Direktní součin matic

Nechť jsou A a B matice s $l_{Ac}\, l_{Ar}$ a $l_{Bc}\, l_{Br}$ prvky:

A_{ij} , i=1,...,l_{Ar} , j=1,...,l_{Ac} , and B_{km} , k=1,...,l_{Br}, m=1,...,l_{Bc} .

Matice $C=A\times B$, označovaná jako direktní součin, je tvořena $l_{Ar}\, l_{Ac}\, l_{Br}\, l_{Bc}$ všemi součiny $A_{ij}\, B_{km} = C_{ik,jm}$. Alternativní symbol je $\boldsymbol{C=A\otimes B}$.

Pro zacházení s maticemi je vhodné pravoúhlé uspořádání prvků.

Pár symbolů ik označuje řádky, pár jm sloupce pravoúhlého pole

$l_{Ar} l_{Br}$ řádků a $l_{Ac} l_{Bc}$ sloupců matice C.

Vodítkem pro definici násobení matic vzniklých direktním součinem je požadavek, aby „transformace“ byly reprezentovány postupným násobením matic:

$A''=A'A$ reprezentuje operaci A následovanou operací A';

podobně $B''=B'B$ a $C''=C'C=A'A\times B'B$. Prvky direktního součinu jsou

$$(C'C)_{ik,jm} = \sum_p \sum_q A'_{ip} A_{pj} B'_{kq} B_{qm} = \sum_p \sum_q A'_{ip} B'_{kq} A_{pj} B_{qm} = \sum_p \sum_q C'_{ik,pq} C_{pq,jm},$$

což vyjde s použitím obvyklého pravidla “řádek-krát-sloupec” s maticemi C' a C.

Pravoúhlé uspořádání prvků $A{\times}B$:

$$A\times B=\begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1l_{Ac}}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2l_{Ac}}B \\ . & & & \\ A_{l_{Ar}1}B & A_{l_{Ar}2}B & \dots & A_{l_{Ar}l_{Ac}}B \end{bmatrix},$$

kde B je pravoúhlý blok

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1l_{Bc}} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2l_{Bc}} \\ . & & & \\ B_{l_{Br}1} & B_{l_{Br}2} & \dots & B_{l_{Br}l_{Bc}} \end{bmatrix}.$$

Jaká je stopa direktního součinu čtvercových matic?

Příklady direktních součinů ireducibilních reprezentací grupy C_{3v}

zjednodušení při práci s charaktery !

tři třídy: $\{E\}$, $\{C_3, C_3^2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

hledáme charaktery reducibilních/ireducibilních reprezentací direktních součinů

(z Inui, Tanabe, Onodera, Group theory and its applications in physics, Springer 1976)

Table 4.2. Characters of the irreducible representations of the group C_{3v}

Class:	$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$
Element:	E	C_3, C_3^{-1}	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
E	2	-1	0

$A_1 \times A_1 = A_1$ (ireducibilní)

$A_1 \times A_2 = A_2$ (ireducibilní)

$A_1 \times E = A_2 \times E = E$ (ireducibilní)

$E \times E$ (reducibilní) $= A_1 + A_2 + E$:	4	1	0	
$-A_1$:	3	0	-1	
$-A_2$:	2	-1	0	(zbylé E)