16. SPEKTRUM LINEÁRNíHO OPERÁTORU

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

16. dubna 2024

Obsah

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech. Zavedeme důležitý, ještě v předchozí kapitole avizovaný pojem ***spektra lineárního operátoru***, jakožto i pojmy ***algebraické a geometrické násobnosti vlastní hodnoty***, které nám umožní klasifikovat případné překážky jeho diagonalizovatelnosti.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech. Zavedeme důležitý, ještě v předchozí kapitole avizovaný pojem ***spektra lineárního operátoru***, jakožto i pojmy ***algebraické a geometrické násobnosti vlastní hodnoty***, které nám umožní klasifikovat případné překážky jeho diagonalizovatelnosti.

Dále si ujasníme, jaký vliv má řešitelnost polynomických rovnic v základním tělese na spektrum lineárního operátora. Vhodným rozšířením tohoto pole lze dosáhnout, aby každý lineární operátor na n-rozměrném prostoru měl n vlastních hodnot, pokud každou z nich počítáme tolikrát, jaká je její algebraická násobnost.

Budeme pracovat s vektorovým prostorem nad tělesem K.

Obsah

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ ***dělí*** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)\,p(x)$. Zřejmě, pokud f dělí g, tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g.

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ ***dělí*** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)\,p(x)$. Zřejmě, pokud f dělí g, tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g.

Skalár $\lambda \in K$ je ***kořenem polynomu*** $f(x)$ (t. j. $f(\lambda) = 0$) právě tehdy, když polynom $x - \lambda$ dělí polynom $f(x)$.

Skalár $\lambda \in K$ je m***-násobný kořen polynomu*** $f(x) \in K[x]$, pokud $(x - \lambda)^m$ je ***nejvyšší*** mocnina polynomu $x - \lambda$, která ještě dělí $f(x)$. Namísto o 1-násobném kořenu mluvíme o ***jednoduchém kořenu***.

Spektrum lineárního operátoru a matice I

Připomeňme, že polynom $f(x) \in K[x]$ ***dělí*** polynom $g(x) \in K[x]$, pokud existuje polynom $p(x) \in K[x]$ takový, že $g(x) = f(x)\,p(x)$. Zřejmě, pokud f dělí g, tak stupeň f je menší nebo rovný stupni g.

Skalár $\lambda \in K$ je ***kořenem polynomu*** $f(x)$ (t. j. $f(\lambda) = 0$) právě tehdy, když polynom $x - \lambda$ dělí polynom $f(x)$.

Skalár $\lambda \in K$ je m***-násobný kořen polynomu*** $f(x) \in K[x]$, pokud $(x - \lambda)^m$ je ***nejvyšší*** mocnina polynomu $x - \lambda$, která ještě dělí $f(x)$. Namísto o 1-násobném kořenu mluvíme o ***jednoduchém kořenu***.

Polynom f stupně n má nanejvýš n kořenů, pokud každý z nich počítáme s jeho násobností.

Pokud $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu f stupně n a $m_1, \ldots, m_k$ jsou jejich násobnosti, tak $m_1 + \ldots + m_k \leq n$.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá m***-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, pokud λ je m-násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice $\mathbf{A}$ je m.

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá ***m-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n\times n}$, pokud λ je m-násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice $\mathbf{A}$ je m.

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Podobne definujeme i pojem m-násobné vlastní hodnoty a algebraické násobnosti vlastní hodnoty pro lineární operátory na konečně rozměrných prostorech.

Matice řádu n má nanejvýš n vlastních hodnot, pokud každý z nich počítáme s její násobností.

Spektrum lineárního operátoru a matice II

Skalár $\lambda \in K$ se nazývá ***m-násobná vlastní hodnota*** matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, pokud λ je m-násobným kořenem jejího charakteristického polynomu $\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x)$; říkáme rovněž, že ***algebraická násobnost vlastní hodnoty*** λ matice $\mathbf{A}$ je m.

Namísto o 1-násobné mluvíme o *jednoduché vlastní hodnotě*.

Podobne definujeme i pojem m-násobné vlastní hodnoty a algebraické násobnosti vlastní hodnoty pro lineární operátory na konečně rozměrných prostorech.

Matice řádu n má nanejvýš n vlastních hodnot, pokud každý z nich počítáme s její násobností.

Spektrem lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme množinu všech jeho vlastních hodnot a označujeme ji $\mathrm{Spec}\,\varphi$. Stejně definujeme i ***spektrum matice*** $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, které značíme $\mathrm{Spec}\,\mathbf{A}$.

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\mathrm{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má ***jednoduché spektrum***, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\mathrm{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \mathrm{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má ***jednoduché spektrum***, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Množina všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor $\mathcal{L}(V, V)$ nad číselným tělesem K, jehož prvkem je i identický operátor $\mathrm{id}_V\colon V \to V$.

Proto pro $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ a $\lambda \in K$ i zobrazení $\varphi - \lambda\mathrm{id}_V$, dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$, je lineární operátor na V.

Spektrum lineárního operátoru a matice III

Algebraickou váhou spektra $\operatorname{Spec}\varphi$ nazýváme součet algebraických násobností všech vlastních hodnot $\lambda \in \operatorname{Spec}\varphi$.

