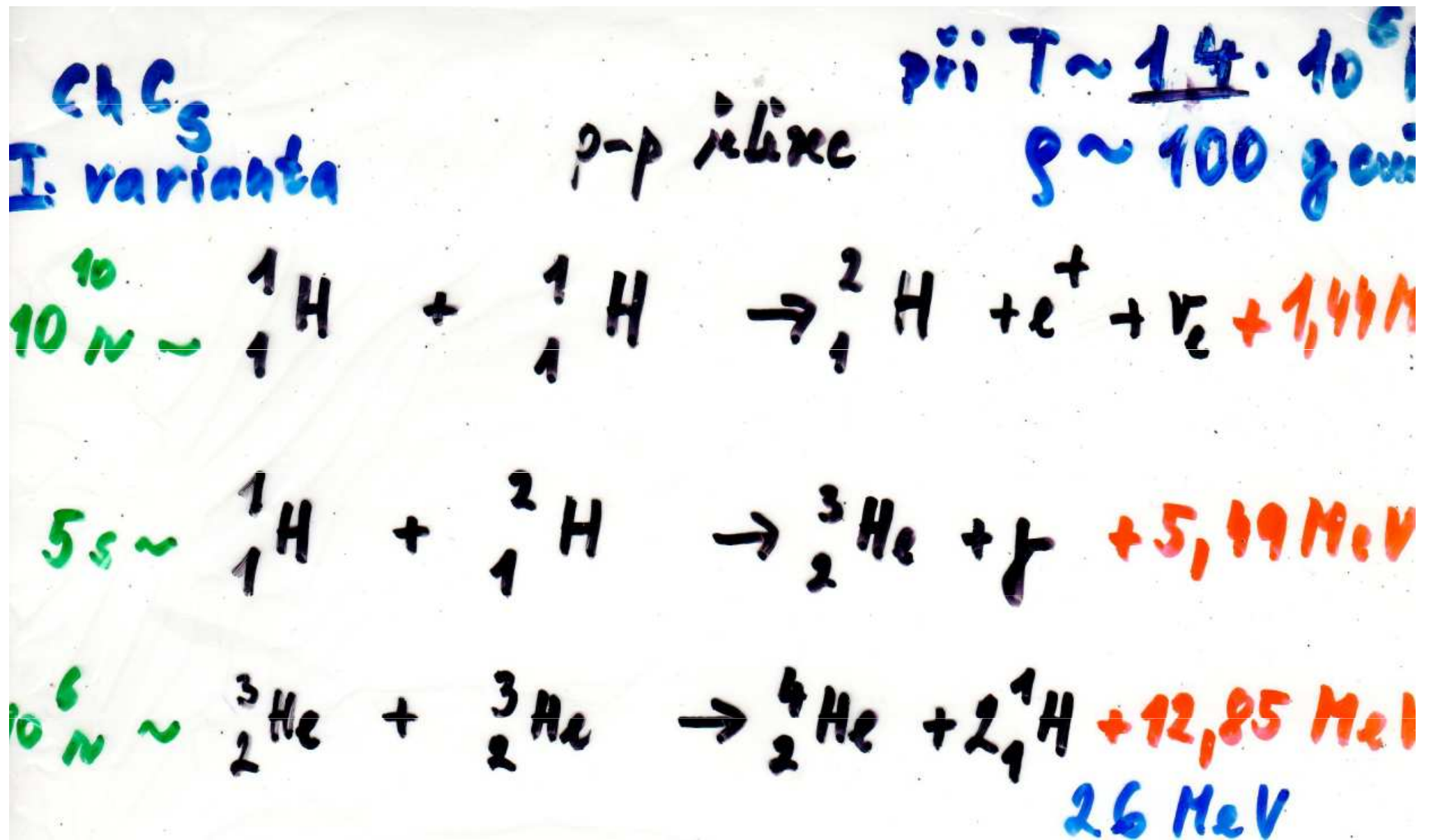


**druhá varianta**





# Termonukleární reakce p-p řetězec

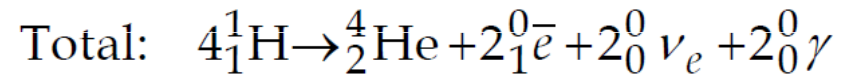
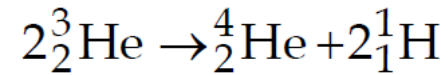
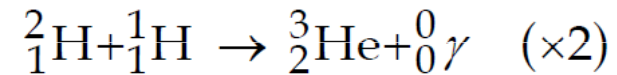
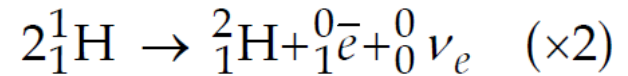


# Termonukleární reakce p-p řetězec



slabé interakce  $\Rightarrow$  velmi pomalá,  
 $v \approx \text{MeV}$ ,  $\sigma \dots 10^{-44} \text{cm}^2$  | malá účinná průřez

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$



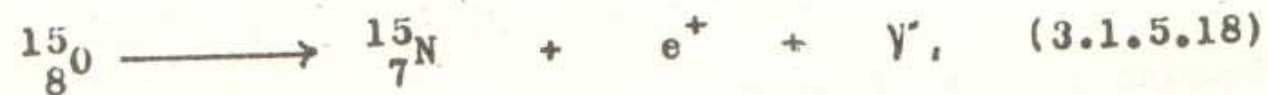
silná interakce  $\Rightarrow$  rychle



silná interakce  
 pouze  $W_k$

# Termonukleární reakce CNO cyklus

Ve hvězdách horní části hlavní posloupnosti, hvězdách s větší hmotností a vyšší centrální teplotou, přibližně 16 - 50 milionů stupňů, se uplatňuje uhlíkový cyklus, zkráceně CNO cyklus. Rychlost jeho reakcí je mnohem více závislá na teplotě, než rychlost reakcí p-p řetězce. Sled reakcí CNO cyklu je následující.





