

6. Cyklotronová rezonance elektronů a děr

Idea sledování stavů kolem minima vodivostního a maxima valenčního pásu v polovodičích – Shockley 1953:

Cyclotron Resonances, Magnetoresistance, and Brillouin Zones in Semiconductors

W. SHOCKLEY

Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, New Jersey

(Received March 10, 1953)

ONE of the basic problems in the band theory of solids is to determine the shapes of the energy surfaces in the Brillouin zone. A possible solution is furnished by cyclotron resonances at low temperatures (say 10°K) in weakly doped germanium: For this situation, (1) Maxwell statistics can be used, (2) the interactions of the carriers are unimportant so that a description in terms of single carrier momenta in the Brillouin zone is good, and (3) the collision frequency ν is so much less than $\omega = 2\pi f$ for 1.25-cm waves¹ that inertial effects dominate, and the dependence of ν upon position in the Brillouin zone is unimportant.

Some typical situations in which resonance might be observed are illustrated in Fig. 1. The E 's and v 's vary as $\exp(i\omega t)$ so that the conductivity $nq\mu$ is complex. The standard transverse and longitudinal magnetoresistance configurations are represented in (*t*) and (*l*), a combination of (*l*) and the Hall effect in (*tH*), and circular polarization in (*c*).

$$\mu_t(\omega, H) = v_x/E_x, \quad (1)$$

$$\mu_H(\omega, H) = cE_y/HE_x. \quad (2)$$

$$\mu_{tH}(\omega, H) = v_y/E_y = \mu_t(\omega, H) \{1 + [H\mu_H(\omega, H)/c]^2\}^{-1}. \quad (3)$$

Some of the resonances may be illustrated by spherical energy surfaces with a single (relaxation) frequency ν and $\omega_H = qH/m^*c$. We find that μ_t , μ_H , and μ_l are independent of H :

$$\mu_t = \mu_H = \mu_l = q/\{m^*(\nu + i\omega)\}, \quad (4)$$

$$\mu_{tH} = q(\nu + i\omega)/\{m^*[(\nu + i\omega)^2 + \omega_H^2]\}, \quad (5)$$

$$\mu_c = q[\nu + i(\pm\omega + \omega_H)]/\{m^*[(\nu + i\omega)^2 + \omega_H^2]\}. \quad (6)$$

The plus sign in μ_c holds when the field rotation and cyclotron orbit have the same direction. If $\omega > 10\nu$, as may be achieved in Ge at low temperatures, the resonance peaks observed at $\omega_H^2 = \omega^2 - \nu^2$ will be within 1 percent of that proper for m^* alone. If ν is a function of \mathcal{E} , then the mobility expressions should be based on finding v_x , v_y as functions of E_x and E_y and averaging over the

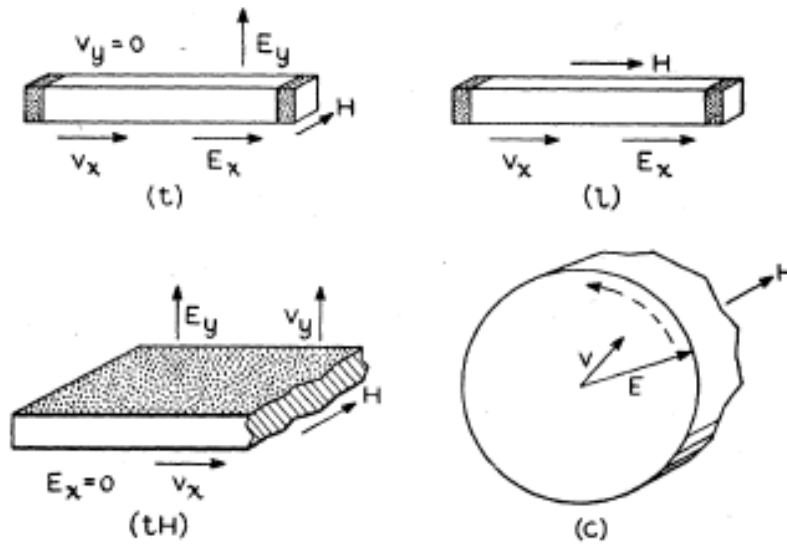


FIG. 1. Some typical situations for observing cyclotron resonances: (t), conventional transverse magnetoresistance configuration; (l), conventional longitudinal magnetoresistance configuration; (tH), a transverse situation in which Hall effect contributes to resistance; (c), circularly polarized electric field.

carriers with a weighting factor of \mathcal{E} ; for a constant mean free path, this will lead to the customary factors of $8/3\pi$, etc. and to a small magnetoresistance in μ_t . This averaging does not affect the conclusion that if $\omega = \omega_H$, μ_c reduces to $\mu_c(0, 0)$ for the wave rotating in the cyclotron direction.

