

Astrofyzika IV. cvičení

Nitro hvězd

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Nitro hvězd

Úloha 6.1 Určete množství uvolněné energie při vzniku 1 jádra atomu helia ze čtyř jader atomů vodíku. Porovnejte s množstvím energie uvolňovaným při 3α procesu.

Řešení: pp řetězec: $\Delta m = 4\frac{1}{1}\text{H} - \frac{4}{2}\text{He} = 4,76 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 4,29 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, tedy 26,8 MeV. Pro 3α proces: $\Delta m = 3\frac{4}{2}\text{He} - \frac{12}{6}\text{C} = 1,29 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 1,16 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, tudíž 7,2 MeV.

klidová hmotnost protonu $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

klidová hmotnost jádra helia $6,63 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\Delta m = (4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} - 6,63 \cdot 10^{-27}) \text{ kg} = 5 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

$$\Delta m c^2 = 4,3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Slunce vyzáří za 1 sekundu energii $3,86 \cdot 10^{26} \text{ J} \dots \Delta W$

$$\text{úbytek hmotnosti Slunce za 1 s je } \Delta m_S = \frac{\Delta W}{c^2} = 4,2 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

Nitro Slunce

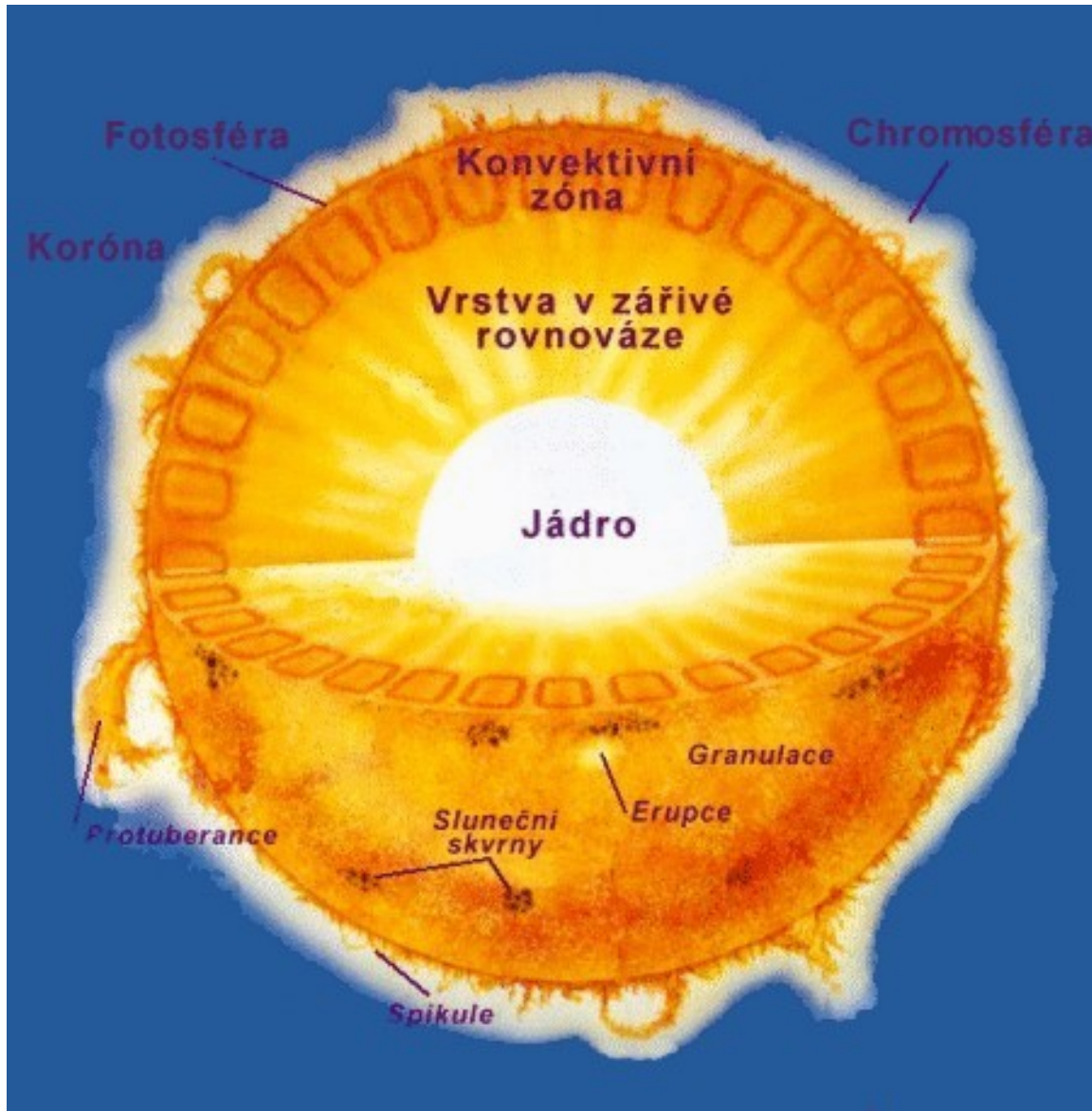


Aktivita Slunce



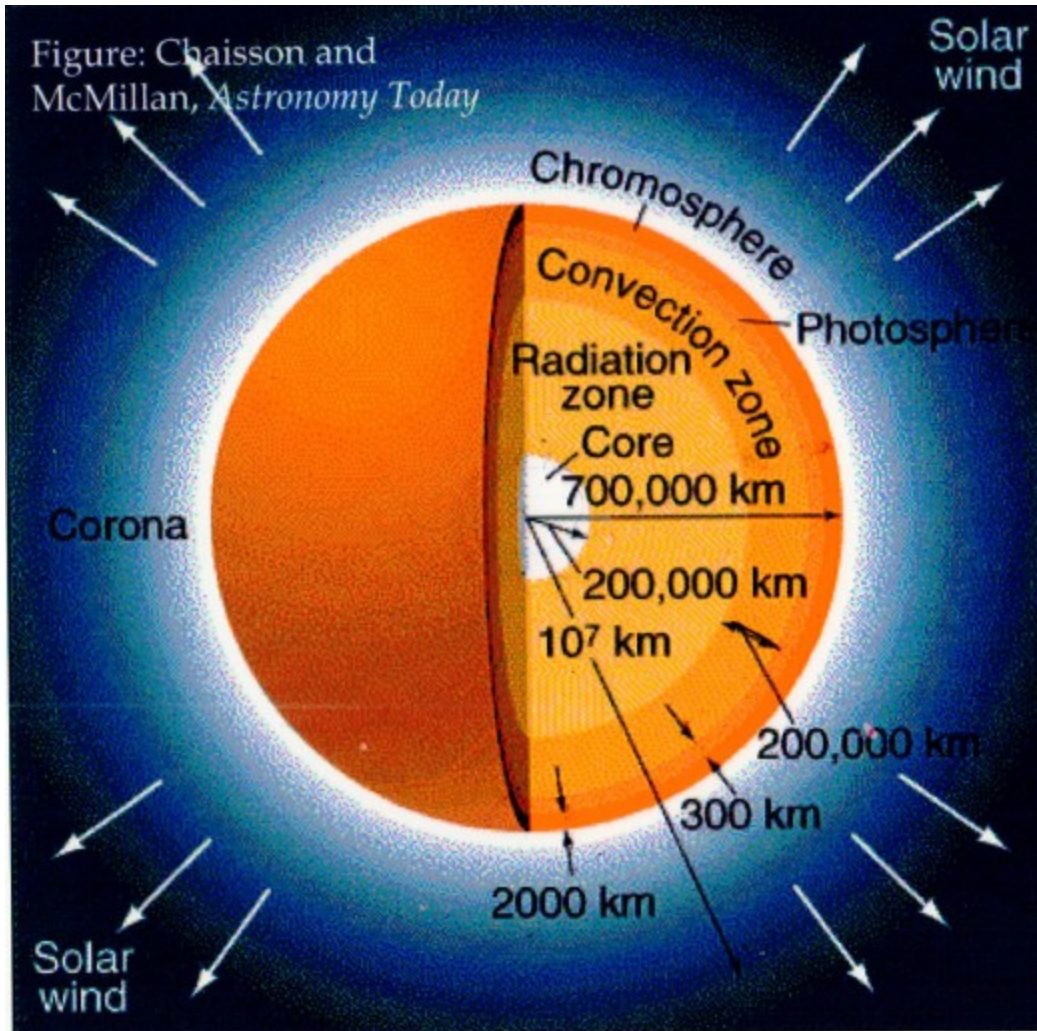
www.spacetelescope.org

Stavba nitra Slunce



- Core
- Radiation zone
- Convection zone
- Photosphere
- Chromosphere
- Corona

Stavba Slunce



Slunce - helioseismologie

Solar vibrations (helioseismology)



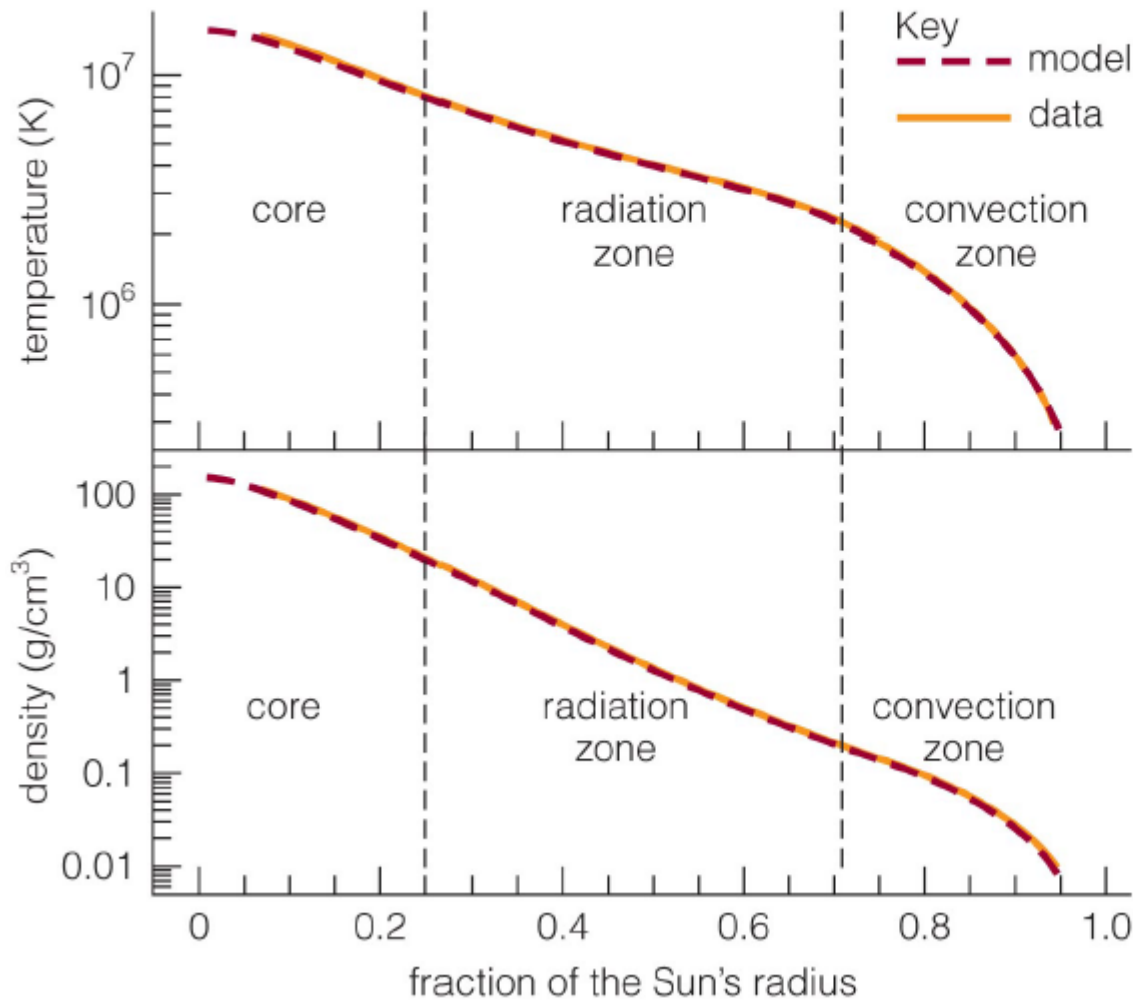
-2500 -2000 -1500 -1000 -500 0 500 1000 1500 2000
Velocity (m/s)

Patterns of vibration on the surface tell us about what the Sun is like inside.

Actual solar vibrations measured by the Doppler shift of the sun's photosphere.

Slunce - helioseismologie

Solar vibrations (helioseismology)



Data on solar vibrations agree very well with mathematical models of solar interior.

