

11. Hallův jev a magnetorezistence

Pohyb volných nosičů náboje ve vnějším elektrickém poli může být výrazně ovlivněn přítomností magnetického pole.

Hallův jev v trojrozměrném plynu volných nosičů

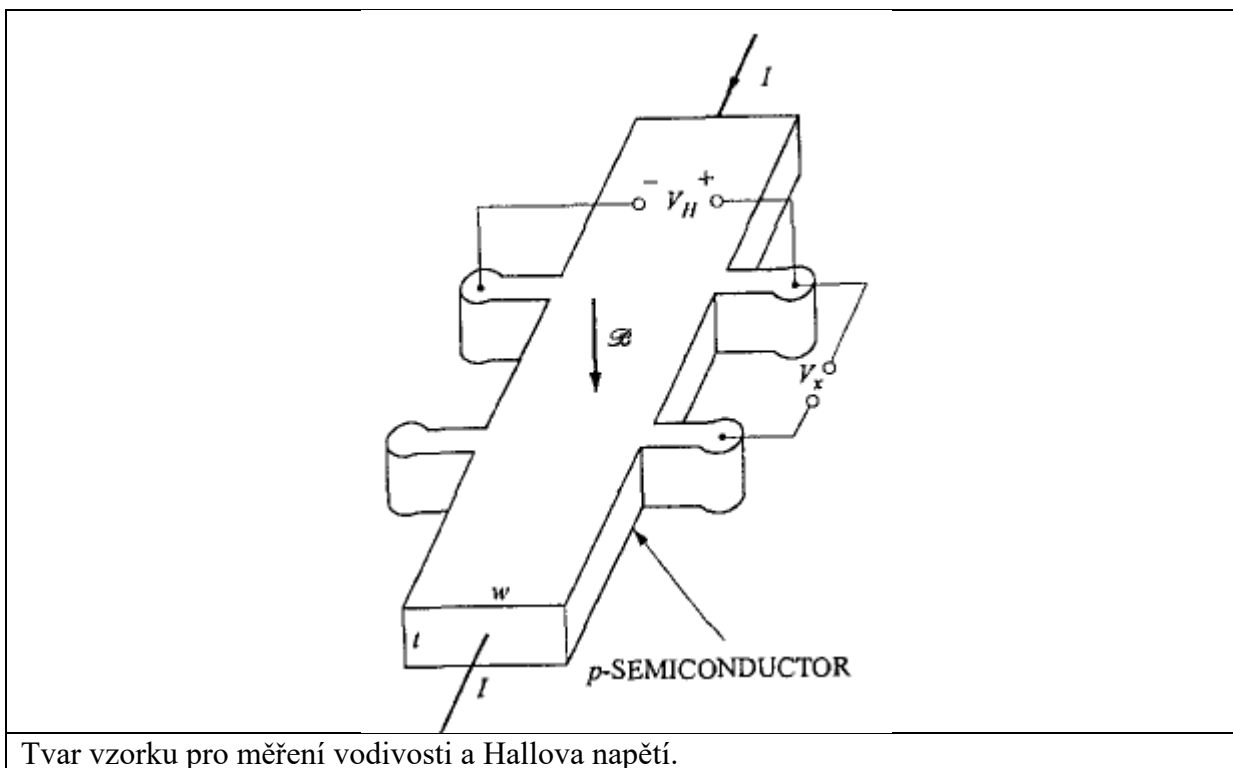
V aproximaci relaxační doby je kvaziklasická pohybová rovnice s intenzitou elektrického pole E a magnetickou indukcí B pro nosič s nábojem e

$$m^* \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{m^*}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = e\vec{E} + e \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}, \quad (11.1)$$

τ je střední doba, za kterou nosič prodělá srážku vynulující jeho driftovou rychlost. Poslední člen v (11.1) je Lorentzova síla. Předpokládejme magnetické pole orientované podél osy z ; pak můžeme hořejší pohybovou rovnici přepsat pro komponenty polohy nosiče x a y jako

$$\frac{m^*}{e} \left(\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} \right) = E_x + v_y B_z, \quad \frac{m^*}{e} \left(\frac{dv_y}{dt} + \frac{v_y}{\tau} \right) = E_y - v_x B_z. \quad (11.2)$$

Ve směru x přikládáme elektrické pole (je to „podélný směr“), ve směru y vzniká elektrické pole díky Lorentzově síle (v „příčném směru“).



Tvar vzorku pro měření vodivosti a Hallova napětí.