Herman's calculations² suggest that the energy surface for the conduction band in Ge consists of six ellipsoids of revolution lying on [100] directions with a longitudinal mass m_1 and transverse mass m_2 . The valence band is probably triply degenerate with surfaces of three sheets of nonellipsoidal shapes.³ For these sheets we can define "tubes," each having its characteristic mass m_α and corresponding cyclotron frequency.⁴

For an ellipsoidal energy surface given by

$$\mathcal{E} = (P_x^2/2m_x) + (P_y^2/2m_y) + (P_z^2/2m_z) \quad (7)$$

and a magnetic field with direction cosines α, β, λ , the effective cyclotron mass is

$$m^* = [m_x m_y m_z / (m_x \alpha^2 + m_y \beta^2 + m_z \lambda^2)]^{1/2}. \quad (8)$$

Separate resonances should be observed for each different orientation of ellipsoid to H . Thus, for H parallel to $[100]$ for the six ellipsoids, m^* will equal $(m_1 m_2)^{\frac{1}{2}}$ four times and m_2 twice; there will be no longitudinal resonance. For H parallel to $[111]$, $m^* = m_2 [3m_1 / (m_1 + 2m_2)]^{\frac{1}{2}}$ six times, and for (l) we find

$$\mu_l = (2m_1 + m_2) [(\nu + i\omega)^2 + \omega_H^2] m_1 m_2 / (2m_1 + m_2)(m_1 + 2m_2) + 3m_1 m_2 (\nu + i\omega) [(\nu + i\omega)^2 + \omega_H^2]. \quad (9)$$

Similar, but generally more complex, expressions apply to other cases.

Evidently, if the surfaces are ellipsoids, the determination of the resonance field for several conditions will give a unique determination of the mass parameters and hence of the energy surface shapes.

For the triply degenerate surface, a distribution of masses from zero (at the conical contact of the outer surfaces) to infinity will be present. If the inner surface is nearly spherical, a strong isolated resonance will occur. For this and the doubly degenerate case, it appears likely that the predicted resonance behavior will require difficult numerical calculations. However, it also appears probable that a numerical fit based on the three parameters³ will be unique.

I am indebted to J. K. Galt, C. Herring, H. Suhl, and R. F. Wick for several stimulating discussions.

¹ Marked electron inertia effects with $\omega/\nu \approx 0.2$ at 160°K have been reported for electrons in germanium by T. S. Benedict and W. Shockley, Phys. Rev. **89**, 1152 (1953).

² F. Herman, Phys. Rev. **88**, 1210 (1952); F. Herman and J. Callaway, Phys. Rev. **89**, 518 (1953).

³ W. Shockley, Phys. Rev. **78**, 173 (1950).

⁴ W. Shockley, Phys. Rev. **79**, 191 (1950).

W. Shockley, Phys. Rev. **90**, 491 (1953).

Pohyb (kvazi)elektronů a děr v magnetickém poli v aproximaci parabolických pásů (tedy efektivní hmotnosti); začneme s izotropním pásem

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m^*}. \quad (6.1)$$

Klasická pohybová rovnice pro částici ve statickém magnetickém poli s intenzitou H a harmonickém elektrickém poli s amplitudou E_0 a frekvencí ω je

$$m^* \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} \right) = e \left(\vec{E}_0 e^{i\omega t} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} \right), \quad (6.2)$$

kde τ je střední doba mezi srážkami (za kterou se vynuluje driftová rychlost v způsobená vnějším polem). Předpokládejme magnetické pole orientované ve směru osy z a lineárně

polarizovanou harmonickou vlnu podél x . Harmonická časová závislost driftové rychlosti pak má amplitudy ve směru x a y , splňující díky pohybové rovnici (6.2) vztahy

$$\begin{aligned} m^* \left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_x &= eE_x + \frac{ev_y H_z}{c} , \\ m^* \left(i\omega + \frac{1}{\tau} \right) v_y &= -\frac{ev_x H_z}{c} . \end{aligned} \quad (6.3)$$

Amplituda x -ové složky rychlosti je

$$v_x = \frac{eE_x}{m^*} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} , \quad (6.4)$$

kde

$$\omega_c = \pm \frac{eH_z}{m^* c} = \pm \frac{eB_z}{m^* c} \quad (6.5)$$

je cyklotronová frekvence. Protože sledujeme nemagnetické materiály, je magnetická indukce B rovna přibližně intenzitě magnetického pole H . Znaménko v (6.5) vybírá smysl rotačního pohybu, který je pro elektron a díru opačný.