# Termonukleární reakce CNO cyklus

## CNO cyklus

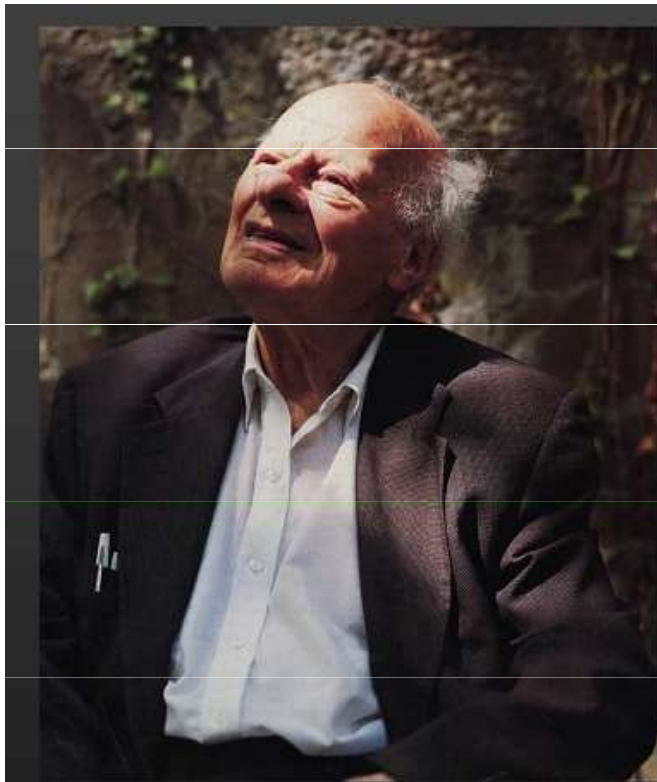
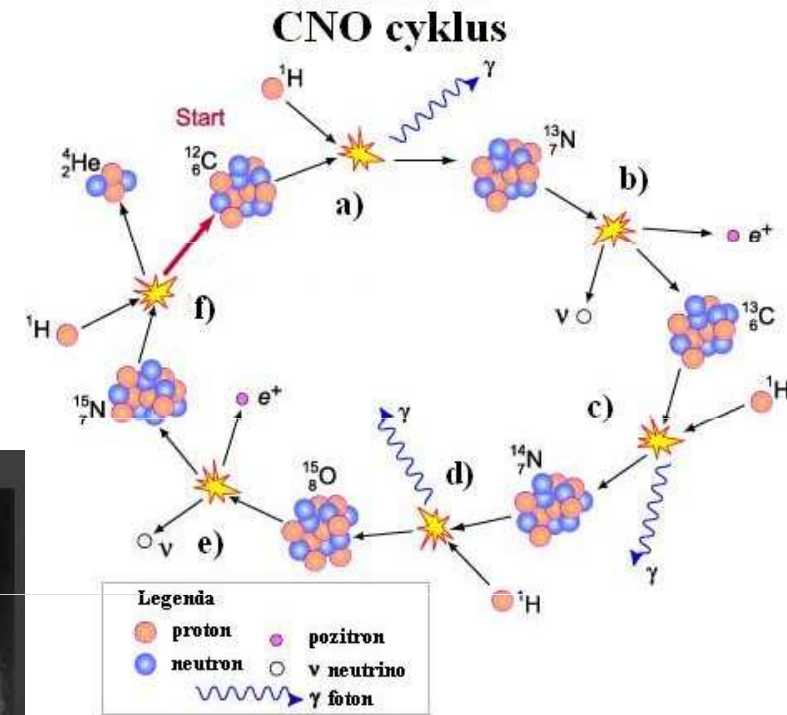


dmínky  $T = 1,4 \cdot 10^7 \text{ K}$ ,  $\rho \sim 100 \text{ g cm}^{-3}$

# Konkrétní typy termonukleárních reakcí

Nobelova cena za fyziku r. 1967

teorie nukleárních reakcí - H. Bethe



Hans Bethe (1906-2005)



Carl Friedrich von Weizsaecker  
(born 1912)

termonukleární reakce -  
dlouhodobý zdroj energie -  
zaručuje  $5 \cdot 10^{45}$  J

