

MUNI
SCI

Hry, sázky a střední hodnota

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a statistiky

7. března 2024



<http://etc.ch/zfyf>

Obsah přednášky

Hry a sázky

Hra na začátek/závěr

Střední hodnota

Očekávaný výnos a doba čekání na úspěch

Ruleta a spol.

Sportovní sázky

Lze vůbec systematicky vyhrávat?

Zajímavosti kolem pravděpodobnosti

Citlivá a specifická podmíněná pravděpodobnost

Simpsonův paradox

Vliv matematiky na jiné obory

Matematika se používá jako základní jazyk a prostředek ve všech přírodních vědách i technických oborech a je i velmi významným podpůrným nástrojem humanitních a společenských věd (ekonomie, jazykověda, právo, sociologie). Některé konkrétní aplikace matematiky v technických oborech jsou velmi hezky ilustrovány na stránkách

<http://commons.bcit.ca/math/examples/>.

Na této přednášce se budeme snažit ilustrovat principy matematického myšlení v reálném životě na příkladech, kdy *ne vždy je intuitivní přístup rovněž optimální*.

Hra na začátek/závěr

Jak přemýšlejší jednotliví hráči v různých hrách si můžete vyzkoušet v následující hře:

- každý účastník napíše na papírek číslo od 0 do 20 a papírek odevzdá
- vypočte se aritmetický průměr odpovědí
- nejvyšší číslo, které nepřevyšuje $2/3$ průměru, vyhrává.

Jaký bude váš tip?



Očekávaný výnos

Z matematických pojmů budeme používat zejména pojem *očekávaný výnos* (střední hodnota) náhodné veličiny, který je definován jako součet příslušných výnosů vynásobených pravděpodobnostmi jejich výskytu¹, tj. v případě diskrétní veličiny s konečně mnoha hodnotami

$$E(X) = p_1 \cdot v_1 + \dots + p_n \cdot v_n.$$

Např. střední hodnota padlého čísla při hodu šestibokou kostkou je $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$.

¹Vážený posluchač tuší, že jsme zde značně neformální, korektní matematická definice střední hodnoty náhodné veličiny by vyžadovala jistou přípravu, my se však v rámci konceptu přednášky budeme snažit formálností vyhýbat.

Předpokládané (očekávané) čekání

Ilustrujme pojem střední hodnoty (v tomto případě *předpokládaného čekání*) na příkladu, který každý z nás zná ze hry *Člověče, nezlob se*.

Příklad

Jaká je průměrná doba čekání na to, že při hodech kostkou padne číslo 6?



Řešení

Se znalostí teorie pravděpodobnosti samozřejmě můžeme konstatovat, že jde o klasický příklad diskrétní náhodné veličiny X s tzv. geometrickým rozdělením, určeným pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p,$$

kde p je pravděpodobnost úspěchu, tedy v našem případě $p = \frac{1}{6}$. Tato náhodná veličina má základní momenty $E(X) = \frac{1}{p}$, $D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Řešení (pokr.)

Úloha se tedy dá snadno vyřešit se znalostí teorie pravděpodobnosti, my to ale zvládneme i bez toho. Necht' je pravděpodobnost úspěchu p , jaký je očekávaný počet opakování pokusu, než se úspěch dostaví?

- Úspěch nastane při 1. pokusu – pravděpodobnost p
- Úspěch nastane při 2. pokusu – pravděpodobnost $(1 - p)p$
- Úspěch nastane při 3. pokusu – pravděpodobnost $(1 - p)^2p$
- ...
- Úspěch nastane při n -tém pokusu – pravděpodobnost $(1 - p)^{n-1}p$

Celkem je očekávaný počet pokusů roven

$$1 \cdot p + 2 \cdot (1 - p)p + 3 \cdot (1 - p)^2p + \dots + n \cdot (1 - p)^{n-1}p + \dots$$

Jde o součet nekonečné řady, který lze vypočítat s využitím geometrických řad^a – součet je roven $1/p$.