Nitro hvězd

Úloha 6.5 Centrální teploty dvou hvězd jsou $T_1 = 2 \cdot 10^8$ K a $T_2 = 1,8 \cdot 10^8$ K. Stanovte poměr množství uvolňované energie v nitrech obou hvězd.

Řešení: Z uvedených hodnot centrálních teplot vyplývá, že jde o hvězdy s velkými hmotnostmi, kde probíhá CNO cyklus, u něhož množství uvolňované energie $\sim T^{18}$. Hledaný poměr je $\left(\frac{20}{18}\right)^{18}$, k jehož výpočtu využijeme vztah $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, tedy $\left(\frac{20}{18}\right)^{18} = \left(1 + \frac{2}{18}\right)^{18} \cong e^2 \cong 7$.

Procvičení -

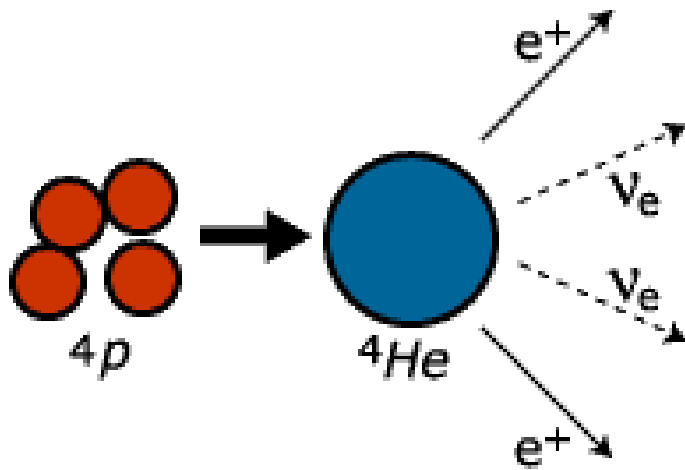
pro případ uvolňované energie CNO $\sim T^{16}$, stejné řešení,

$$\left(\frac{20}{16}\right)^{16} = \left(1 + \frac{4}{16}\right)^{16} \cong e^4 \cong 55$$

Nitro Slunce

Úloha 6.7 Odhadněte poměr počtu fotonů a neutrin vyzařovaných Sluncem za 1 sekundu. Při termonukleární syntéze prostřednictvím pp řetězce se uvolňuje energie 26,8 MeV, přičemž neutrina odnáší asi 2–5% této energie.

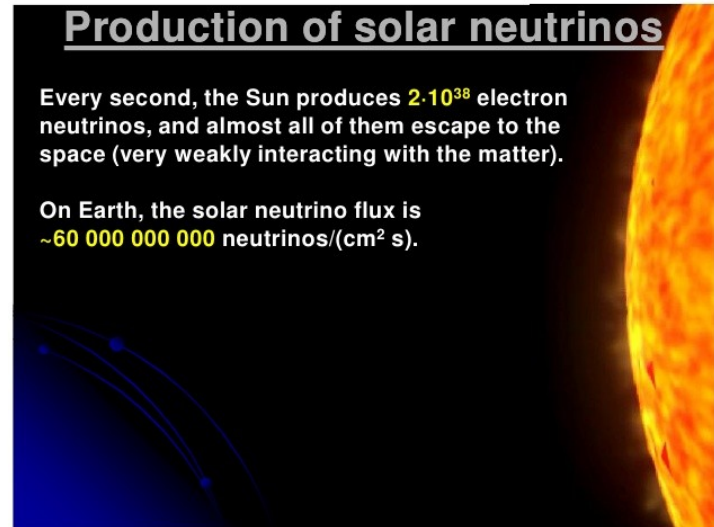
Řešení: Počet fotonů vyzářených Sluncem za 1 sekundu je dán vztahem $\frac{\sigma T^4}{2,7kT} 4\pi R_{\odot}^2 \cong 1,8 \cdot 10^{45}$. Počet neutrin se střední energií lze odhadnout takto. V první úloze jsme vypočetli energii $4,29 \cdot 10^{-12}$ J uvolňovanou při syntéze vodík \rightarrow helium. Slunce za jednu sekundu vyzáří $3,8 \cdot 10^{26}$ J. Tedy za jednu sekundu vznikne přibližně 10^{38} heliových jader. Při vzniku jednoho heliového jádra vzniknou dvě neutrina, proto za každou sekundu vznikne $2 \cdot 10^{38}$ elektronových neutrin. Poměr počtu fotonů a neutrin je přibližně 10^7 .