# Termonukleární reakce CNO cyklus produkce energie ve hvězdách

H. A. BETHE

Energy production in stars

*Nobel Lecture, December 11, 1967*

## *History*

From time immemorial people must have been curious to know what keeps the sun shining. The first scientific attempt at an explanation was by Helmholtz about one hundred years ago, and was based on the force most familiar to physicists at the time, gravitation. When a gram of matter falls to the sun's surface it gets a potential energy

$$E_{\text{pot}} = -GM/R = -1.91 \cdot 10^{15} \text{ erg/g} \quad (1)$$

where  $M = 1.99 \cdot 10^{33}$  g is the sun's mass,  $R = 6.96 \cdot 10^{10}$  cm its radius, and  $G = 6.67 \cdot 10^{-8}$  the gravitational constant. A similar energy was set free when the sun was assembled from interstellar gas or dust in the dim past; actually somewhat more, because most of the sun's material is located closer to its center, and therefore has a numerically larger potential energy. One-half of the energy set free is transformed into kinetic energy according to the well-known virial theorem of mechanics. This will permit us later to estimate the temperature in the sun. The other half of the potential energy is radiated away. We know that at present the sun radiates

$$\varepsilon = 1.96 \text{ erg/g sec} \quad (2)$$

Therefore, if gravitation supplies the energy, there is enough energy available to supply the radiation for about  $10^{15}$  sec which is about 30 million years.



# Termonukleární reakce možné v důsledku tunelového jevu

## Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in Sternen.

Von R. d'E. Atkinson und F. G. Houtermans in Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen am 19. März 1929.)

Die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Proton in einen Atomkern eindringt, wird nach der Methode von Gamow berechnet. Dabei zeigt sich, daß unter den Temperatur- und Dichteverhältnissen im Innern der Sterne die Eindringung von Protonen, nicht aber von  $\alpha$ -Teilchen, in leichtere Elemente genügend häufig vorkommt, um dort einen Aufbau dieser Elemente wahrscheinlich erscheinen zu lassen. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Energieentwicklung der Sterne aus den Massendefekten der Elemente zu erklären, wobei die Annahme von Sechserstößen für den He-Aufbau vermieden wird. Hieran schließen sich einige weitere hypothetische Betrachtungen über den Aufbau der schwereren Elemente.

Vor kurzem hat Gamow\* gezeigt, daß positiv geladene Teilchen auch dann in Atomkerne einzudringen vermögen, wenn ihre Energie nach klassischen Begriffen nicht dazu hinreicht, also kleiner ist als die zu überwindende Potentialschwelle. Gleichzeitig hat v. Laue\*\* auf die Möglichkeit des Aufbaues von Elementen entsprechend der Nernstschen Hypothese als Konsequenz der Gamowschen Auffassung der  $\alpha$ -Radioaktivität hingewiesen. Da dieser Gedanke für die kosmische Physik von großer Bedeutung sein könnte, bei seiner Anwendung aber auf beträchtliche Schwierigkeiten stößt, möchten wir im folgenden die Möglichkeit derartiger Aufbauprozesse etwas näher diskutieren.

Um eine rohe Orientierung über die Verhältnisse im Innern der Sterne zu gewinnen, wollen wir einige ungefähre Zahlenangaben zusammenstellen. Unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichts ergeben sich nach Eddington\*\*\* Temperaturen von der Größenordnung  $10^7$ , und zwar in keinem Falle mehr als  $4 \cdot 10^7$  Grad, im Mittelpunkt eines Sternes; die Dichte dort kann ziemlich verschiedene Werte annehmen, kann aber für unseren Zweck mit  $10 \text{ g/cm}^3$  angesetzt werden. Unter diesen Umständen sind die leichteren Elemente vollkommen, die schwersten wohl bis auf die L-Schale ionisiert; wegen der zahlreichen freien Elektronen ist das mittlere Molekulargewicht etwa 2 bis 3. Von der Gesamtmasse könnte bei den „frühen“ Sternen vielleicht 10 % aus Wasserstoff bestehen.

R. d'E. Atkinson und F. G. Houtermans, Zur Frage der Aufbaumöglichkeit usw. 657

Bei einer Temperatur von  $4 \cdot 10^7$  ist der Bruchteil der Heliumkerne, die die Energie eines langsamen  $\alpha$ -Teilchens haben, ungefähr  $10^{-640}$ ; an eine direkte Umkehrung des  $\alpha$ -Zerfalls infolge von Temperaturbewegung ist also nicht zu denken, gleichgültig, wie groß die Wahrscheinlichkeit des Prozesses an sich sein mag. Sehen wir aber von einer direkten Umkehrung ab, so bleibt noch die Möglichkeit, daß sehr viel langsamere Teilchen, deren Häufigkeit viel größer ist, irgend einen Aufbau bewirken könnten.

Die Zerfallskonstante eines radioaktiven Elements, das  $\alpha$ -Strahlen der Geschwindigkeit  $v$  emittiert, ist gegeben durch einen Ausdruck der Form