^ahttp://en.wikipedia.org/wiki/Wheat_and_chessboard_problem

Kolik bude stát sběr kartiček?

Příklad

Marek sbírá kartičky hokejistů NHL. Jeho cílem je mít všech 100 kartiček a zajímá ho (tedy asi spíše rodiče, kteří to platí 😊), kolik krabiček, do kterých jsou kartičky náhodně po jedné umisťovány, v průměru potřebuje, aby získal všech 100 kartiček.



Řešení

První karta je jistě nová, druhá karta bude nová s pravděpodobností $99/100$, takže délka očekávaného čekání na druhou kartu je $100/99$ krabiček. Podobně třetí karta atd. Na získání sté kartičky bude v průměru čekat $100/1$ krabiček.

Celkem je očekávaná doba čekání na všechny kartičky rovna

$$100 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) \approx 518,7.$$

Řada v závorce je tzv. harmonická řada, o níž je znám poměrně překvapivý fakt: sčítáme-li čísla $1/n$ dostatečně dlouho, překročíme libovolně velkou předem zvolenou mez. Součet prvních n členů harmonické řady se dá dobře odhadnout jako $\ln n + \gamma$, kde $\gamma \approx 0,57721$ je tzv. Eulerova konstanta. V našem případě dá tato aproximace výsledek $100(\ln 100 + \gamma) \approx 518,2$.

Co říká o divergenci harmonické řady ChatGPT 4.0 ?

Příklad

Prove the divergence of harmonic series using high school arguments only.

Řešení

To prove the divergence of the harmonic series using high school arguments, we can use the comparison test, which compares the given series to another series whose behavior is known.

Let's consider the series $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$ and compare it to the series $1 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + \dots$ where each term in the second series is the value of the previous term divided by 2.

We can see that each term in the second series is less than or equal to the corresponding term in the first series. Therefore, the partial sums of the second series are also less than or equal to the partial sums of the first series.

Řešení (pokračování)

The sum of the second series is $1 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + \dots = 2$. This is a finite value, as each term in the series approaches 0 as we continue adding more terms.

Since the partial sums of the first series are greater than or equal to the corresponding partial sums of the second series, and the sum of the second series is finite, we can conclude that the sum of the first series is greater than or equal to 2 and therefore must be infinite.

Ruleta

Podívejme se teď na hazardní hry a sázky.

Ruleta je známá hra, kde se sází na čísla 1 až 36 a jejich různé kombinace. Aby měl provozovatel zisk, je dále na hrací ploše číslo 0 (a v americké verzi ještě 00).



S pomocí teorie pravděpodobnosti snadno spočítáme očekávaný výnos při sázce 100 Kč na jedno číslo (v takovém případě vyhráváme 35-tinásobek vkladu):

$$-100 \frac{36}{37} + 35 \cdot 100 \frac{1}{37} = -2,70 \text{Kč},$$

resp. $-5,26$ Kč v americké variantě. Budeme-li sázet na **červenou**, je pravděpodobnost výhry $\frac{18}{37}$, tj. očekávaný výnos činí

$-100 \frac{19}{37} + 1 \cdot 100 \frac{18}{37} = -2,70$ Kč. Stejně je to i při všech ostatních variantách sázek. Všimněte si, že výplaty a sázky v ruletě jsou konstruovány tak, že je úplně jedno na co se sází, očekávaný výnos je vždy stejný, totiž $-\frac{1}{37}$ vkladu (v americké variantě pak $-\frac{2}{38}$ vkladu).

Šťastných 10

Šťastných 10 je sázková hra, kterou provozuje Sazka, a.s., a v níž se tipuje 1 až 10 čísel z 80. V losování je taženo 20 čísel. Hra obsahuje mnoho variant výhry při uhodnutí různého počtu čísel a „dokonce“ cenu útěchy při tipování alespoň 6 čísel a neuhodnutí žádného. Vypočtěme si alespoň průměrný výnos z jedné vsazené stokoruny:

- při sázce na jedno číslo (při uhodnutí dostaneme dvojnásobek vkladu)
- při sázce na pět čísel (3: 2x; 4: 16x; 5: 200x)
- při sázce na deset čísel (0: 1x; 5: 3x; 6: 10x; 7: 20x; 8: 500x; 9: 10000x; 10: 200000x)



Jaká je pravděpodobnost výhry?