Ve stacionárním stavu je zrychlení nosiče nulové; v (11.2) můžeme v_x z první rovnice dosadit do druhé, dostaneme tak rovnici pro v_y :

$$v_y \left(\frac{m^*}{\tau} + \frac{e^2 B_z^2 \tau}{m^*} \right) = eE_y - \frac{e^2 B_z \tau}{m^*} E_x . \quad (11.3)$$

Použijeme symbol pro cyklotronovou frekvenci

$$\omega_c = \frac{eB_z}{m^*} \quad (11.4)$$

a pohybovou rovnici (11.3) přepíšeme do tvaru

$$v_y (1 + \omega_c^2 \tau^2) = \frac{e\tau}{m^*} (E_y - \omega_c \tau E_x) . \quad (11.5)$$

Ve slabém magnetickém poli (typicky splněno při měření Hallova napětí) je kvadrát součinu cyklotronové frekvence a relaxační doby zanedbatelný a (11.5) se zjednoduší:

$$v_y = \frac{e\tau}{m^*} \left(E_y - \frac{eB_z \tau}{m^*} E_x \right) . \quad (11.6)$$

Proudovou hustotu j dostaneme vynásobením rychlosti nosičů jejich nábojem a koncentrací. Předpokládejme koncentraci elektronů (s efektivní hmotností m_e) n_e a koncentraci děr (s efektivní hmotností m_h) n_h . Celková proudová hustota podél y je součtem dvou příspěvků a v ustáleném stavu je nulová:

$$j_y = j_{ye} + j_{yh} = \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e} \left(E_y + \frac{eB_z \tau_e}{m_e} E_x \right) + \frac{n_h e^2 \tau_h}{m_h} \left(E_y - \frac{eB_z \tau_h}{m_h} E_x \right) = 0 . \quad (11.7)$$

Předchozí vztah můžeme zapsat stručně s pomocí symbolu μ pro pohyblivost:

$$E_y (n_e \mu_e + n_h \mu_h) = E_x (n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2) B_z ,$$

$$\mu_e = \frac{e\tau_e}{m_e} , \quad \mu_h = \frac{e\tau_h}{m_h} . \quad (11.8)$$

Intenzitu elektrického pole podél x můžeme napsat pomocí odpovídající proudové hustoty j_x a vodivosti σ ,

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma} = \frac{j_x}{e(n_e \mu_e + n_h \mu_h)} . \quad (11.9)$$

Z (11.8) tak dostaneme úměrnost příčného elektrického pole E_y podélné proudové hustotě j_x a magnetické indukci, vyjádřenou pomocí Hallova koeficientu R_H :

$$E_y = R_H j_x B_z = \frac{n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2}{e(n_e \mu_e + n_h \mu_h)^2} j_x B_z . \quad (11.10)$$

Jednotky (SI) v hořejší relaci:

$$\frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \text{T} = \frac{\text{m}^3}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} .$$

V přítomnosti jediného druhu nosičů s koncentrací n je Hallův koeficient

$$R_H = \pm \frac{1}{en} . \quad (11.11)$$

Při konečné teplotě mají nosiče náboje různé energie a rozptylové mechanismy na jejich energii závisí. Proto je vhodné předchozí postup modifikovat tak, že nejdeme střední (očekávané) hodnoty funkcí relaxační doby, které v hořejším postupu vystupují. Místo vztahu (11.8) vezmeme zřejmě

$$\begin{aligned}
E_y (n_e \langle \mu_e \rangle + n_h \langle \mu_h \rangle) &= E_x (n_h \langle \mu_h^2 \rangle - n_e \langle \mu_e^2 \rangle) B_z , \\
\langle \mu_e \rangle &= \frac{e \langle \tau_e \rangle}{m_e} = \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_e(E) f(E) dE , \quad \langle \mu_h \rangle = \frac{e \langle \tau_h \rangle}{m_h} = \frac{e}{m_h} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_h(E) f(E) dE , \\
\langle \mu_e^2 \rangle &= \frac{e^2 \langle \tau_e^2 \rangle}{m_e^2} = \frac{e^2}{m_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_e^2(E) f(E) dE , \quad \langle \mu_h^2 \rangle = \frac{e^2 \langle \tau_h^2 \rangle}{m_h^2} = \frac{e^2}{m_h^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tau_h^2(E) f(E) dE ,
\end{aligned} \tag{11.12}$$

kde $f(E)$ je hustota pravděpodobnosti obsazení stavu s energií E . Střední hodnoty první a druhé mocniny relaxačních dob pak vstoupí do vztahu (11.10). V přítomnosti jediného druhu nosičů s koncentrací n je Hallův koeficient namísto (11.11) roven

$$R_H = \pm \frac{\langle \tau^2 \rangle}{en \langle \tau \rangle^2} = \pm \frac{r_H}{en} . \tag{11.13}$$