$$\lambda = A \cdot e^{-f(v)}. \quad (1)$$

Die physikalische Bedeutung von  $A$ , das die Dimension  $\text{sec}^{-1}$  hat, ist bis auf einen Zahlenfaktor die Zahl der Stöße des Teilchens pro Sekunde an die Innenwand des „Potentialtopfes“, und die  $e$ -Funktion bedeutet die Durchlässigkeit der Wand pro Stoß\*.  $A$  wird von der Größenordnung  $v/s$  sein, wo  $s$  der Radius des inneren Gebiets positiver kinetischer Energie ist. Die für Eindringung einzusetzende Stoßzahl ist im wesentlichen durch die Größe  $v/A$  gegeben, wo  $A$  die freie Weglänge des Kernes in einem aus He-Kernen bestehenden Gase bedeutet. Der Faktor  $A$  für den Aufbau wird dann gegenüber dem für den Zerfall im Verhältnis  $s/A$  verkleinert; für Sternverhältnisse bedeutet das eine Reaktionsgeschwindigkeit des Aufbaues, die etwa  $10^{12}$  mal kleiner ist als die des Zerfalls\*\*. Hieraus sieht man, daß das neugebildete Atom sich im allgemeinen irgendwie umgestalten muß, am wahrscheinlichsten wohl durch einen mit Ausstrahlung verbundenen Übergang, wenn es nicht sofort einfach wieder zerfallen soll; auf die Rolle, die solche Prozesse zu spielen hätten, kommen wir im folgenden zurück.

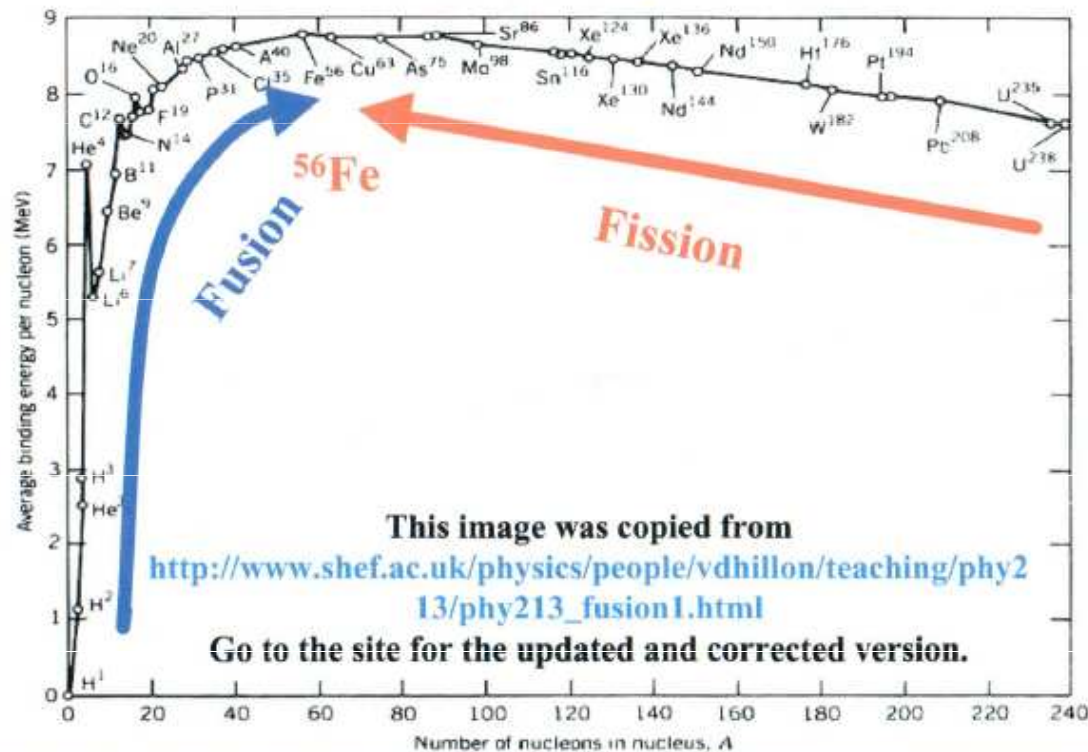
Wir wollen nun gleich die Eindringungswahrscheinlichkeit nicht für He-Kerne, sondern für Protonen betrachten, denn, wie sich zeigen wird, ist nur für diese die Überwindung der Potentialschwelle bei Sternentemperaturen praktisch möglich. Unter der Annahme eines Coulombschen Abstoßungspotentials mit einem überlagerten kubischen Anziehungsglied, also

$$U = \frac{Ze^2}{r} - \frac{a}{r^3}, \quad (2)$$



# Termonukleární reakce CNO cyklus

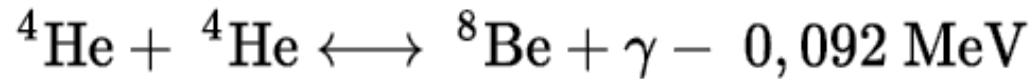
## Stellar Nucleosynthesis



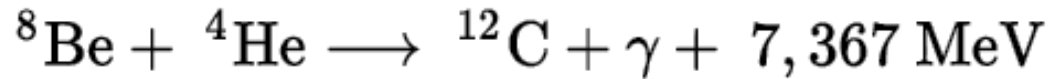
MINIMUM TEMPERATURE	REACTION
$8 \times 10^6 \text{K}$	Proton proton chain
$20 \times 10^6 \text{K}$	CNO cycle
$600 \times 10^6 \text{K}$	Carbon helium fusion
$10^9 \text{K}$	Carbon burning

Process	Fuel	Products	Temperature
Hydrogen Burning	H	He	$1 \times 10^7 \text{ K}$
Helium Burning	He	C, O	$1 \times 10^8 \text{ K}$
Carbon Burning	C	O, Ne, Na, Mg	$5 \times 10^8 \text{ K}$
Neon Burning	Ne	O, Mg	$1 \times 10^9 \text{ K}$
Oxygen Burning	O	Mg-S	$2 \times 10^9 \text{ K}$
Silicon Burning	Si	Fe + nearby elements	$3 \times 10^9 \text{ K}$