Hledanou pravděpodobnost vyjádříme jako podíl počtu úspěšných jevů ku počtu všech možných. Sážíme-li ℓ čísel, jaká je pravděpodobnost, že uhadneme h z nich?

Všech možných vsazených ℓ -tic je $\binom{80}{\ell}$, vyhrávajících² pak $\binom{20}{h} \binom{60}{\ell-h}$. Pro jednotlivé zkoumané možnosti tak dostáváme průměrné výnosy³

- $100 \frac{1}{4} - 100 \frac{3}{4} = -50$ Kč
- $100(200 \cdot 6,4 \cdot 10^{-4} + 16 \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 8,4 \cdot 10^{-2} - 1) \approx -51$ Kč
- $-50,15$ Kč (i s cenou útěchy, jejíž pravděpodobnost je $\binom{60}{10} / \binom{80}{10} \approx 4,6\%$)

Závěr matematika: chcete-li opravdu hrát hazardní hry, bude pro vaši kapsu lepší, půjdete-li (i do amerického) kasina než do Sázky na „Šťastných 10“.

²Těž takto: $\binom{\ell}{h} \cdot \binom{80-\ell}{20-h} / \binom{80}{20}$.

³Podrobněji ve worksheetu na <http://www.math.muni.cz/~bulik/ostatni/stastnych10.xls>.

Jak tedy vyhrát?

Letmý pohled na internet nám přitom nabídne hned několik zaručených tipů, jak sázet v různých hrách a neprohrát. Např. v ruletě sázíme na barvu nebo ve hře Šťastných 10 na jedno číslo (dokud nevyhrajeme) vždy dvojnásobek předchozí sázky (strategie známá jako *Martingale betting strategy*). Viz např. návod již z roku 1882 (František Bačkovský pod pseudonymem Vlastimil Benátský, *Jak sázeti do loterie, bychom zcela jistě vyhráli*⁴).

Návody jsou to v podstatě korektní až na předpoklad, že dotyčný má k dispozici neomezený zdroj peněz na sázky a s tím, že výnos ze sázení je i v takovém případě zanedbatelný vzhledem k množství peněz, které musíme mít k dispozici a je tedy třeba k výdělku odehrát větší množství her.

⁴<http://goo.gl/qLn9S>

Analýza Martingale strategie

Příklad

Řekněme, že máte k dispozici 50 000 Kč na sázky začínající na 1 Kč a uplatňujete uvedenou strategii (sázíme přitom na barvu). Nazvěme jedním **kolem** několik proher zakončených výhrou (příp. sérii proher zakončených bankrotem). Na závěr úspěšného kola vždy vyděláme 1 Kč. Jaká je střední hodnota výhry? Zbankrotujeme, pokud součet sázek

$$1 + 2 + 2^2 \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

překročí náš rozpočet, tj. pokud $n \geq 16$. Pravděpodobnost bankrotu (16 proher v řadě) je (v evropské verzi rulety) $(19/37)^{16} \approx 0,002\%$ (tedy mizivá), pravděpodobnost výhry 1 Kč je zbytek do 100 %. Střední hodnota výhry za jedno kolo je pak

$$(19/37)^{16} \cdot (-50\,000) + (1 - (19/37)^{16}) \cdot 1 \approx -0,17.$$



(Psychologické) kouzlo úspěchu těchto her je samozřejmě v tom, že prohra 100 Kč bolí méně než těší výhra 3500 Kč. Internet je plný zpráv těch, kdo touto strategií nějaké ty koruny vyhráli, těch, kteří podstatně větší peníze prohráli je jednak méně a jednak se tím zřejmě nechlubí (a nebo už nemají připojení k Internetu).