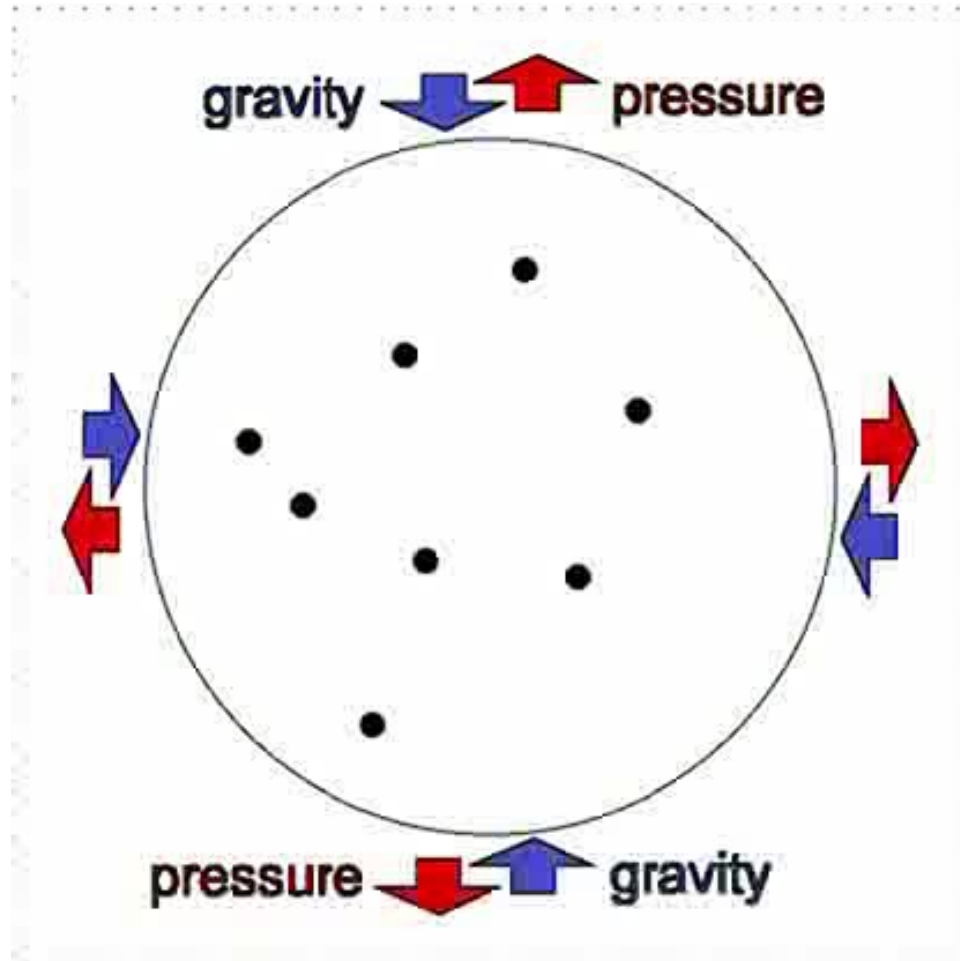
Production of solar neutrinos

Every second, the Sun produces $2 \cdot 10^{38}$ electron neutrinos, and almost all of them escape to the space (very weakly interacting with the matter).

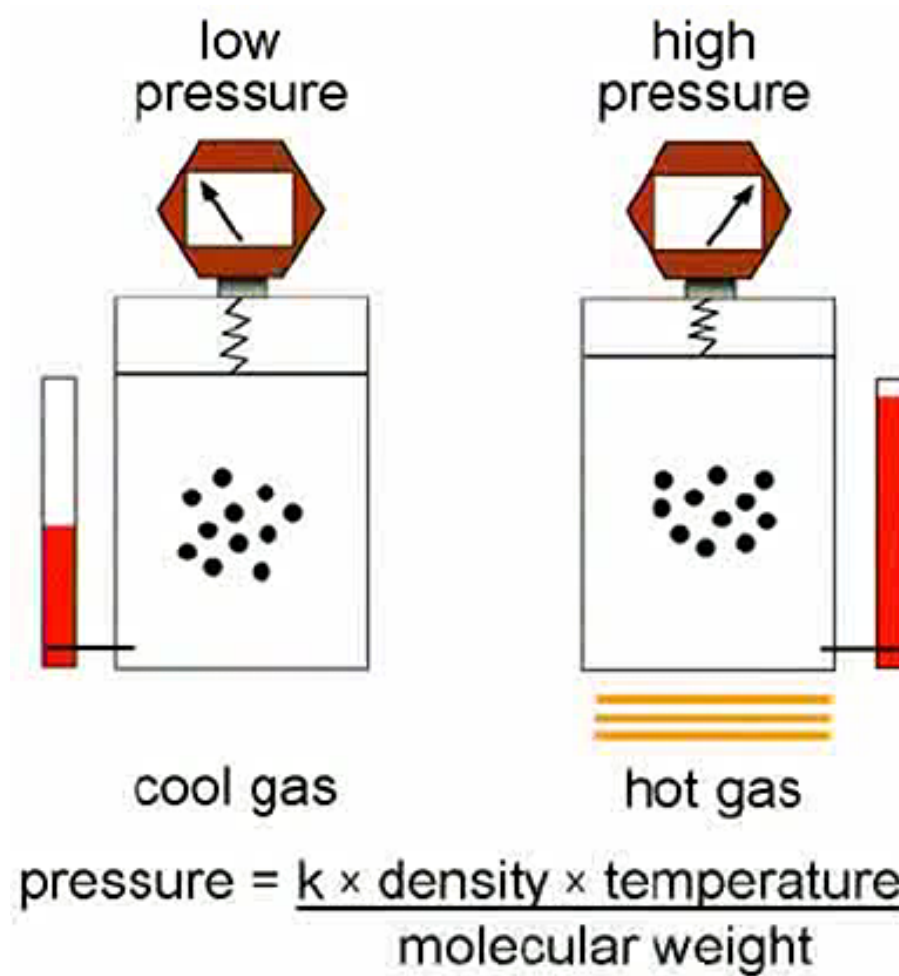
On Earth, the solar neutrino flux is $\sim 60\,000\,000\,000$ neutrinos/(cm² s).