Předchozí vztahy jsou ve stále používané soustavě jednotek cgs; v SI je cyklotronová frekvence

$$\omega_c = \pm \frac{eB_z}{m^*} . \quad (6.5)_{SI}$$

Orientace ve velikostech důležitých veličin:

vhodné frekvenční pásmo je 24 GHz (případně 9 GHz), tedy

$$\omega_c = 151E9 \text{ rad/s}; T_c = 2\pi/\omega_c = 42 \text{ ps}; \lambda_{vac} = cT_c = 1.3 \text{ cm}; \hbar\omega_c = 0.095 \text{ meV}.$$

Intenzita magnetického pole pro rezonanci je pak

$$H = 860 \text{ Oe} = 6.8E5 \text{ A/m}.$$

(Horizontální složka zemského magnetického pole v Brně je asi 0.2 Oerstedu nebo 16 A/m.)

Dále posoudíme poloměr R_c cyklotronové orbity: pro střední termální rychlost

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m^*}} \approx 4E6 \text{ cm/s pro } m^* = 0.1m_0 , T = 4 \text{ K}$$

je

$$R_c = \frac{\langle v \rangle T_c}{\pi} \approx 300 \text{ nm} .$$

Je třeba si uvědomit, že pravidelný pohyb po cyklotronových orbitách je přídatkem k chaotickému termálnímu pohybu.

Driftová rychlost nabitých částic je odpovědná za proudovou hustotu; ta má také harmonickou časovou závislost, ve směru x je to

$$j_x(t) = Nev_x e^{i\omega t} = \frac{Ne^2}{m^*} \frac{i\omega + 1/\tau}{\omega_c^2 + (i\omega + 1/\tau)^2} E_x e^{i\omega t} , \quad (6.6)$$

kde N je koncentrace nosičů. Podle (6.4) je ovšem amplituda driftové rychlosti úměrná amplitudě elektrického pole a můžeme zavést (komplexní) vodivost jako konstantu úměrnosti mezi proudovou hustotou a intenzitou elektrického pole:

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \sigma_0 \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} , \quad (6.7)$$

kde

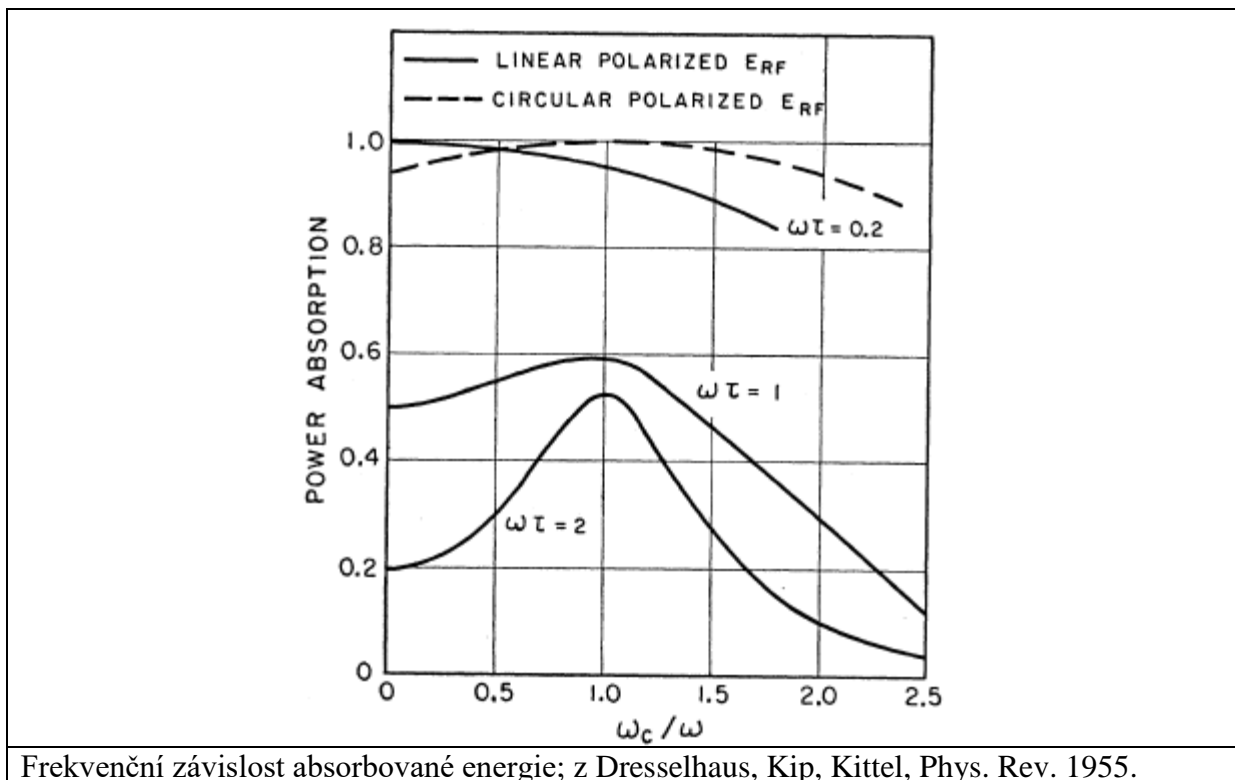
$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m^*} \quad (6.8)$$