Příklad

Podívejme se na tuto strategii ještě jedním pohledem – jakou máme šanci, že jejím prostřednictvím zdvojnásobíme svůj kapitál dříve než zbankrotujeme^a?

Ke zdvojnásobení kapitálu je při nastavených podmínkách třeba odehrát 50 000 úspěšných kol^b. Už jsme spočítali, že pravděpodobnost bankrotu během jednoho kola je mizivých $p_b = (19/37)^{16} \approx 0,002 \%$, tedy pravděpodobnost, že v každém z 50 000 kol vyhrájeme 1 Kč, je $(1 - p_b)^{50\,000}$, což je pouhých cca 31 %.

Máme tedy výrazně vyšší šanci, že o svůj vklad přijdeme, než že ho zdvojnásobíme (a to i při předpokladu „férovosti“ kasína).

^aTěž viz simulaci na <https://bettingsimulation.com/>.

^bJakkoliv se možná tento počet nezdá reálný, v internetových kasínech je běžně dosažitelný.

Sportovní sázky

Na loňský zápas play-off hokejové extraligy (nikoliv náhodou pojmenované po jedné sázkové kanceláři) mezi Kometou a Vítkovicemi jsou u jedné internetové sázkové společnosti následující kurzy: **2,26 na vítězství Komety; 4,11 na remízu a 2,77 na vítězství Vítkovic.**

Předpokládáme-li, že kurzy vypsané sázkovou společností odrážejí pravděpodobnost výskytu daného jevu, pak podle vztahu pro očekávaný výnos dostáváme při sázce 100 Kč na každou z variant

$$226 \cdot \frac{1}{2,26} + 411 \cdot \frac{1}{4,11} + 277 \cdot \frac{1}{2,77} - 300 = 0.$$

Je to tedy skutečně tak, že sázková kancelář s námi čestně hraje hru, v níž vydělává jen díky tomu, že její bookmakeři jsou lepší v tipování výsledku nebo jsme někde udělali chybu v úvaze?

b) je správně: Chybu jsme udělali v tom, že jsme předpokládali, že kurzy vypsané sázkovou společností odpovídají pravděpodobnostem výskytu daných jevů – protože součet $P = \frac{1}{2,26} + \frac{1}{4,11} + \frac{1}{2,77} \approx 1,047$ není roven jedné (žádný jiný jev přitom nastat nemůže a jevy jsou tzv. *vylučující se jevy*), „reálné“ kurzy pro spravedlivou hru tedy dostaneme, když uvedené kurzy vynásobíme číslem P .

Převrácená hodnota P pak zároveň udává, kolik vyhraje z každé koruny, rozdíl $1/P - 1 = -0,045$ je tedy hledaná očekávaná hodnota výnosu ze sázení.

Tedy: čím větší je součet převrácených hodnot vylučujících se kurzů, které zároveň popisují všechny možné jevy, tím větší je nevýhoda na straně sázejícího.

Do těchto her by se ale i (sportovně založený) matematik mohl zapojit, pokud je přesvědčen, že jednotlivé pravděpodobnosti jsou stanoveny chybně (tedy, je že chytřejší nebo informovanější než příslušný bookmaker).

Jak vydělat díky matematice – případ Cash WinFall

Jak už jsme si řekli dříve, vydělat je možné v případě, že je hra nějakým způsobem chybně nastavená – k tomu došlo např. v případě loterie Cash WinFall ve státě Massachusetts, spuštěné na podzim roku 2004 jako náhrada za loterii Mass Millions, která se stala neatraktivní vzhledem k tomu, že za celý rok nikdo nezískal jackpot.

Ve hře Cash WinFall bylo taženo 6 čísel z rozmezí 1 až 46 a jackpot se nezvyšoval s každým týdnem, kdy jej nikdo nezískal, ale po překročení hranice 2 milionů dolarů část peněz posílila menší ceny. Tím mělo být dosaženo větší atraktivity, což se loterijní komisi podařilo víc než asi zamýšlela.