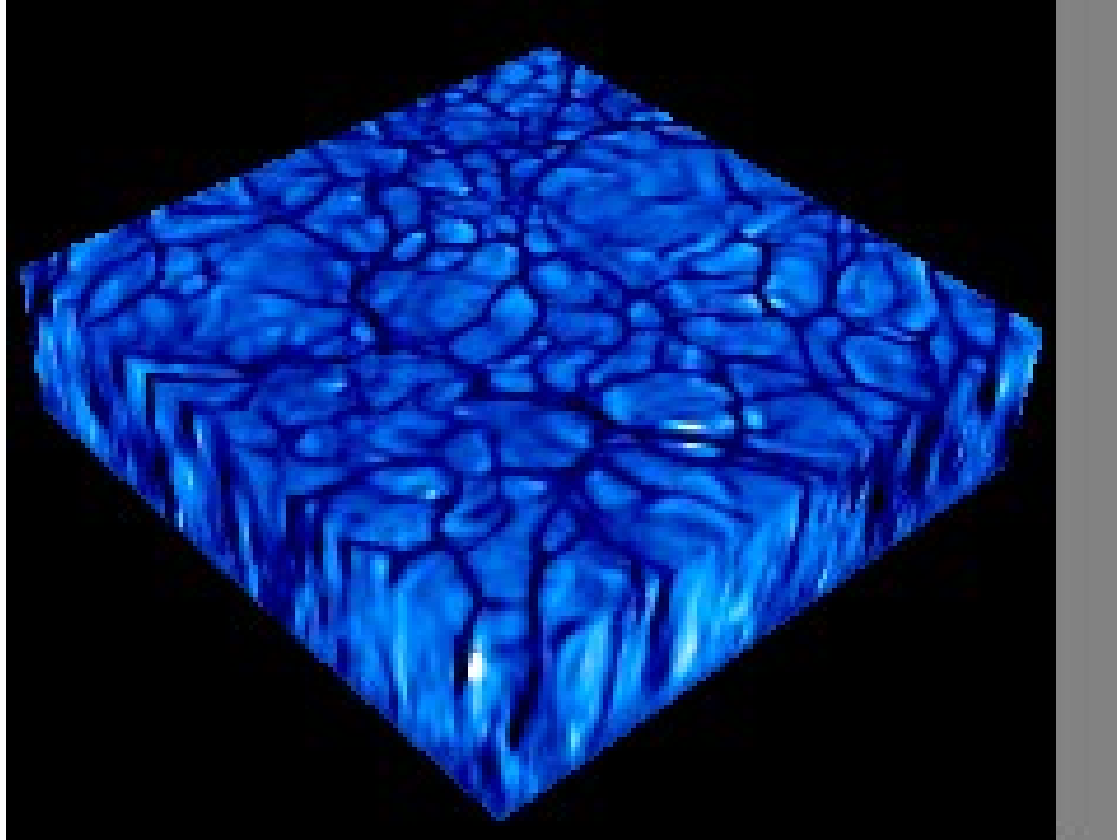
Nitro Slunce – činnost



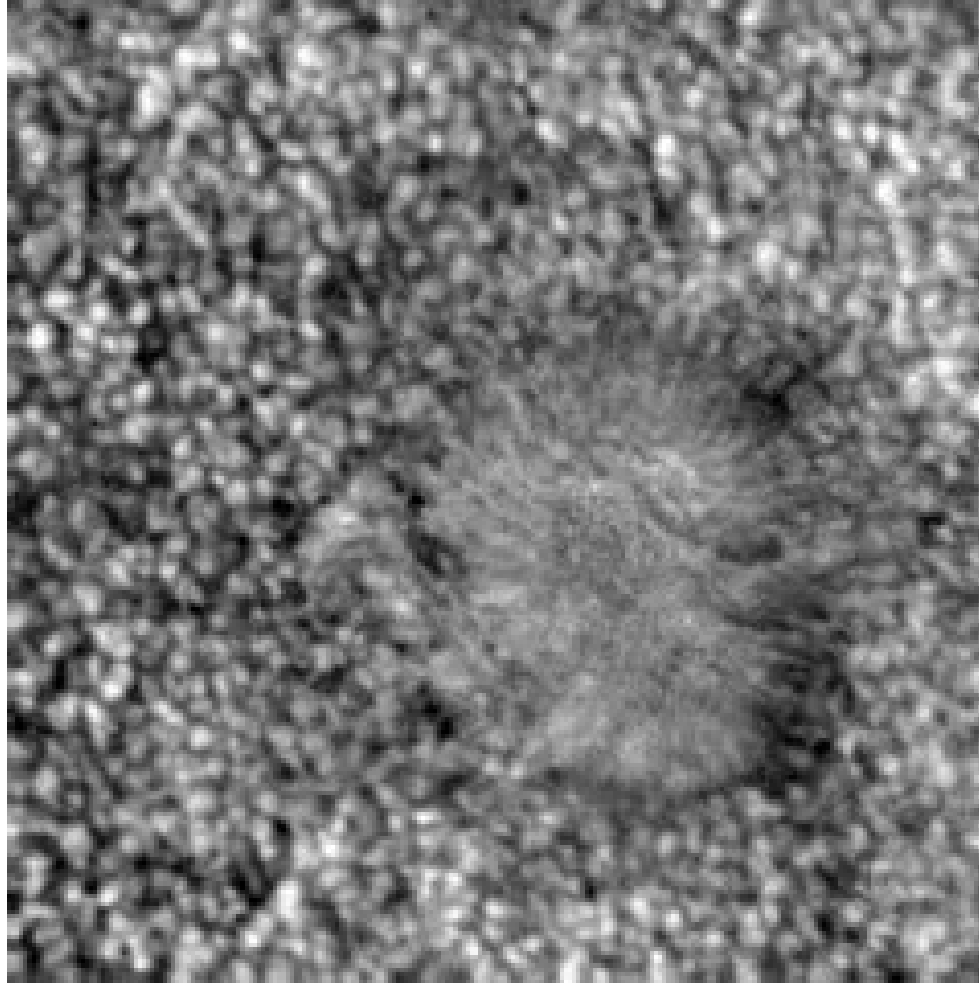
Nitro Slunce – činnost



Slunce – konvekce



Slunce – granulace



Slunce – sluneční vítr



Nitro Slunce – neutrina

Z detailního měření rozpadů neutrálního kalibračního bosonu Z v experimentech na urychlovači LEP v CERN víme, že **existují právě tři druhy (lehkých) neutrin**, tzv. elektronová ν_e , mionová ν_μ a tauonová ν_τ a jejich antičástice $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$ a $\bar{\nu}_\tau$. Elektronová antineutrino byla objevena až 26 let po Pauliho předpovědi v reakci: $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ antineutrin z jaderného reaktoru. V letošním roce si tedy připomeneme 60. výročí objevu neutrina. V roce 1962 bylo prokázáno, že svazky urychlovačových neutrin z rozpadů nabitých pionů při interakcích s protony a neutrony produkují miony, tj. že se jedná o mionová neutrina. Existence tauonového neutrina byla experimentálně prokázána až v roce 2000.

Nitro Slunce

Úloha 6.8 Odhadněte hodnotu centrálního tlaku v nitru Slunce.

Řešení: V zjednodušeném přiblížení platí pro tlakovou sílu na jednotkovou plochu tedy tlak $P_c = 4G\frac{\rho M}{R}$, po dosazením číselných hodnot hmotnosti a poloměru Slunce a průměrné hustoty $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dostaneme pro tlak $P_c \cong 10^{15} \text{ Pa}$. Podle standardních modelů Bahcalla je ve skutečnosti centrální tlak o řád vyšší.

Úloha 6.11 Podle standardního modelu nitra má hvězdná látka v centrální části Slunce hustotu $1,48 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a teplotu $1,56 \cdot 10^7 \text{ K}$, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0,73$ a helia $Y = 0,27$, příspěvek těžších prvků lze v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí za předpokladu, že vodík a helium jsou plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte rovněž tlak záření a oba tlaky porovnejte. Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi označíme μ_r

Řešení: $P_g = \frac{\rho}{\mu_r} T = 3,2 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ Pa}$. Podstatný je tlak plynu, tlak záření je zanedbatelný.

Nitro hvězd

Úloha 6.10 Odhadněte centrální tlak a teplotu ve hvězdě hlavní posloupnosti s poloměrem $1,3 R_{\odot}$ a hmotností $1,8 M_{\odot}$. Pro zjednodušení předpokládáme stejnou stavbu a chemické složení jako má Slunce.