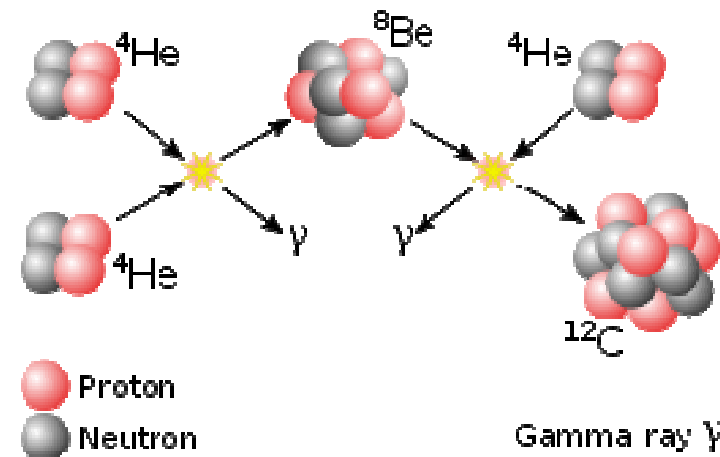
# Zdroje hvězdné energie - reakce 3 alfa



*tzv. Salpeterova reakce*

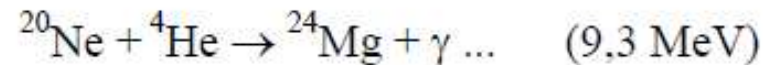


syntéza dvou jader helia dává za vznik jádru berylia, které je nestabilní, ale reakce probíhají rychle, vždy existuje dostatečný počet jader berylia, aby reakce probíhala reakce, při teplotě  $10^8 \text{ K}$ .





# Průběh dalších reakcí alfa procesu



*vznikem hořčíku efektivnost reakcí tohoto typu končí*

Všeobecně platí, že čím složitější jádra se reakcí účastní, tím vyšší musí být pracovní teplota, při níž tyto reakce účinně probíhají. Současně se snižuje energetický výtěžek termonukleárních reakcí přepočtený na jeden nukleon. Je to důsledek skutečnosti, že s rostoucím atomovým číslem

stabilních nuklidů roste vazebná energie přepočtená na jeden nukleon v jádru stále pomaleji.

Absolutního minima (8,8 MeV/nukleon) dosáhne u jader prvků skupiny železa, u nichž klidný

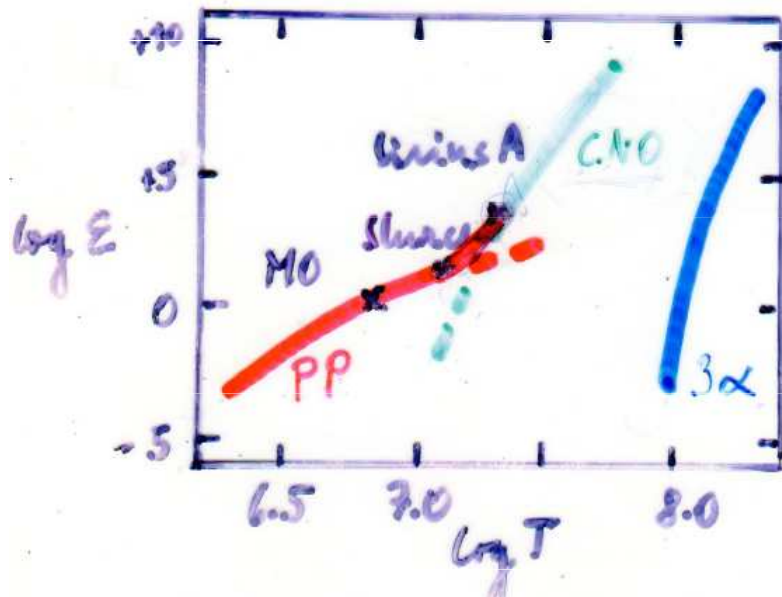
termojaderný vývoj v nitrech hvězd končí (pokud se k němu hvězda vůbec dostane). Chceme-li

vytvořit těžší prvky, musíme naopak energii dodávat. To je ovšem možné jen při krátkodobých

bouřlivých obdobích hvězdného vývoje, například krátce před vzplanutím supernovy.

# Závislost produkce energie ve hvězdách na teplotě, hustotě

$$\begin{aligned} \epsilon_{PP} &\sim \rho T^5 \\ \epsilon_{CNO} &\sim \rho T^{16} \\ \epsilon_{3\alpha} &\sim \rho^2 T^{30} \end{aligned}$$



pp řetězec M0  
CNO cyklus A0

energie uvolněná  
1 g látky

# Termonukleární reakce - vznik chemických prvků v nitru hvězd

## REVIEWS OF MODERN PHYSICS

VOLUME 29, NUMBER 4

OCTOBER, 1957

### Synthesis of the Elements in Stars\*

E. MARGARET BURBIDGE, G. R. BURBIDGE, WILLIAM A. FOWLER, AND F. HOYLE

*Kellogg Radiation Laboratory, California Institute of Technology, and  
Mount Wilson and Palomar Observatories, Carnegie Institution of Washington,  
California Institute of Technology, Pasadena, California*