Herní plán vypadá na začátku takto:

- při uhádnutí 6 čísel (cca 1:9,3 mil.) se vyhrává jackpot
- při uhádnutí 5 čísel (1:39 000) je výhra 4 tis. dolarů
- při uhádnutí 4 čísel (1:800) je výhra 150 dolarů
- při uhádnutí 3 čísel (1:47) je výhra 5 dolarů
- při uhádnutí 2 čísel (1:6,8) je výhrou los zdarma (v ceně 2 dolarů)

Snadno spočítáme, že při jackpotu v hodnotě 1 mil. dolarů je očekávaná hodnota výhry na jeden (dvoudolarový) los 79,8 centu (tedy menší podíl než v případě „Šťastných 10“).

Situace se ale zásadně změnila v případě, kdy jackpot „přeteče“ do nižších cen. Tak třeba 7. února 2005 se v jackpotu shromáždily 3 mil. dolarů, které nikdo nevyhrál (nikoliv překvapivě, když hru hrálo pouze cca 470 000 hráčů). Podle schématu hry bylo 600 tis. dolarů určeno pro hráče, kteří uhádli 5 čísel, 1,4 mil. pro ty, kteří uhádli 4 čísla a dalších 600 tis. pro ty, již uhádli 3 čísla.

Střední hodnota výhry se tak najednou činí cca 5,53 dolarů na jeden los.

Toho si všiml James Harvey, student MIT, který s několika přáteli nejprve koupil tisíc losů a svou investici více než ztrojnásobil. Později v létě roku 2005 už kupovali desítky tisíc sázenek (které všechny údajně ručně vyplňovali). A ví se nejméně o dvou dalších sázkových klubech, kteří využívali téhož principu.

Přitom ale ani stát nic netratil – zisk takto organizovaných hráčů plyne z „banku“, do kterého přispěli dřívější nešťastníci. Loterie takto pokračovala až do roku 2012, kdy byla po vyšetřování ukončena.

Jak lze obrat protihráče v jednoduché hře

Uvažování hráče nad dominancí jejich strategií můžeme ilustrovat na dalším příkladu:

Příklad

Při hodů mincí (**P**anna, **O**rel) opakovaném 3krát, máme 8 možných jevů, každý se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{8}$:

PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP, OOO.

Hru hrají 2 hráči – každý si vybere jednu trojici, pak házeme mincí tak dlouho, až se jedna z těchto trojic objeví. Dotyčný hráč vyhrává.

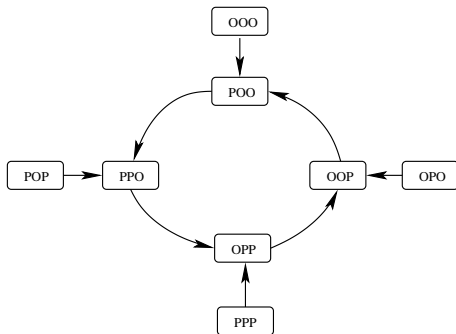
Kdo si zahraje?



Vysvětlení příkladu

Lze ukázat, že existuje pro druhého hráče strategie výběru tak, že má vždy pravděpodobnost výhry alespoň $2/3$.

- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající xx , já vyberu yxx
- Pokud 1. hráč vybral trojici, začínající xy , já vyberu xxy



Dokončení příkladu

Ukážeme, že při výběru *POP* a *PPO* je pravděpodobnost prvního výskytu trojice *PPO* rovna $2/3$.

Snadno je vidět, že dokud padá orel, šance obou se nemění. Jakmile padne panna, máme v dalším tahu pravděpodobnost $\frac{1}{2}$, že padne znovu panna a stejnou pravděpodobnost, že padne orel. Pak

- v případě panny s jistotou vyhrává *PPO* – hážeme tak dlouho než padne orel – celkem pravděpodobnost $\frac{1}{2}$,
- v případě orla vyhrává *POP* pouze tehdy, pokud následně padne panna, v opačném případě jsme znovu na začátku – tj. celkem pro *POP* $\frac{1}{4}$.