Jako r_H jsme označili tzv. Hallův faktor,

$$r_H = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} . \tag{11.14}$$

Pokud je jeho hodnota blízká k jedné, je zřejmě pohyblivost součinem Hallova koeficientu a vodivosti:

$$\mu = |R_H| \sigma \tag{11.15}$$

a současné měření Hallova napětí a vodivosti dává koncentraci nosičů a jejich relaxační dobu. Většinou však nelze zanedbat závislost relaxační doby na energii a součin ve vztahu (11.15) se od pohyblivosti liší, označuje se jako Hallova pohyblivost:

$$\mu_H = r_H \mu . \quad (11.16)$$

Magnetorezistence

V přítomnosti obou druhů nosičů se stejnou koncentrací je celkový příčný proud nulový, magnetické pole ale vychyluje nenulové příčné proudy elektronů a děr v navzájem opačných směrech podél x . Tak vzniká magnetorezistence, t.j. závislost podélného odporu na magnetickém poli.

V hořejším modelu vyjádříme z první pohybové rovnice (11.2) rychlost nosiče ve směru x v ustáleném stavu (nulové zrychlení) jako

$$v_x = \frac{\tau e}{m^*} \left[E_x + \frac{\tau e}{m^*} (E_y - v_x B_z) B_z \right] = \mu \left[E_x + \mu (E_y - v_x B_z) B_z \right] ,$$

$$v_x = \frac{\mu E_x + \mu^2 E_y B_z}{1 + \mu^2 B_z^2} . \quad (11.17)$$

Proudová hustota v podélném směru je složená z příspěvku elektronů a děr,

$$j_x = j_{xe} + j_{xh} = n_e e v_{xe} + n_h e v_{xh} . \quad (11.18)$$

Pro malou příčnou intenzitu el. pole (malé Hallovo napětí) dostaneme z (11.12) a (11.13) lineární závislost podélného proudu na E_x :

$$j_x \approx e \left(\frac{\mu_e n_e}{1 + \mu_e^2 B_z^2} + \frac{\mu_h n_h}{1 + \mu_h^2 B_z^2} \right) E_x = \sigma_x(B_z) E_x , \quad (11.19)$$

s vodivostí závislou na magnetické indukci. V limitách slabého a silného magnetického pole dostáváme

$$\begin{aligned}\sigma_x(B_z) &\approx \sigma_x(0) - e(n_e \mu_e^3 + n_h \mu_h^3) B_z^2, \text{ pro } \mu_h^2 B_z^2 \ll 1, \\ \sigma_x(B_z) &\approx \left(\frac{n_e}{\mu_e} + \frac{n_h}{\mu_h} \right) \frac{e}{B_z^2}, \text{ pro } \mu_h^2 B_z^2 \gg 1.\end{aligned}\tag{11.20}$$

V druhém případě je specifický odpor úměrný kvadrátu magnetické indukce.

Kvantový Hallův jev v dvojrozměrném plynu volných nosičů

Lokalizace plynu volných elektronů do velmi tenké vrstvy v rovině (x,y) , nejlépe v heterostruktuře, zmenší o jedničku počet stupňů volnosti. V magnetickém poli orientovaném podél z jsou pak energie kvantovány do Landauových hladin,

$$E(l, B_z) = \left(l + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B_z = \left(l + \frac{1}{2} \right) \hbar \frac{e B_z}{m^*} \pm \frac{1}{2} g^* \mu_B B_z, \tag{11.21}$$

tedy do systému diskrétních hladin s odstupem kvanta energie daného cyklotronovou frekvencí. Každá Landauova\ hladina je rozštěpena do spinového dubletu, s energií danou Bohrovým magnetonem μ_B a efektivním g -faktorem. Tato změna elektronové struktury podstatně ovlivní proudy v příčném i podélném směru.

Proudové hustoty ve směru x a y v dvojrozměrném případě jsou pro slabá elektrická pole

$$J_x = \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y, \quad J_y = -\sigma_{xy} E_x + \sigma_{xx} E_y, \tag{11.22}$$

protože

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} \tag{11.23}$$

pro izotropní materiál. S šířkou dvojrozměrného „kanálu“ w je podélná proudová hustota a příčná intenzita elektrického pole

$$J_x = \frac{I_x}{w}, \quad E_y = \frac{V_y}{w}, \quad (11.24)$$

kde I_x a V_y jsou po řadě podélný proud a příčné napětí. Dvojrozměrná proudová hustota je proud tekoucí jednotkovou šířkou.