je statická ($\omega=0$) vodivost.

Energie odebíraná ze střídavého pole je úměrná reálné části komplexní vodivosti (je to Jouleovo teplo vznikající díky tlumení pohybu nosičů náboje s relaxační dobou τ). Frekvenční závislost absorbované energie je vhodné vyjádřit pomocí bezrozměrných veličin:

$$\frac{\text{Re}\{\sigma\}}{\sigma_0} = \frac{1 + r^2 + r_c^2}{(1 - r^2 + r_c^2)^2 + 4r^2} , \quad r = \omega\tau, r_c = \omega_c\tau. \quad (6.9)$$

Výsledek v tomto tvaru umožňuje posoudit šance na pozorování rezonanční absorpce energie pro $\omega \approx \omega_c$, viz následující obrázek.



Při zadaných frekvencích ω , ω_c je zřejmě třeba dostatečně malé relaxační tlumení pohybu nosičů, neboli dostatečně dlouhá doba τ . Ta je přímo úměrná prakticky velmi často používané charakteristice elektrického transportu v polovodičích – pohyblivosti μ :

$$\sigma_0 = Ne\mu, \quad \mu = \frac{e\tau}{m^*}. \quad (6.10)$$

Pohyblivost je střední driftová rychlost v elektrickém poli s jednotkovou intenzitou, její jednotkou je $(\text{cm/s})/(\text{V/cm}) = \text{cm}^2/\text{Vs}$. Aby byla cyklotronová rezonance dobře pozorovatelná, musí být $\omega\tau \geq 1$, neboli

$$\mu \geq \frac{e}{\omega m^*}. \quad (6.11)$$

Prakticky vhodné mikrovlnné frekvence ($f = \omega/2\pi \approx 24 \text{ GHz}$) tedy vyžadují vysoké pohyblivosti, které jsou z podmínky (6.11) navíc děleny efektivní hmotností (typicky zřetelně menší než jedna),

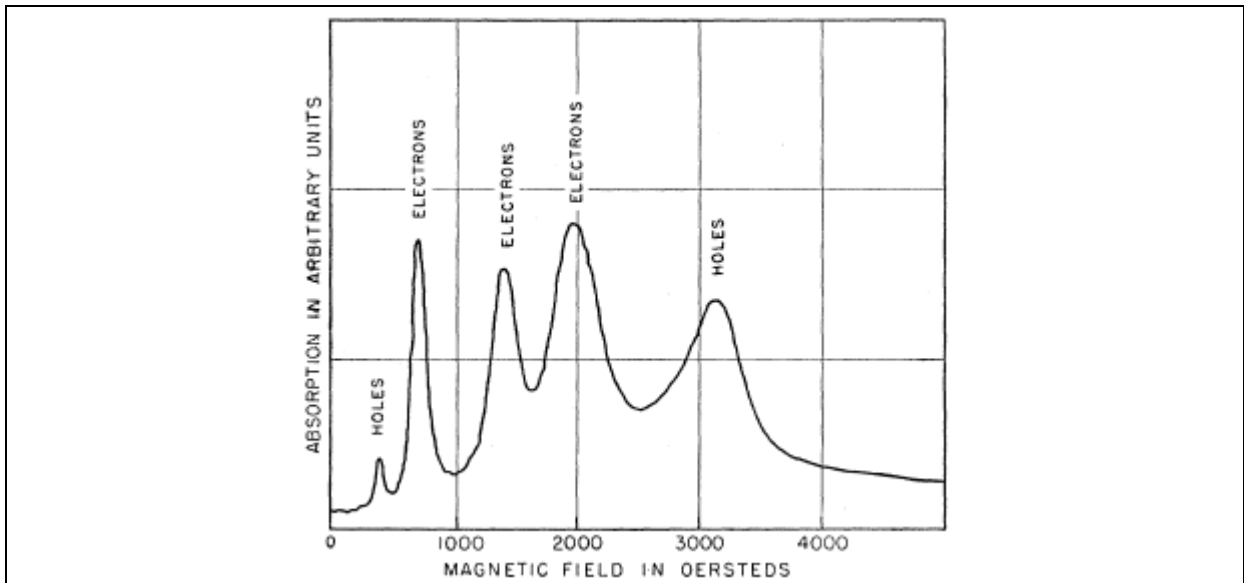
$$\mu \geq 11000 \frac{m_0}{m^*} \text{ cm}^2/\text{Vs}. \quad (6.12)$$