“It is the stars, The stars above us, govern our conditions”;  
(*King Lear*, Act IV, Scene 3)

but perhaps

“The fault, dear Brutus, is not in our stars, But in ourselves,”  
(*Julius Caesar*, Act I, Scene 2)

B<sup>2</sup>FH, the „Bible“ of Nuclear Astrophysics

**FHB<sup>2</sup>**



# Časové škály nukleárního hoření

Časové škály jednotlivých fází nukleárního hoření

**25 MBs**, výpočty Weaver; práce C.E. Rolfs

a W. S. Rodney 1988

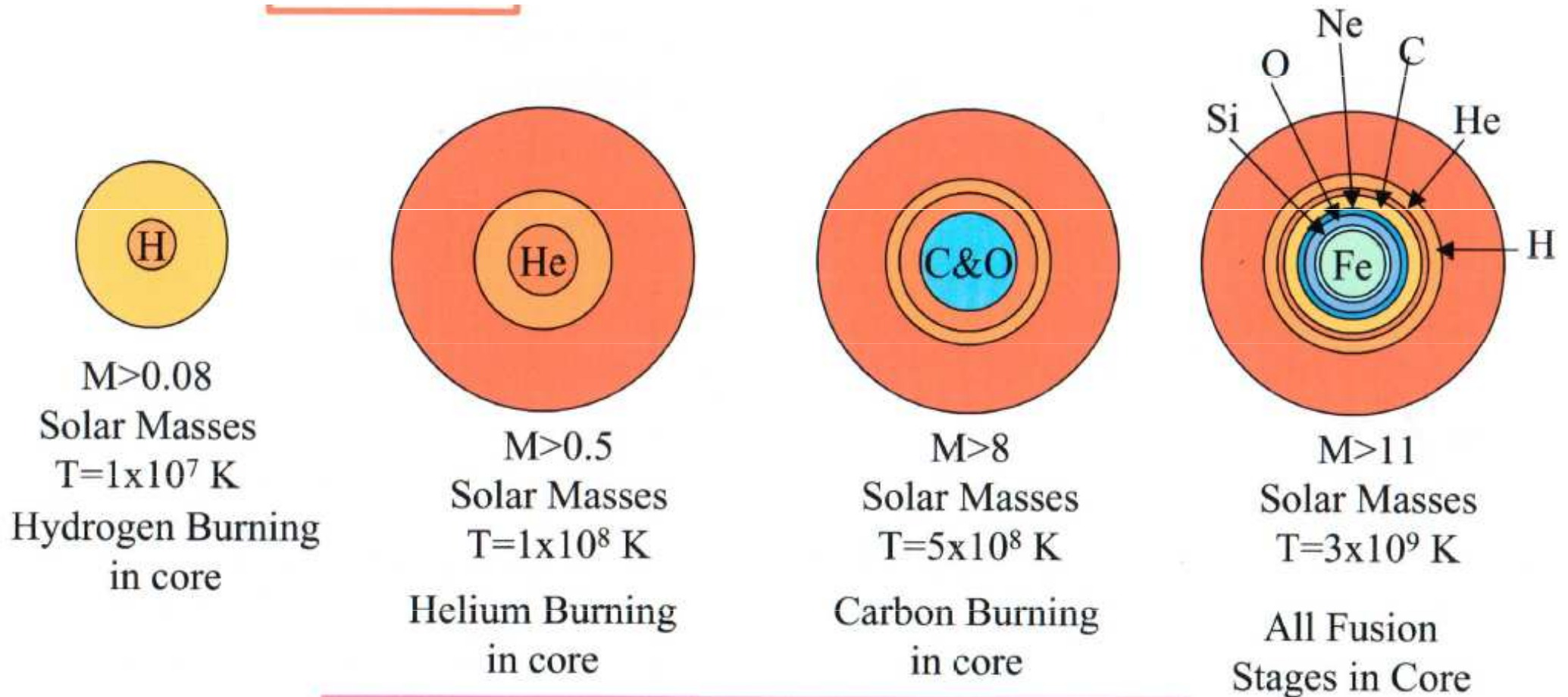
Fáze hoření	Časové škála	Teplota $10^9 \text{K}$	Hustota $\text{kg m}^{-3}$
vodík	$7 \times 10^6 \text{ r}$	0.06	$5 \times 10^4$
helium	$5 \times 10^5 \text{ r}$	0.23	$7 \times 10^5$
uhlík	600 r	0.93	$2 \times 10^8$
neon	1 r	1.7	$4 \times 10^9$
kyslík	6 měsíců	2.3	$1 \times 10^{10}$
křemík	1 den	4.1	$3 \times 10^{10}$

# Přehled vzniku prvků ve hvězdách

Proces	Palivo	Produkt	Teplota	minimální hmotnost M <sub>s</sub>
hoření vodíku	vodík	helium	$2 \times 10^7$ K	0,1
hoření helia	helium	uhlíkykyslík	$2 \times 10^8$ K	1
hoření uhlíku	uhlík	kyslík, neon, sodík, hořčík	$8 \times 10^8$ K	1,4
hoření neonu	neon	kyslík, hořčík	$1,5 \times 10^9$ K	5
hoření kyslíku	kyslík	hořčík → síra	$2 \times 10^9$ K	10
hoření křemíku	hořčík ↓ síra	prvky těžší železo	$3 \times 10^9$ K	20