V ustáleném stavu neteče proud podél y , tedy pro rezistivity ρ dostáváme z (11.22)

$$\rho_{xx} \equiv \frac{E_x}{J_x} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} \equiv \frac{E_y}{J_x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (11.25)$$

Dvojrozměrné vodivosti σ mají jednotky $1/\Omega$, rezistivity ρ mají jednotky Ω . Někdy se udávají jako $1/\Omega$ a Ω na čtverec, protože stejné hodnoty naměříme pro čtvercové vzorky libovolného rozměru. Je-li délka kanálu l a šířka w , je odpor ve směru x dán součinem rezistivity ρ_{xx} a bezrozměrného faktoru l/w .

V aproximaci relaxační doby dostaneme z (11.5) podmínku pro vynulování příčné rychlosti elektronů:

$$v_y \propto E_y - \frac{eB_z \tau}{m^*} E_x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{E_y}{E_x} = \omega_c \tau. \quad (11.26)$$

Podélná proudová hustota je součinem náboje elektronu, plošné koncentrace n_s a rychlosti v_x ; z první rovnice (11.2) dostaneme pro rychlost ve stacionárním stavu (bez zrychlení)

$$v_x = \frac{e\tau}{m^*} E_x = \frac{e\tau}{m^*} \frac{E_y}{\omega_c \tau} = \frac{E_y}{B_z}. \quad (11.27)$$

Odtud

$$J_x = -en_s v_x = -en_s \frac{E_y}{B_z}, \quad (11.28)$$

$$E_y = -\frac{1}{en_s} J_x B_z = R_H J_x B_z, \quad (11.29)$$

$$R_H = -\frac{1}{en_s}. \quad (11.30)$$

Hallův koeficient je dán plošnou hustotou elektronů. Vzhledem k (11.24) je

$$R_H = \frac{V_y}{I_x B_z}. \quad (11.31)$$

V silném magnetickém poli je součin cyklotronové frekvence a relaxační doby mnohem větší než jednička, tedy podle (11.26) příčná intenzita elektrického pole mnohem větší než podélná. Vzhledem k (11.25) je pak modul vnědiagonálního prvku tenzoru vodivosti mnohem větší než prvku diagonálního. Pro rezistivity z (11.25) to znamená přibližné rovnosti

$$\rho_{xx} \approx \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} \approx \frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{V_y}{I_x} = R_H B_z. \quad (11.32)$$

Obě vodivosti a rezistivity se při sledování transportu elektronů v magnetickém poli výrazně mění díky obsazování diskretních Landauových hladin.

Plošná koncentrace elektronů je ve stavu s úplně obsazenými hladinami až po ν -tou včetně a všemi dalšími neobsazenými rovna

$$n_s(\nu) = \nu \frac{eB_z}{h} \quad (11.33)$$

a Hallova rezistivita je kvantovaná,

$$\rho_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} = \frac{25813}{\nu} \Omega, \nu = 1, 2, \dots \quad (11.34)$$

Z tohoto faktu vychází obvyklé označení „QHE“ (Quantum Hall Effect). Zároveň se pozoruhodným způsobem chová i podélná rezistivita; vysvětlení vychází z rozboru „vodivého“ stavu elektronového plynu s částečně zaplněnými Landauovými hladinami a „izolujícího“ stavu v případě Fermiho energie mezi plnou a prázdnou hladinou.

Relativní přesnost měření Hallovy rezistance v QHE je $\sim 10^{-8}$, je to současný standard elektrického odporu. Zároveň přináší možnost velmi přesného určení konstanty jemné struktury,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035963(15)}, \quad (11.35)$$

ve které vystupují vedle poměru h/e^2 pouze definované konstanty. Od roku 2019 je Planckova konstanta definována:

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} .$$

**New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant
Based on Quantized Hall Resistance**

K. v. Klitzing

*Physikalisches Institut der Universität Würzburg, D-8700 Würzburg, Federal Republic of Germany, and
Hochfeld-Magnettabor des Max-Planck-Instituts für Festkörperforschung, F-38042 Grenoble, France*

and

G. Dorda

Forschungslaboratorien der Siemens AG, D-8000 München, Federal Republic of Germany