Podmínku pro cyklotronovou rezonanci s dlouhou relaxační dobou můžeme s pomocí vztahu (6.9) zapsat jako

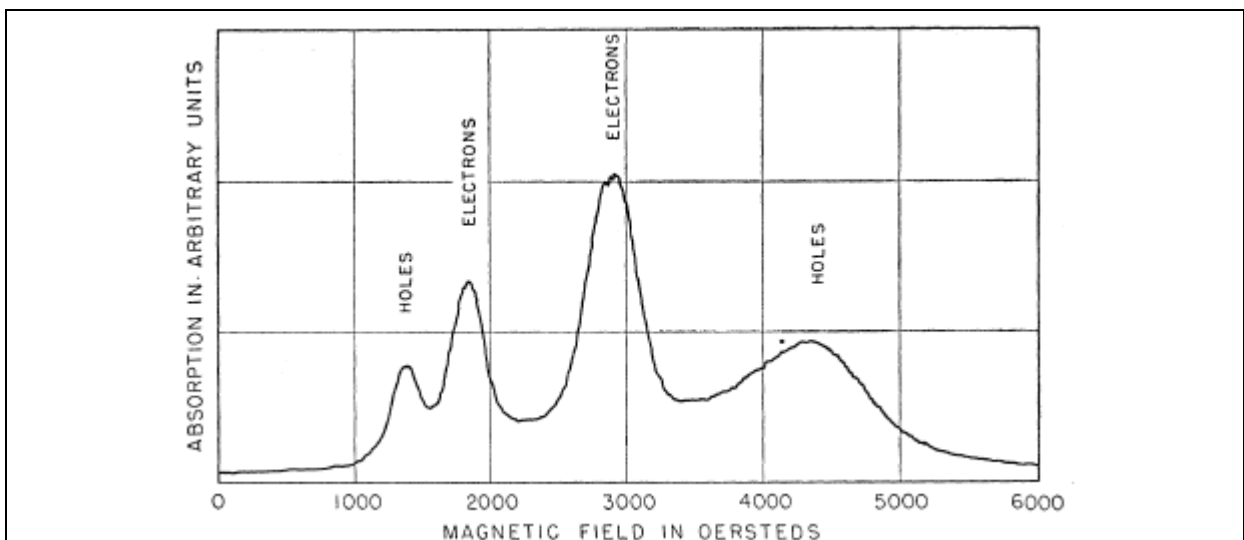
$$r = r_c \gg 1. \quad (6.13)$$

Reálná část vodivosti je pak rovna jedné polovině stejnosměrné hodnoty. To je snadno pochopitelné, protože jsme uvažovali lineární polarizaci proměnného pole, které je superpozicí dvou ortogonálních stavů kruhové polarizace; jeden z nich (se stejným smyslem rotace jako kruhové orbity nosičů náboje) je v použitém přiblížení vždy ve fázi s cyklotronovým pohybem, druhý naopak v protifázi a k disipaci energie nedochází. Kdyby bylo použito kruhově polarizované pole se souhlasnou fází, byla by v rezonanci absorpce energie stejná jako ve stejnosměrném poli.

Při praktickém provedení cyklotronového experimentu je frekvence (mikrovlnného) pole konstantní, mění se cyklotronová frekvence pomocí změny intenzity magnetického pole.