Řešení: $\frac{P_c}{P_{c\odot}} \cong \left(\frac{R_{\odot}}{R}\right)^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 \cong 1,1, \quad \frac{T_c}{T_{c\odot}} \cong \frac{R_{\odot}}{R} \frac{M}{M_{\odot}} \cong 1,4.$

$$P \sim \frac{M^2}{R^4} \qquad P \sim \rho T \sim \frac{M}{R^3} T \qquad T \sim \frac{M}{R}$$

podmínky úlohy

Nitro hvězd

Úloha 6.20 Dokažte, že střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi plně ionizovaných atomů v nitru hvězd je rovna $\mu_r = \frac{2}{1+3X+0,5Y}$, kde X , Y , Z označuje relativní množství vodíku, helia a ostatních prvků.

Řešení: $\mu_H = \frac{1}{2}$, $\mu_{He} = \frac{4}{3}$, $\mu_{kovy} = 2$, $\mu_r = \frac{1}{\frac{X}{\mu_H} + \frac{Y}{\mu_{He}} + \frac{Z}{\mu_{kovy}}} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$ Protože

platí $X + Y + Z = 1$ dostaneme $\mu_r = \frac{2}{1 + 3X + 0.5Y}$.

střední relativní hmotnost μ_r připadající na jednu částici směsi úplně ionizovaných plynů je

dána vztahem $\mu_r = \frac{1}{\frac{X}{\mu_H} + \frac{Y}{\mu_{He}} + \frac{Z}{\mu_{kov}}} = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} = \frac{2}{1 + 3X + 0,5Y}$,

platí $\mu_H = \frac{1}{2}$ $\mu_{He} = \frac{4}{3}$ $\mu_{kov} = 2$, dále $X + Y + Z = 1$

Nitro Slunce

Úloha 6.29 Dokažte, že v centrální oblasti Slunce nenastává přenos energie konvekcí. Velikost zářivého výkonu uvolňovaného na jednotku hmotnosti je odhadována na $1,35 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $P = 3,20 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$, $T = 1,56 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\kappa = 0,138 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Řešení: Minimální kritická hodnota zářivého výkonu na jednotku hmotnosti přenášená konvekcí je dána vztahem $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{16\pi Gc}{\kappa} \frac{aT^4}{3} \frac{1}{P}$, kde $a = \frac{4\sigma}{c}$. Po číselném dosazení obdržíme $1,36 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$. Protože propočítaná hodnota je větší, přenos konvekcí nenastává.

Úloha 6.30 Předpokládejme střední hustotu Slunce $1,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a střední opacitu v nitru Slunce pro ionizovaný vodík $\kappa = 0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$. Určete střední volnou dráhu fotonu ve středu Slunce a střední teplotní gradient. Za zjednodušujícího předpokladu, že střední volná dráha fotonu směrem k povrchu je stále stejná, odhadněte charakteristický čas, za který foton dospěje z nitra k povrchu Slunce.

Řešení: Střední volná dráha fotonu je $l = \frac{1}{\kappa\rho} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Při centrální teplotě Slunce $T_c = 1,4 \cdot 10^7 \text{ K}$ a přibližné povrchové teplotě $T_p = 6 \cdot 10^3 \text{ K}$ je střední teplotní gradient roven $\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_c - T_p}{R_\odot} \cong 2 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$. Pro šíření fotonu nitrem Slunce k povrchu platí $R_\odot = \sqrt{z}l$, kde z udává počet absorpcí a emisí. Dosazením dostaneme $z = 10^{22}$. Každá emise respektive reemise proběhne průměrně za 10^{-8} s , tedy za $10^{22} 10^{-8} = 10^{14} \text{ s} \cong 3 \cdot 10^6$ roků dospěje foton k povrchu.

Přechod Slunce – červený obr

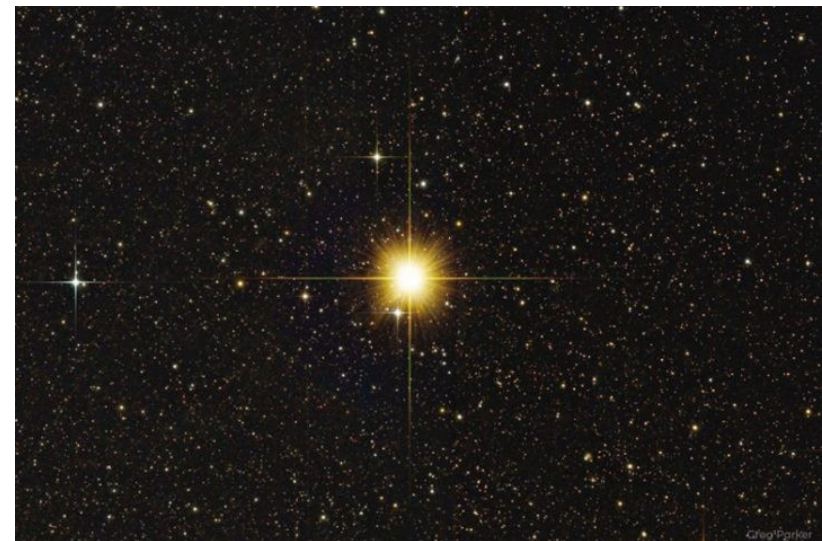
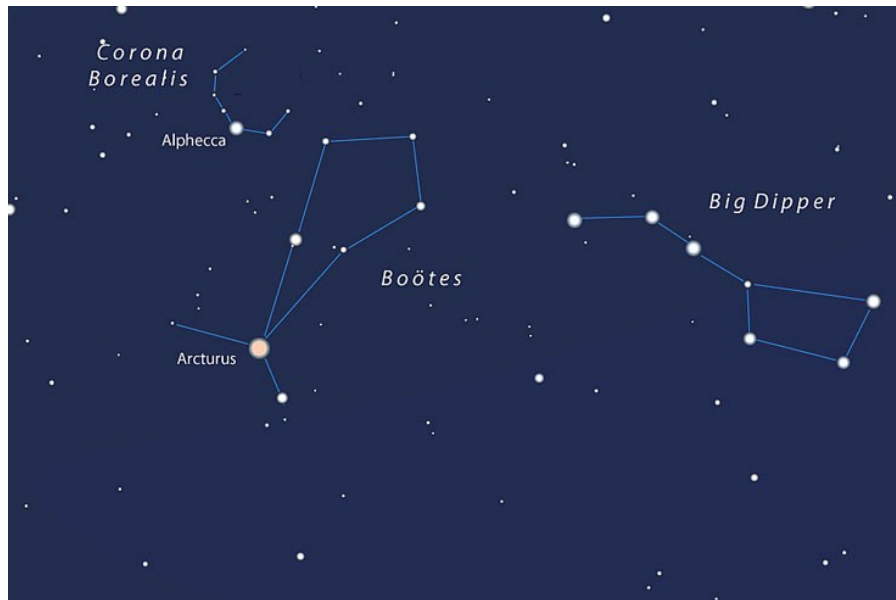