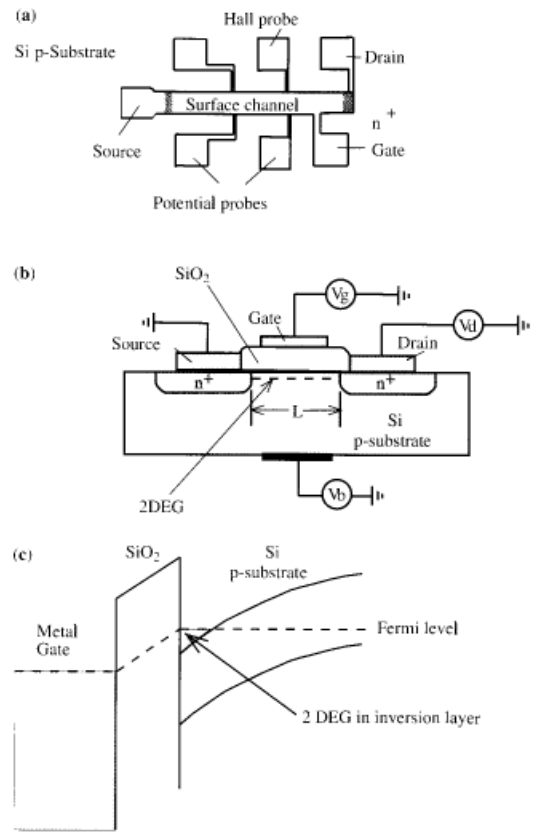
and

M. Pepper

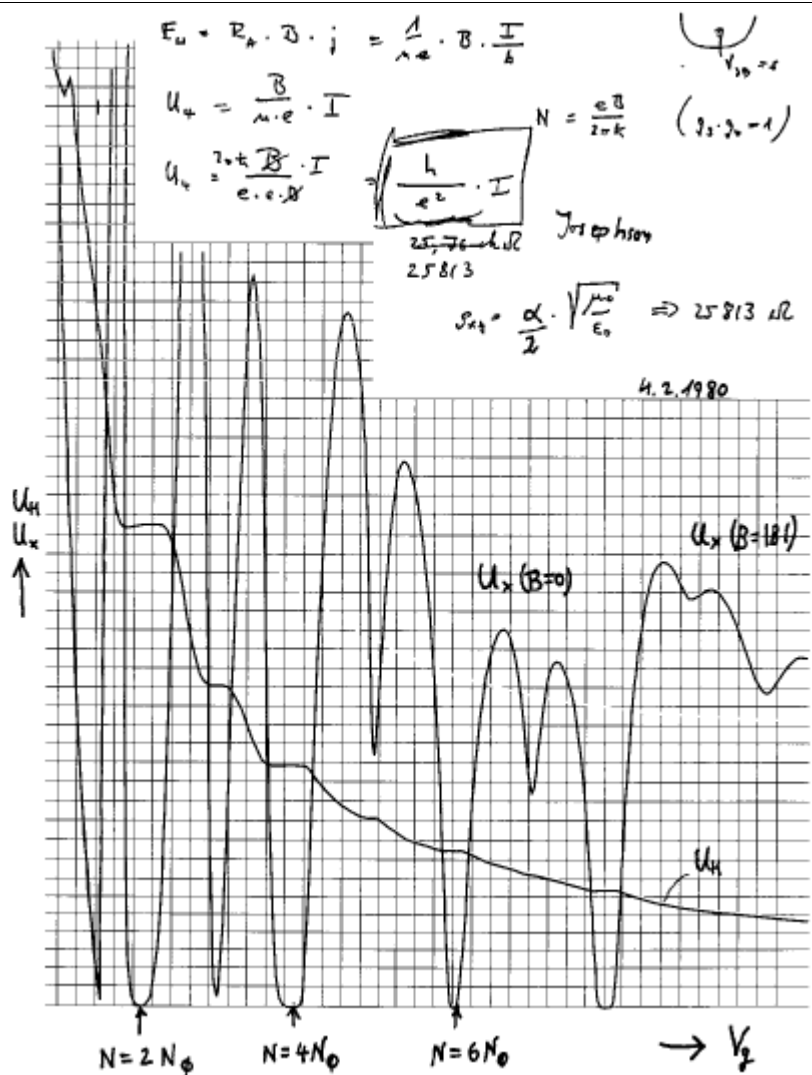
Cavendish Laboratory, Cambridge CB3 0HE, United Kingdom

(Received 30 May 1980)