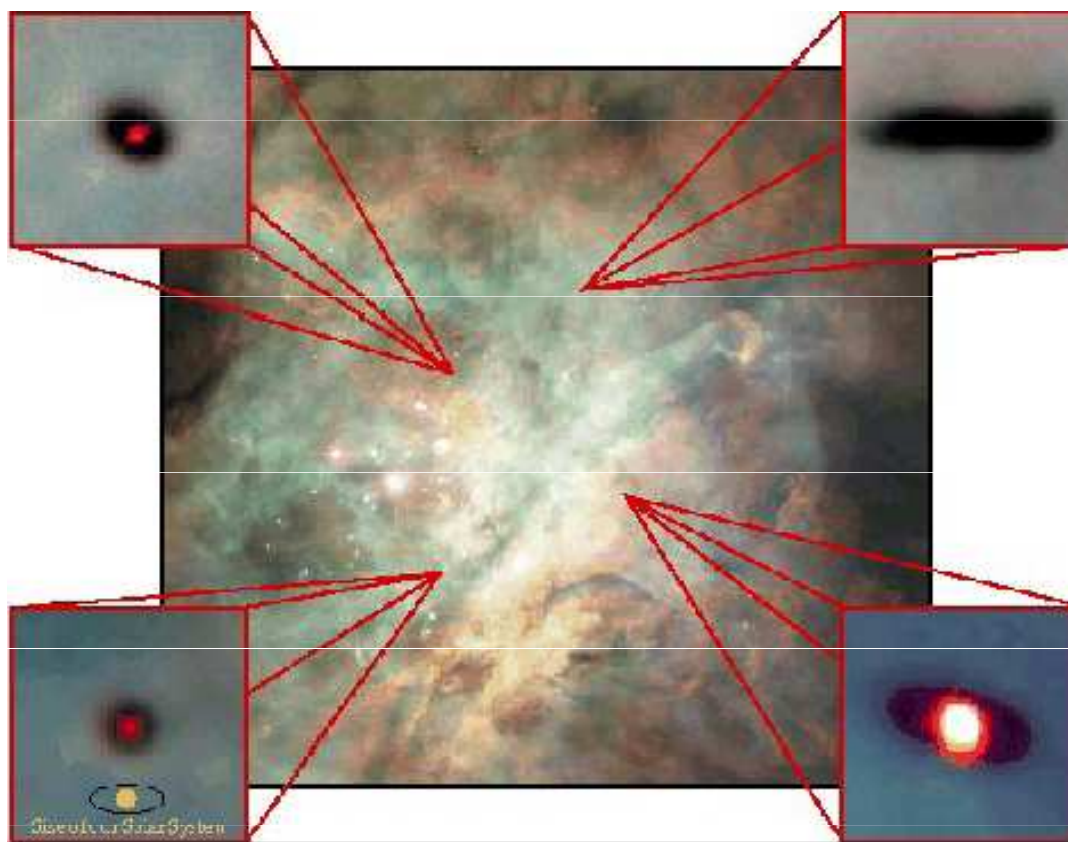
# Stavba nitra hvězd v závěrečných fázích vývoje