www.spacetelescope.org

Červení obři - Arcturus

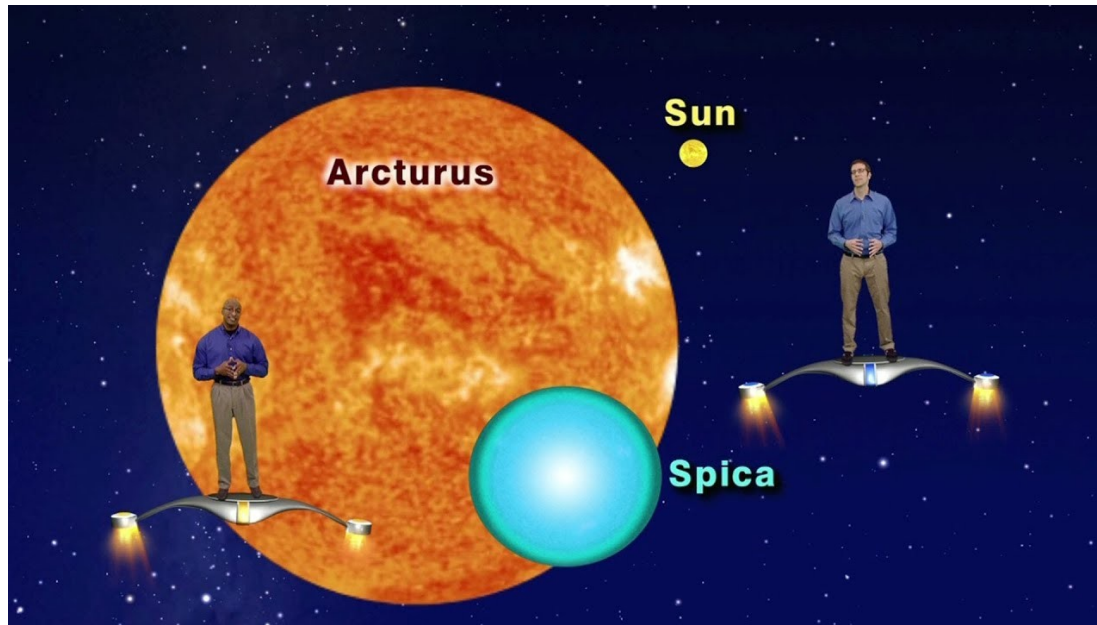
Úloha 10.2 Určete gravitační potenciální energii vnější konvektivní obálky červeného obra Arktura, u kterého je hmotnost jádra $M_J = 0,8 M_\odot$ a vnější obálky $M_{ob} = 0,3 M_\odot$, poloměr dosahuje $30 R_\odot$. Stanovte celkovou energii hvězdy.

Řešení: Gravitační potenciální energie je rovna $E_p = -GM_J M_{ob}/R = -3,0 \cdot 10^{39}$ J. Za předpokladu $\gamma = 5/3$ má viriálová věta tvar $2\langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = 0$. Celková energie hvězdy – červeného obra je $\langle E_c \rangle = \langle E_k \rangle + \langle E_p \rangle = -1,5 \cdot 10^{39}$ J.



Červení obři - Arcturus

1,1 Ms , 25 Rs, 4 300 K, 170 Ls , Vr = - 5,2 km/s



Červení obři – model

Úloha 10.3 Modelový červený obr má poloměr $20 R_{\odot}$. Kompaktní jádro o hmotnosti $M_j = 0,6 M_{\odot}$ je obklopeno rozsáhlou vnější konvektivní obálkou o hmotnosti $M_{ob} = 0,2 M_{\odot}$. Určete gravitační potenciální energii obálky! Aplikací viriálové věty, za předpokladu $\gamma = 5/3$ stanovte tepelnou energii E_k plynu. Za zjednodušujícího předpokladu, že obálka je složena z plně ionizovaného vodíku, určete velikost energie, která by se uvolnila při ochlazování a rekombinaci na neutrální vodík. Rekombinační energie je $13,6\text{eV}$.

Řešení: Gravitační potenciální energie je $E_p \cong -GM_j M_{ob}/R \cong -2,3 \cdot 10^{39}\text{ J}$. Při platnosti viriálové věty $\langle E_p \rangle + 2\langle E_k \rangle = 0$ obdržíme $E_k \cong 1,15 \cdot 10^{39}\text{ J}$. Celková rekombinační energie obálky je $E_{rek} = \frac{M_{ob}}{m_H} 2,18 \cdot 10^{-18} = 5,2 \cdot 10^{38}\text{ J}$.

Cefeidy – perioda pulsace

Vraťme se k výkladu použití rozměrové analýzy ve fyzikální výuce na střední škole, kde je zpravidla uváděna tradičním řešením úlohy – hledání vztahu pro dobu kmitu kyvadla. Obdobně lze v astrofyzikální výuce začínat problematikou pulsací hvězd. Analogicky jako u kyvadla vycházíme z předpokladu malých amplitud pulsací hvězd, tj. zkoumáme lineární pulsace. Připomínám, že observačně zjištěná amplituda kmitů zpravidla nepřesahuje asi 10 %. Pulsace představují periodické smršťování a rozšiřování poloměru hvězd, při kterých zjednodušeně předpokládáme jejich radiální sféricko-symetrický průběh. Fyzikální podstata obou analyzovaných jevů – kmitání kyvadla či pulsace hvězd jsou stejné. Jde o mechanické pohyby v gravitačním poli, odpovídající nevelkým odchylkám od rovnovážného stavu, v případě hvězd popisovaného rovnicí hydrostatické rovnováhy. Základním parametrem zachycujícím pulsace hvězd je jejich doba kmitu, v astrofyzice hovoříme o periodě vlastních kmitů T . Položme si otázku na čem závisí?