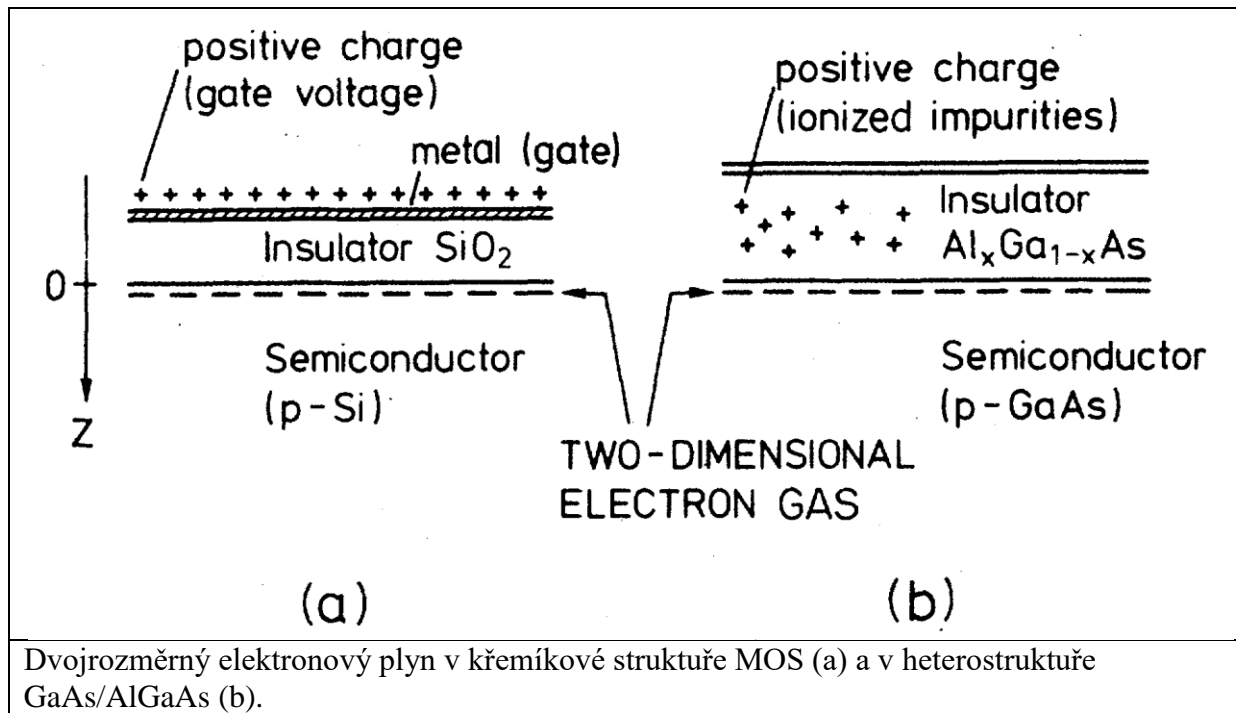
Measurements of the Hall voltage of a two-dimensional electron gas, realized with a silicon metal-oxide-semiconductor field-effect transistor, show that the Hall resistance at particular, experimentally well-defined surface carrier concentrations has fixed values which depend only on the fine-structure constant and speed of light, and is insensitive to the geometry of the device. Preliminary data are reported.

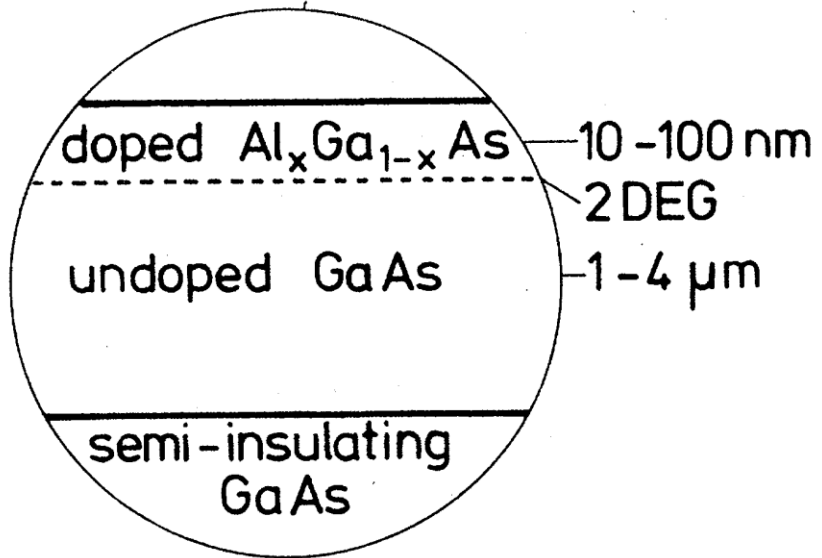
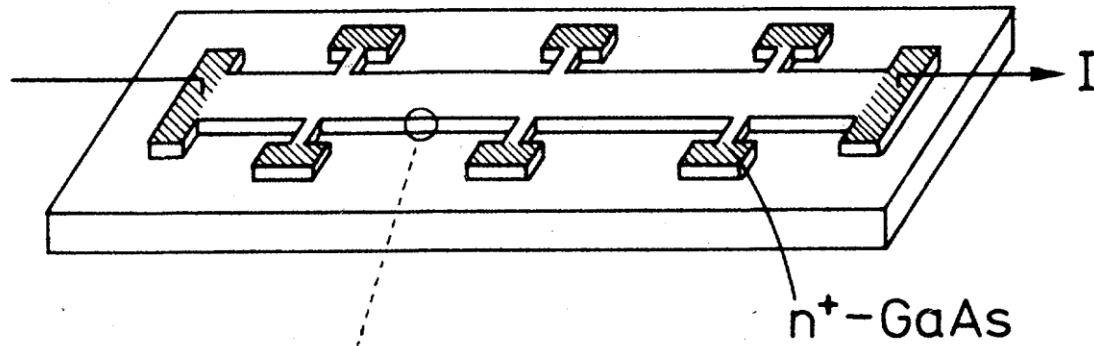