Celkem tedy ve *dvojnásobném počtu případů* vyhrává *PPO*, tj. pravděpodobnost jeho vítězství je $\frac{2}{3}$.

Dokončení příkladu, 2. část

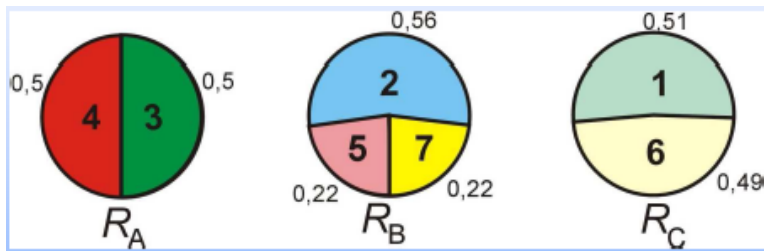
Podobně snadno zdůvodníme, že pokud 1. hráč vybere např. *PPO*, my budeme mít s volbou *OPP* větší pravděpodobnost úspěchu.

- dokud se v seznamu hodů neobjeví dvojice *PP*, jistě nemohl nikdo zvítězit
- uvažme první výskyt dvojice *PP*:
 1. je-li hned na začátku posloupnosti hodů ($p = \frac{1}{4}$), vyhrává jistě 1. hráč
 2. objeví-li se dvojice *PP* až později, nutně před jejím prvním výskytem musel padnout *Orel* a vítězíme.

Celkem tedy vyhrává *OPP* s pravděpodobností $\frac{3}{4}$.

Tři ruletky

Máte k dispozici některou z ruletek s uvedenými čísly a jejich pravděpodobnostmi. Hrají dva hráči, přičemž ten, kdo vylosuje větší číslo, vyhrává. Kterou ruletku si vyberete?



Lze snadno odvodit, že ruletka A je lepší než kterákoliv ze zbývajících, ruletka C je naopak nejhorší. V situaci, kdy budou hrát tři hráči se však pořadí ruletek obrátí! Situace nikoliv náhodou připomíná problematiku volebních systémů ...

Testy na Covid-19 a jejich „spolehlivost“

Během pandemie Covid-19 se často v médiích i veřejnosti diskutovala „spolehlivost“ různých testů. Tento termín není příliš korektní, testy se charakterizují prostřednictvím tzv. *senzitivity (citlivosti)* a *specifičnosti*. Z matematického pohledu jde o velmi jednoduché pojmy, nejdřív si ale ukažme, jak i celkem jednoduchou věc dokáže úřednický jazyk zamotat: [<https://covid.gov.cz>] „Senzitivita se měří poměrem pozitivně otestovaných antigenním testem proti všem nakaženým (včetně lidí kteří vyšli z antigenního testu negativně, i když referenční RT-PCR test vyšel pozitivně). To znamená že **negativní výsledek** z antigenního testování **nemusí znamenat, že nejste nakažen s takovou spolehlivostí, jako PCR test.** Specifita se měří poměrem negativně otestovaných antigenním testem proti všem nenakaženým (včetně lidí, kteří vyšli z antigenního testu pozitivně, i když referenční RT-PCR test vyšel negativně). Antigenní testy obecně mají vysokou míru specifity. To znamená že člověk, kterému **vyšel pozitivně antigenní test je s vysokou mírou pravděpodobnosti nakažen.**“

Senzitivita (citlivost) a specifčnost testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	False positive
Test negativní	False negative	True negative
	Senzitivita	Specifčnost

Např. u diskutovaného čínského antigenního rychlotestu ze slin (Lepu Medical) uvádí studie ⁵ (nikoliv ovšem prodejci) u asymptomatických jedinců citlivost cca 45 % a specifčnost 90–98 % (hodnoty pochopitelně nemohou být zcela přesné, protože jsou porovnávány pouze s výsledkem RT-PCR testů, skutečnost není známa).