Cefeidy – perioda pulsace

Z astrofyzikálního hlediska bude závislá na přitažlivosti charakterizované gravitační konstantou G , dále lze předpokládat závislost na parametrech respektive charakteristikách hvězd, hustotě ρ (při vyloučení hmotnosti M dosazením $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ a poloměru R). Při hledání závislosti periody pulsace vyjdeme z předpokladu, že $T \sim G, \rho, R$. Platí $T \sim G^x \rho^y R^z$, rozměr jednotlivých parametrů je $[T] = \text{s}$, $[G] = \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $[R] = \text{m}$. Porovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme $s = \text{m}^{3x} \cdot \text{kg}^{-x} \cdot \text{s}^{-2x} \cdot \text{kg}^y \cdot \text{m}^{-3y} \cdot \text{m}^z$. K platnosti rozměrové rovnice musejí být splněny algebraické rovnice:

$$[\text{s}] \quad 1 = -2x$$

$$[\text{m}] \quad 0 = 3x - 3y + z$$

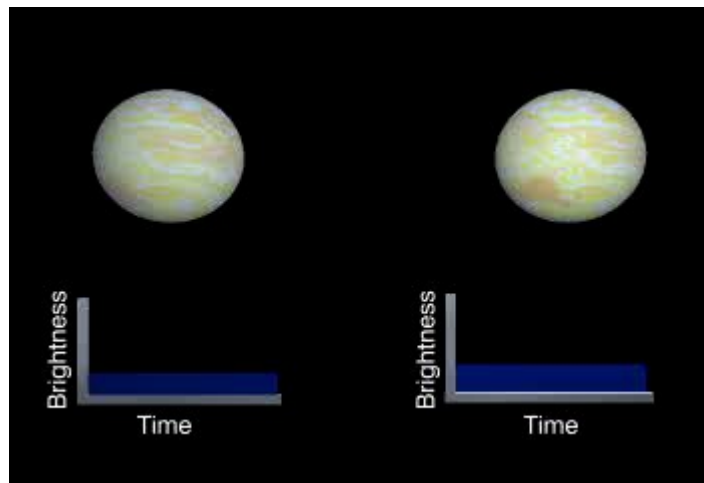
$$[\text{kg}] \quad 0 = -x + y$$

Jejich řešením dostaneme $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$. Po úpravě a dosazení získáme závislost pro periodu pulsací hvězd $T \sim (G\rho)^{-\frac{1}{2}}$, kterou obvykle

Cefeidy – perioda pulsace

upravujeme na vztah $T\rho^{\frac{1}{2}} = \text{konst.}$. Perioda závisí na hustotě hvězdy, jak v původním teoretickém historickém odvození dokázal *Eddington* na základě termodynamických úvah v [6]. Čím je větší hustota hvězdy, tím je kratší perioda pulsací, což potvrzují astronomická pozorování, miridy s nízkou hustotou se vyznačují periodami pulsací stovky dnů, zatímco naopak periody u bílých trpaslíků o vysoké hustotě jsou menší než hodinu.

Poznámka: *Uvedený vztah $T \sim (G\rho)^{\frac{1}{2}}$ je charakteristický pro každý astrofyzikální objekt, udává časovou škálu procesů spojených s expanzí, kolapsem, pulsací atd. v situacích, kdy je dominující gravitační síla. V závislosti na hustotě je časová škála milisekundy, hodiny, roky, miliony až miliardy roků.*



Úlohy

11.1, 11.5. 11.8, 11. 9, 11.11, 11. 12, 11.13, 11.14, 11.15. 11.16

Studenti úlohy

1. Střední úhlový průměr Slunce pozorovaného ze Země činí $9,34 \cdot 10^{-5}$ rad. Určete střední hustotu Slunce, jestliže známe oběžnou dobu Země kolem Slunce $T = 3,156 \cdot 10^7$ s.

2. Při pozorování cefeidy byla zjištěna perioda pulsace 2,5 dne a pozorovaná hvězdná velikost 18,6 mag. Určete její vzdálenost, jestliže mezi periodou pulsace a absolutní hvězdnou velikostí platí vztah

$$\log P + 0,394 M = - 0,657 .$$

3. Supernova Ia s maximálním zářivým výkonem $L \approx 10^9 L_S$ se vyznačuje pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí $m = 20$ mag. Určete její absolutní hvězdnou bolometrickou magnitudou M a vzdálenost r .

4. Dvě srážející se galaxie se vyznačují obě pozorovanou hvězdnou velikostí 12,00 mag. Jaká je jejich výsledná hvězdná velikost m_c ?

5. Stanovte pozorovanou hvězdnou velikost složek trojhvězdy, jejíž celková pozorovaná bolometrická hvězdná velikost je $m_c = 3,70$ mag, poměr hustot zářivých toků druhé a třetí složky je 2,8 a rozdíl pozorovaných bolometrických hvězdných velikostí třetí a první složky činí $m_3 - m_1 = 3,32$ mag.

6. Rozdíl absolutních bolometrických hvězdných velikostí dvou hvězd o stejných efektivních povrchových teplotách činí 6,4 mag. Určete poměr poloměrů obou hvězd.

Studenti úlohy

7. Hmotnost Vegy činí $2 M_s$, poloměr $3R_s$ a zářivý výkon $60 L_s$. Vypočtete její Kelvinovu-Helmholtzovu časovou škálu a nukleární časovou škálu.

8. Typická hustota slunečního větru ve vzdálenosti Země činí $7 \cdot 10^6$ částic v m^3 . Střední složka slunečního větru má rychlost $\sim 500 \text{ km} \cdot s^{-1}$. Zjednodušeně předpokládejme, že je složen převážně z protonů. Určete úbytek hmotnosti Slunce v jednotkách M_s za rok. Jaké to má důsledky pro dráhu planet?

9. Stanovte hmotnost bílého trpaslíka Procyon B, jehož efektivní teplota činí $7\,750 \text{ K}$, zářivý výkon $0,0005 L_s$ a gravitační rudý posuv $z = 10^{-4}$.

10. Určete poměr gravitačních rudých posuvů bílých trpaslíků 40 Eri B a 40 Eri C. Hvězdy se vyznačují následujícími charakteristikami.

40 Eri B: efektivní teplota $17\,000 \text{ K}$, zářivý výkon $0,017 L_s$, hmotnost $0,4 M_s$

40 Eri C: efektivní teplota $3\,100 \text{ K}$, zářivý výkon $0,008 L_s$, hmotnost $0,2 M_s$

Termín odevzdání řešení 25. dubna 2021!!!