Uspořádání von Klitzinga, Peppera a Dordy v originální experimentu, ve kterém byl v roce 1980 objeven kvantový Hallův jev (Nobelova cena – von Klitzing 1985).

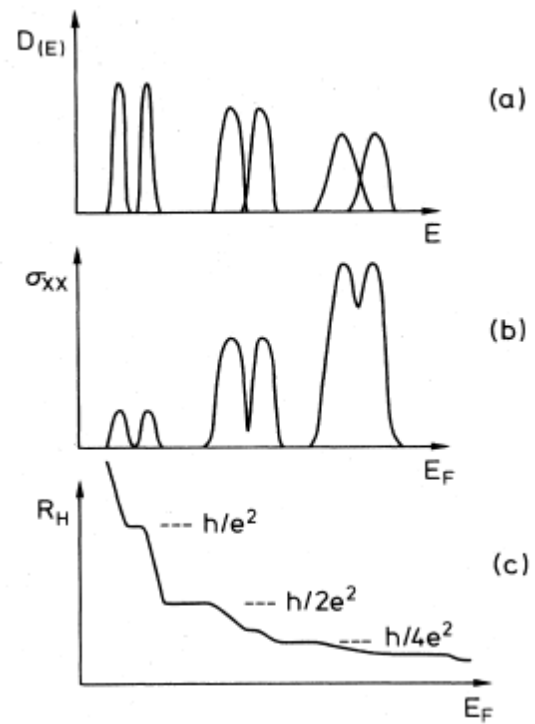


Originální záznam s poznámkami, identifikujícími vznik kvantového Hallova jevu.