Ag test	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	45 %	5%
Test negativní	55%	95%

⁵<https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2021.02.11.21251553v1>

(Zastaralý) triple test a jeho výsledky

Triple test je vyšetření krevního séra na hodnoty choriogonadotropinu, estriolu a alfa-fetoproteinu. Provádělo se v druhém trimestru těhotenství a má sloužit k detekci rizik genetických poruch a poruch vývoje nervové trubice.

Detekuje poruchy s úspěšností **70 %** a naopak **5 %** zdravých případů rozpozná jako porušené. Budoucím matkám, u kterých triple test ukáže zvýšené riziko vad plodu, je obvykle doporučeno nějaké další zpřesňující vyšetření, například amniocentéza (odběr plodové vody). Uvádí se, že u těhotné ženy ve věku 20–24 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:1500**, u těhotné ženy ve věku 35–39 let je pravděpodobnost narození dítěte s Downovým syndromem cca **1:200**. Prozkoumejme (alespoň z matematického hlediska) význam provádění tohoto testu za uvedených předpokladů, kdy se rodí cca 100 tis. dětí ročně, z toho cca 10 % ženám ve věku 35–39 let a cca 12 % ženám ve věku 20–24 let⁶

⁶S výpočty pomůže worksheet na <http://www.math.muni.cz/~bulik/ostatni/testy.xlsx>.

Senzitivita (citlivost) a specifčnost testu

	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	True positive	False positive
Test negativní	False negative	True negative
	Senzitivita	Specifčnost

Triple test	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost
Test pozitivní	70 %	5 %
Test negativní	30 %	95 %
	Senzitivita	Specifčnost

Za dříve uvedených předpokladů snadno vypočteme, že pravděpodobnost (tzv. PPV – positive predictive value), že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, je pouhých cca 6,6%. U mladých žen se pak tato pravděpodobnost pohybuje kolem 0,9% a je tedy na zvážení, zda toto plošné testování v dané věkové skupině provádět, pokud navíc uváděné riziko potratu při případné amniocentéze se pohybuje kolem jednoho promile.

Výpočet

Uvažujme (hypotetický) vzorek deseti tisíc žen ve věku 35–39 let:

Starší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	35	497,5	532,5
Test negativní	15	9452,5	9467,5
	50	9950	

Proto lze pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, spočítat jako $\frac{35}{532,5} \approx 6,6\%$. A pro 12 tis. žen ve věku 20–24 let dostaneme:

Mladší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	5,6	599,6	605,2
Test negativní	2,4	11392,4	11394,8
	8	11992	

Pravděpodobnost, že dítě „mladší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, lze nyní spočítat jako $\frac{5,6}{605,2} \approx 0,9\%$.

Moderní testy

V dnešní době je používán *kombinovaný screening* (integrated screening test ⁷) s hodnotou citlivosti na výrazně vyšší úrovni cca 93 %. Ani to ale, jak ukazují následující tabulka, není důvod k uspokojení.

Uvažujme opět vzorek deseti tisíc žen ve věku 35–39 let:

Starší ženy	Pozitivní skutečnost	Negativní skutečnost	
Test pozitivní	46,5	497,5	544
Test negativní	3,5	9452,5	9456
	50	9950	

Proto lze pravděpodobnost, že dítě „starší“ matky bude skutečně postiženo Downovým syndromem, pokud vyšel pozitivní test, spočítat jako $\frac{35}{532,5} \approx 8,5\%$. V posledních letech jsou inzerovány ⁸ nově vyvinuté testy s deklarovanou citlivostí 99,5 % a specifíčností 99,9 %. U těchto testů činí hodnota PPV již zajímavých 83 %.