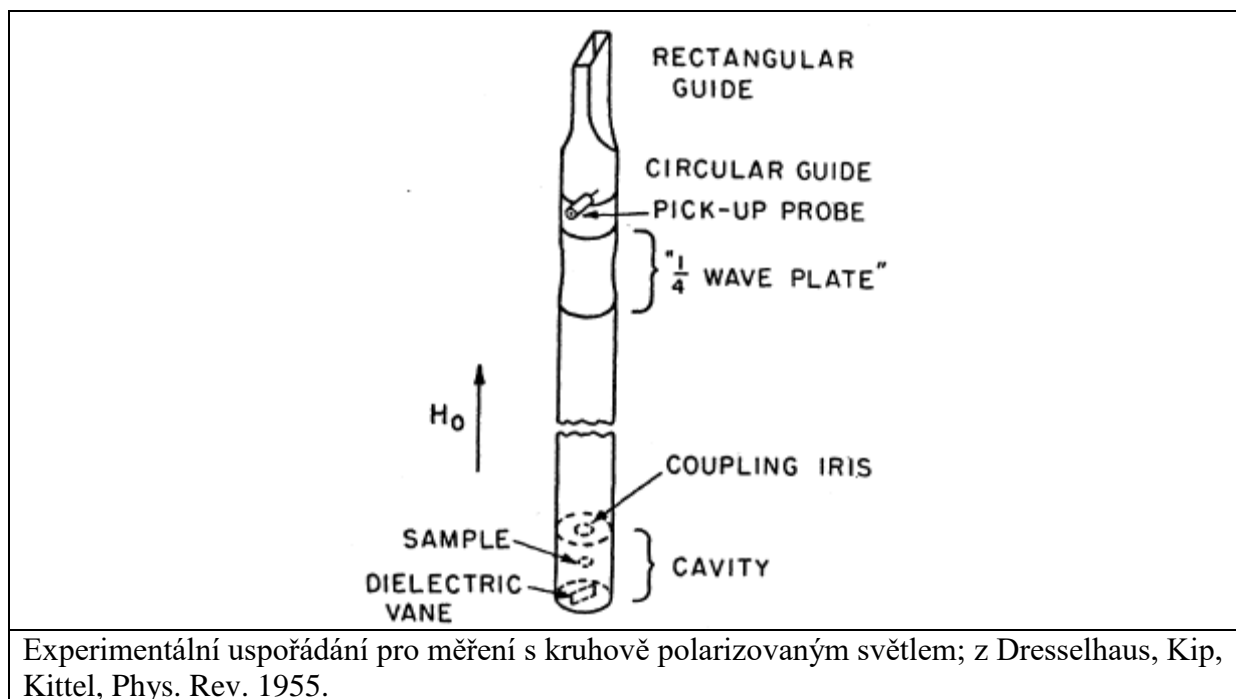


Typický profil absorbované energie v Ge, frekvence 24 GHz, teplota 4 K; z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955.

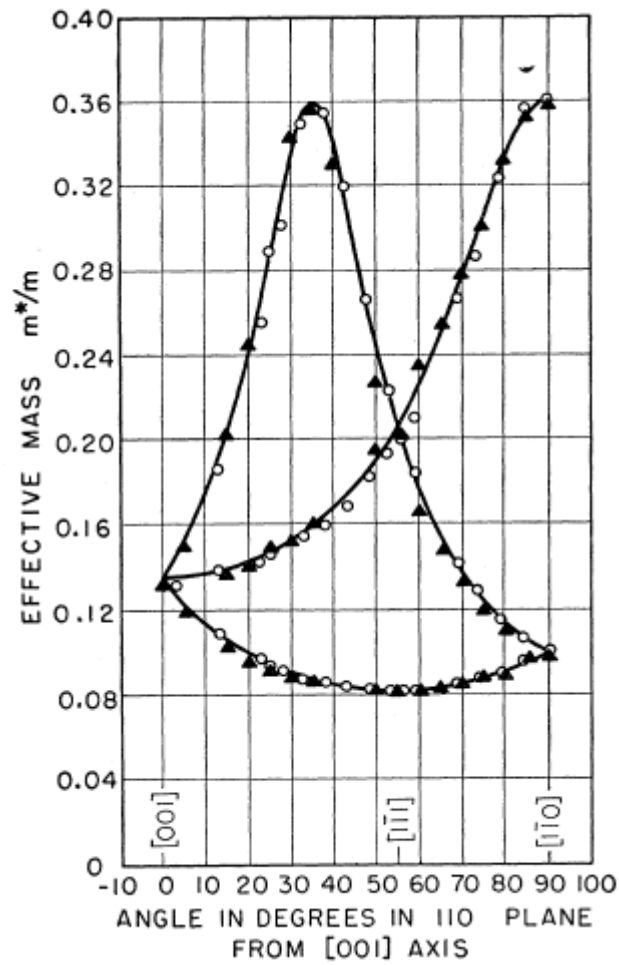


Typický profil absorbované energie v Si, frekvence 24 GHz, teplota 4 K; statické magnetické pole v rovině (110), pod úhlem 30 deg ke směru (100); z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955.