*hmotnost určuje teplotu, typy probíhajících cyklů ve hvězdách*

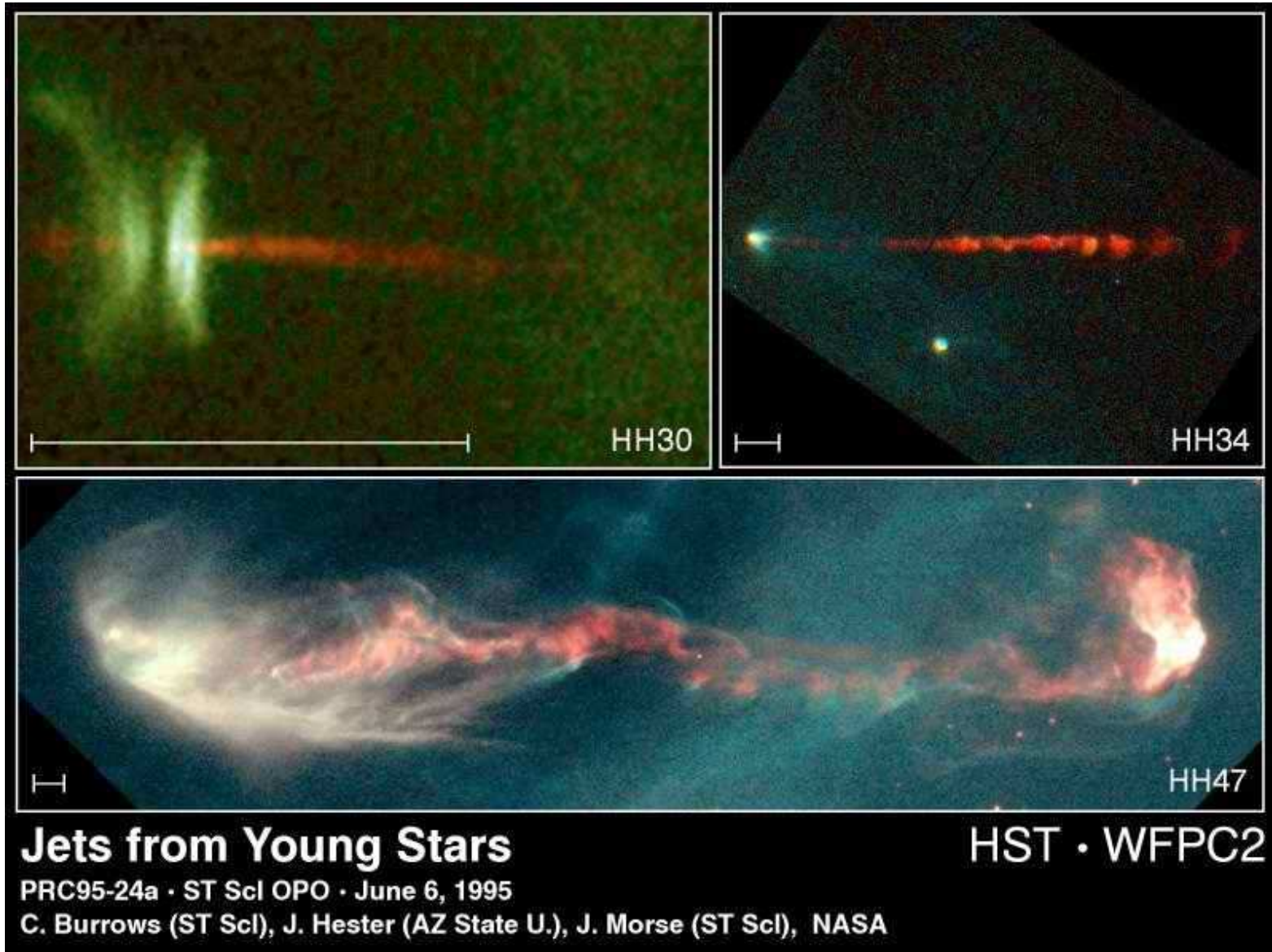




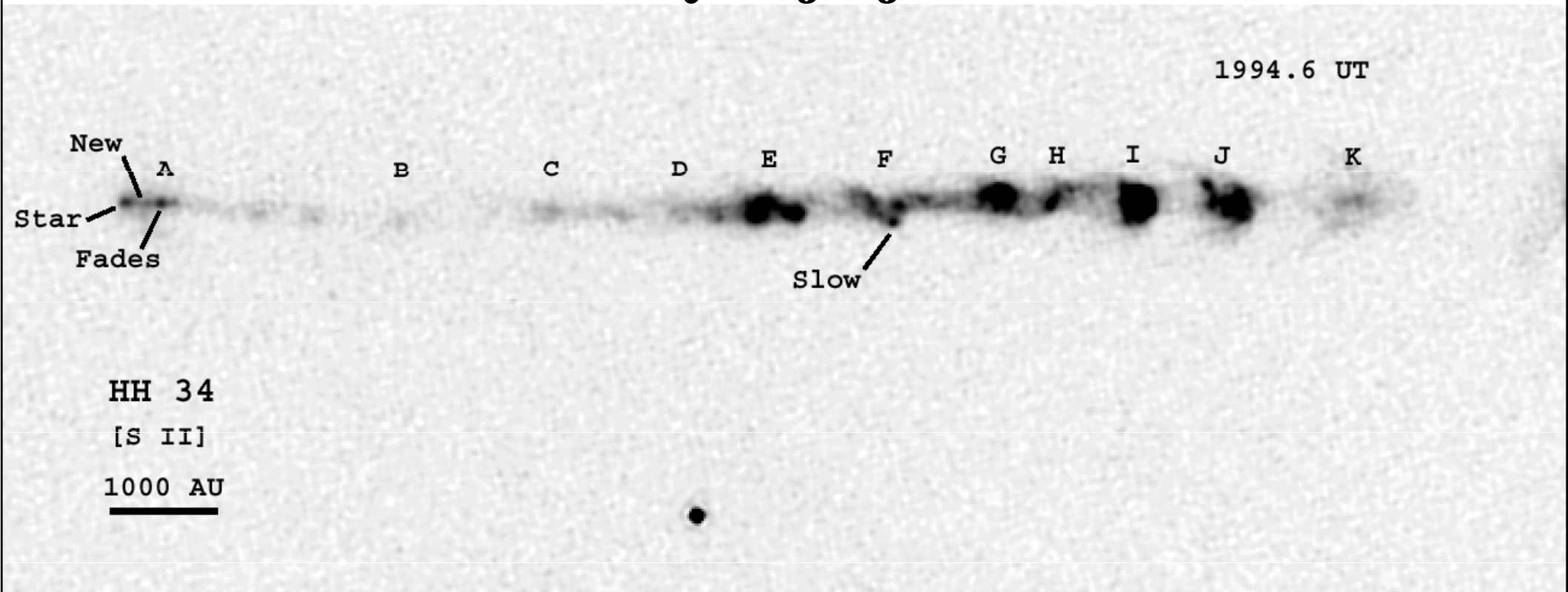
# Vznik hvězd v M 42 v Orionu



# Jety u mladých hvězd



# Simulace vývoje jetu HH 34



*Magnetic De Laval nozzle:* launches super-(magneto)sonic flow