⁷Viz např. <https://www.nature.com/articles/srep18866> nebo <https://geneticcounseling.info/2013/08/27/prenatal-screening-overview/>

⁸<http://www.downsyndromeprenataltesting.com/how-accurate-is-the-new-blood-test-for-down-syndrome/>

Simpsonův „paradox“

Uveďme některé situace, kdy se lidská intuice dostává do problémů: Statistický (zdánlivý) paradox, který se poměrně často objevuje i na reálných datech. Nejlépe je asi pochopitelný na (skutečných) příkladech: Klinická studie se zabývala porovnáním úspěšnosti dvou způsobů léčby ledvinových kamenů. Studie zkoumala zvlášť úspěšnost na malých kamenech a velkých kamenech.

	Metoda A	Metoda B
Malé kameny	93% (81/87)	87% (234/270)
Velké kameny	73% (192/263)	69% (55/80)
Celkem	78% (273/350)	83% (289/350)

Ačkoliv je metoda A lepší jak pro malé, tak velké kameny, celkově se ukazuje jako horší. Je to proto, že v testu byla metoda A výrazně častěji použita pro výrazně hůře dopadající *velké kameny*.

Žaloba na University of California, Berkeley

Jeden z nejznámějších příkladů Simpsonova paradoxu pochází z roku 1973, kdy byla UCB zalažována kvůli údajnému evidentnímu znevýhodňování žen v přijímacím řízení, což měla dokládat tabulka:

	Uchazeči	Úspěšnost
Muži	8442	44%
Ženy	4321	35%

Přitom se ukázalo, že jednotlivé katedry spíše mírně zvýhodňovaly ženy:

Katedra	Muži		Ženy	
	Uchazeči	Přijatí	Uchazečky	Přijaté
A	825	62%	108	82%
B	560	63%	25	68%
C	325	37%	593	34%
D	417	33%	375	35%
E	191	28%	393	24%
F	272	6%	341	7%

Sportovní příklad

Nad tímto jevem se občas z neznalosti podivují i sportovní komentátoři. Objevil se například v této statistice úspěšnosti baseballových odpalů:

	1995		1996		1997	
Derek Jeter	12/48	.250	183/582	.314	190/654	.291
David Justice	104/411	.253	45/140	.321	163/495	.329

Celkem ale Derek Jeter dosáhl skóre 385/1284, tj. 30% úspěšnosti, kdežto David Justice 312/1046, tj. 29,8%.⁹

⁹Nebylo mu to ale nic platné, každý rok byl Justice prohlášen za lepšího.

Podobný efekt mívá např. srovnávání úspěšnosti středních škol při přijímacích zkouškách na vysoké školy (Absolventi třídy A dopadli při přijímačkách na každý obor lépe než absolventi třídy B, protože se ale výrazně víc hlásili na obory s menší úspěšností, celkové procento úspěšnosti třídy A bylo nižší).

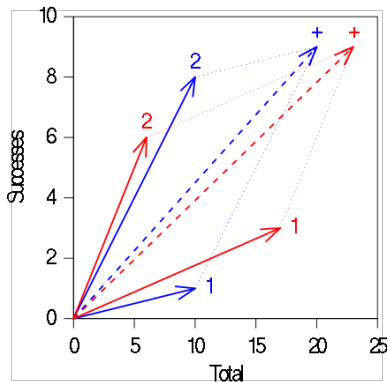
Vždy je proto třeba pečlivě uvážit, jestli učiněné závěry opravdu odpovídají naměřeným datům nebo jde o jednu z mnoha méně či více „přiohnutých“ statistik a jejich interpretací.

Asi zbytečný náznak zdůvodnění

$$\frac{3}{17} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{6}{6} > \frac{8}{10}$$

$$\frac{9}{23} < \frac{9}{20}$$



Použitá literatura

- J. G. Truxal, **Probability examples**, State University of New York, 1989.
- J. Ellenberg, **Nebojte se matematiky** (How Not to Be Wrong), BizBooks, Brno, 2018.
- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.

Děkuji za pozornost!



**MASARYKOVA
UNIVERZITA**