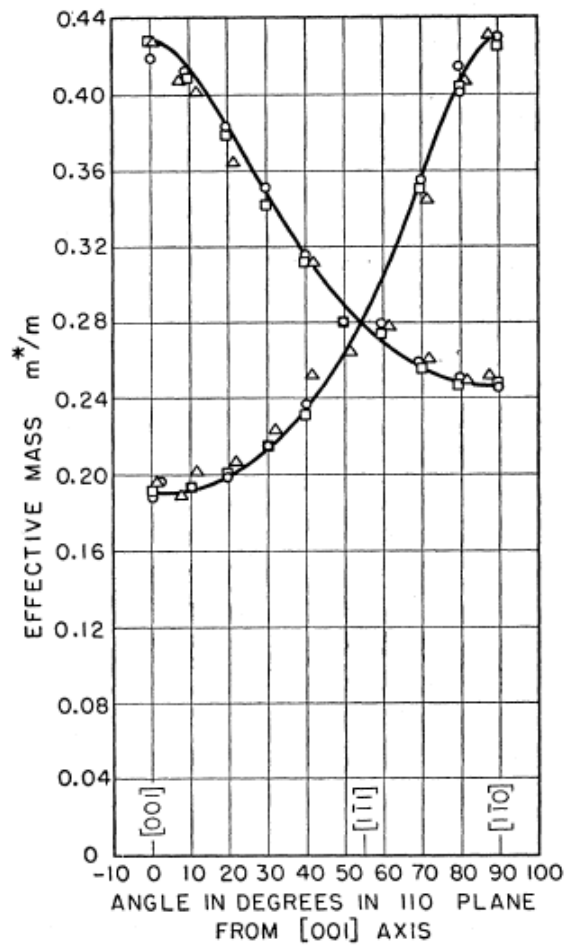
Důležité je nastavení vhodné koncentrace volných nosičů náboje. Osvědčila se optická excitace (světlo žárovky fokusované na vzorek) s modulací intenzity; referenční signál využit k fázově citlivé detekci mikrovlnné absorpce.



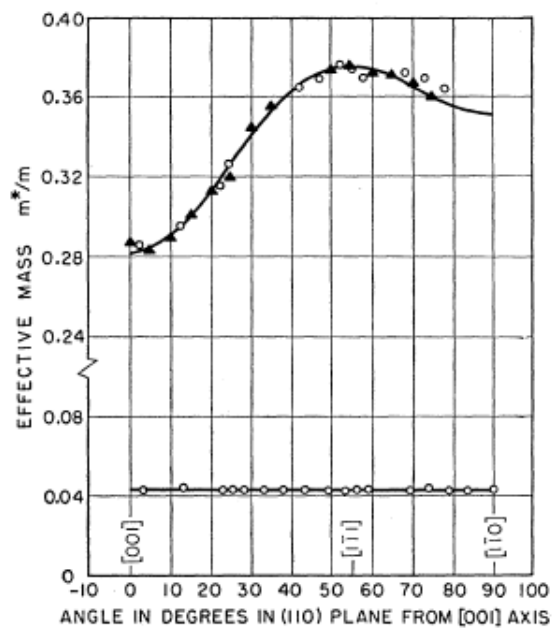
Změna orientace vzorku vůči magnetickému poli umožňuje sledovat závislost efektivní hmotnosti na směru.