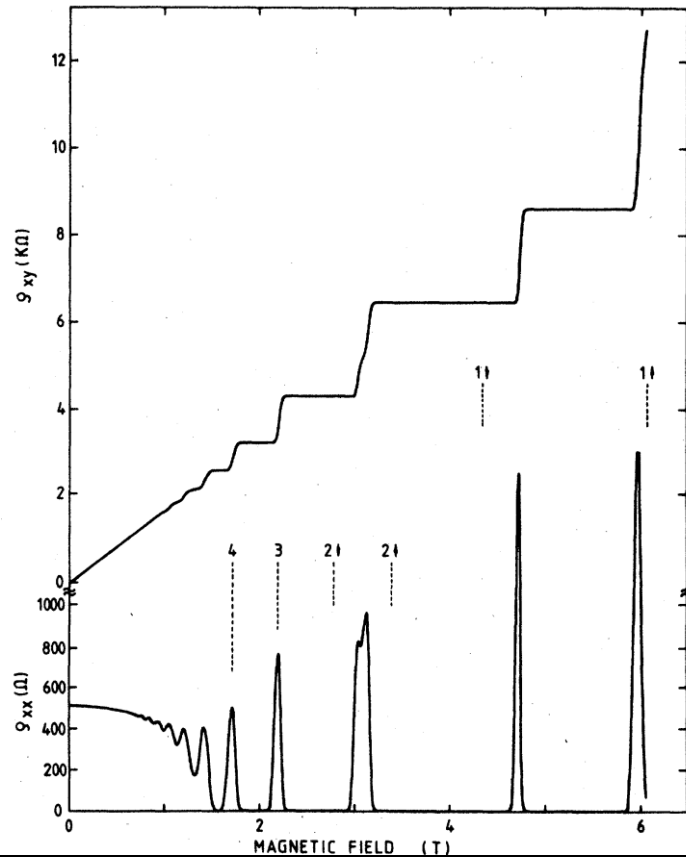




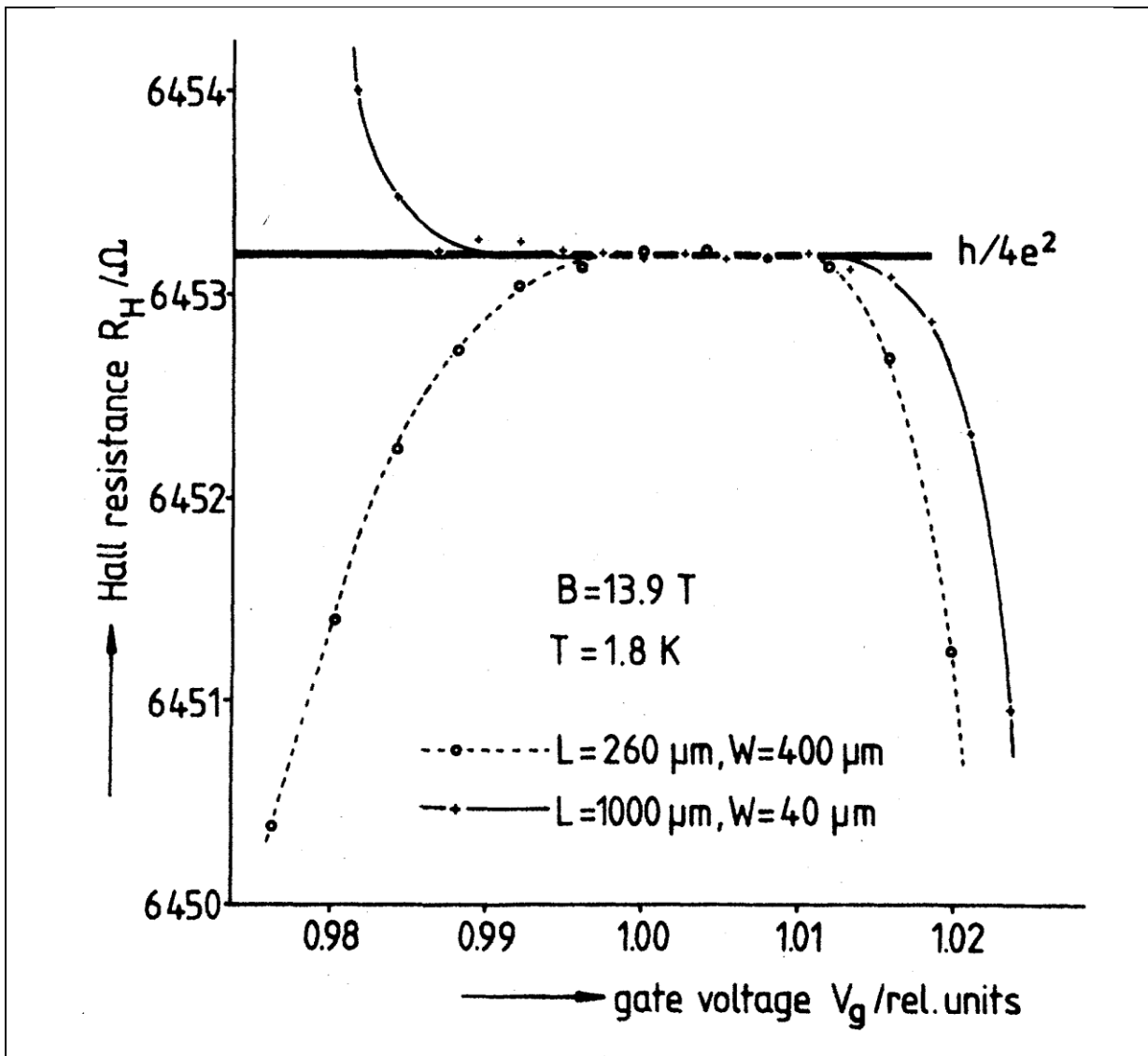
Heterostruktura pro měření QHE (Klitzing, RMP 1986).



Hustota stavů, podélná vodivost a Hallův koeficient (Klitzing, RMP 1986).



Hallova a podélná rezistivita v heterostruktuře GaAs-AlGaAs při teplotě 8 mK (Klitzing, RMP 1986).



Detail Hallovy rezistivity teplotě 1.8 K a magnetické indukci 13.9 T pro dva různé vzorky (Klitzing, RMP 1986).