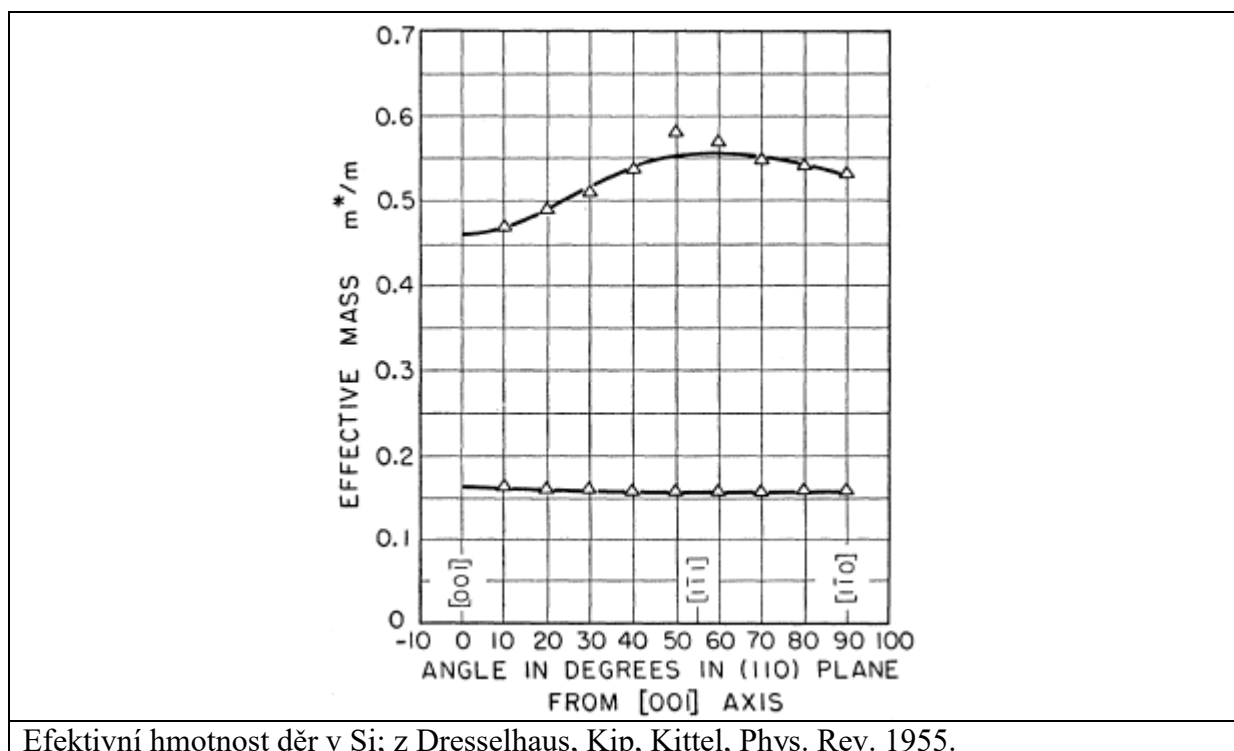
Efektivní hmotnost elektronů v Ge; z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955. Různé symboly označují nezávislá měření.



Efektivní hmotnost elektronů v Si; z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955. Různé symboly označují nezávislá měření.



Efektivní hmotnost děr v Ge; z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955. Různé symboly označují nezávislá měření.



Efektivní hmotnost děr v Si; z Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955.

Sumarizace (dodnes platných) výsledků práce Dresselhaus, Kip, Kittel, Phys. Rev. 1955:

An experimental and theoretical discussion is given of the results of cyclotron resonance experiments on charge carriers in silicon and germanium single crystals near 4°K. A description is given of the light-modulation technique which gives good signal-to-noise ratios. Experiments with circularly polarized microwave radiation are described. A complete study of anisotropy effects is reported. The electron energy surfaces in germanium near the band edge are prolate spheroids oriented along $\langle 111 \rangle$ axes with longitudinal mass parameter $m_l = (1.58 \pm 0.04)m$ and transverse mass parameter $m_t = (0.082 \pm 0.001)m$. The electron energy surfaces in silicon are prolate spheroids oriented along $\langle 100 \rangle$ axes with $m_l = (0.97 \pm 0.02)m$; $m_t = (0.19 \pm 0.01)m$. The energy surfaces for holes in both germanium and silicon have the form

$$E(k) = Ak^2 \pm [B^2k^4 + C^2(k_x^2k_y^2 + k_y^2k_z^2 + k_z^2k_x^2)]^{1/2}.$$

We find, for germanium, $A = -(13.0 \pm 0.2)(\hbar^2/2m)$, $|B| = (8.9 \pm 0.1)(\hbar^2/2m)$, $|C| = (10.3 \pm 0.2)(\hbar^2/2m)$; and for silicon, $A = -(4.1 \pm 0.2)(\hbar^2/2m)$, $|B| = (1.6 \pm 0.2)(\hbar^2/2m)$, $|C| = (3.3 \pm 0.5)(\hbar^2/2m)$. A discussion of possible systematic errors in these constants is given in the paper.