Říkáme, že lineární operátor φ má ***jednoduché spektrum***, pokud se jeho algebraická váha rovná počtu jeho prvků, t. j. právě tehdy, když všechny vlastní hodnoty operátoru φ jsou jednoduché.

Množina všech lineárních operátorů na vektorovém prostoru V tvoří vektorový prostor $\mathcal{L}(V, V)$ nad číselným tělesem K, jehož prvkem je i identický operátor $\mathrm{id}_V\colon V \to V$.

Proto pro $\varphi \in \mathcal{L}(V, V)$ a $\lambda \in K$ i zobrazení $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$, dané předpisem $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$, je lineární operátor na V.

Zřejmě $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ je vlastní vektor operátoru φ příslušející k jeho vlastní hodnotě λ právě tehdy, když $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$.

Spektrum lineárního operátoru a matice IV

Lineární podprostor $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \subseteq V$ nazýváme ***vlastní podprostor lineárního operátoru*** $\varphi\colon V \to V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Spektrum lineárního operátoru a matice IV

Lineární podprostor $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \subseteq V$ nazýváme ***vlastní podprostor lineárního operátoru*** $\varphi \colon V \to V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Zřejmě pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, tedy $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ je invariantní podprostor operátoru φ.

Spektrum lineárního operátoru a matice IV

Lineární podprostor $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \subseteq V$ nazýváme ***vlastní podprostor lineárního operátoru*** $\varphi\colon V \to V$ příslušející k jeho vlastní hodnotě $\lambda \in K$.

Zřejmě pro všechny vektory $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ platí $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, tedy $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$ je invariantní podprostor operátoru φ.

Geometrickou násobností vlastní hodnoty λ lineárního operátoru φ nazýváme dimenzi $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V))$ jeho vlastního podprostoru příslušejícího k λ.

Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se zřejmě rovná číslu $\boxed{\dim \mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}).}$

Spektrum lineárního operátoru a matice V

Připomínáme, že $\mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ označuje podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, takže platí

$$1 \leq \dim\mathcal{R}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = n - h(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \leq n.$$

Geometrickou váhou spektra lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru nazýváme ***součet geometrických násobností*** všech jeho vlastných hodnot.

$\lambda \in K$ je vlastní hodnota právě tehdy, když $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$, což je ekvivalentní s nenulovostí jak geometrické tak i algebraické násobnosti λ vzhledem k φ.

Spektrum lineárního operátoru a matice VI

Lemma 1.1

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V a $S \subseteq V$ je jeho invariantní podprostor. Označme $\varphi_1 = \varphi \restriction S$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor S. Potom charakteristický polynom $\mathrm{ch}_{\varphi_1}(x)$ dělí charakteristický polynom $\mathrm{ch}_{\varphi}(x)$.

Spektrum lineárního operátoru a matice VII

Příklad 1.2

Nechť je zadán lineární operátor $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *předpisem*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Charakteristický polynom $\mathrm{ch}_\varphi(\lambda)$ *je*

$$\mathrm{ch}_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3.$$

Tedy $\lambda_{1,2,3} = 2$ *je vlastní číslo algebraické násobnosti* 3*.*
Zároveň

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^3.$$

Máme pak to, že geometrická násobnost vlastního čísla 2 *je* 3*.*

Spektrum lineárního operátoru a matice VIII

Tvrzení 1.3

Nechť λ je vlastní hodnota lineárního operátoru φ na konečně rozměrném vektorovém prostoru V. Potom její geometrická násobnost je menší nebo rovná její algebraické násobnosti.

Pokud algebraická násobnost skaláru λ vzhledem k operátoru φ je ≥ 1, tj. pokud λ je vlastní hodnota, tak i geometrická násobnost λ vzhledem k φ je alespoň 1.

Spektrum lineárního operátoru a matice IX

Příklad 1.4

Označme $\mathbf{J}_n \in K^{n\times n}$ *čtvercovou matici řádu* n*, jejíž prvky na místech* $(i, i+1)$ *jsou rovné 1 pro* $1 \leq i \leq n-1$ *a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě* $h(\mathbf{J}_n) = n-1$*. Dále položme*

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = \lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro $\lambda \in K$*. Tedy* $\mathbf{J}_n(\lambda)$ *je tvořená diagonálou z* n *lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z* $n-1$ *jednotek a zbytek jsou nuly.*

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Například

$$\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda), \qquad \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Například

$$\mathbf{J}_1(\lambda) = (\lambda)\,, \qquad \mathbf{J}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Každá matice tvaru $\mathbf{J}_n(\lambda)$ sa nazývá ***Jordanova buňka*** řádu n. Zřejmě i $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$ je Jordanova buňka.

Charakteristický polynom Jordanovy buňky $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je

$$\boxed{\det(\mathbf{J}_n(\lambda) - x\mathbf{I}_n) = \det \mathbf{J}_n(\lambda - x) = (\lambda - x)^n.}$$

Tato matice má ***jedinou vlastní hodnotu*** $x = \lambda$ s algebraickou násobností n.

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Na druhé straně, podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda\mathbf{I}_n = \mathbf{J}_n$ je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Tedy geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je stále jen 1, bez ohledu na to, jak velké je n. Proto $\mathbf{J}_n(\lambda)$ pro $n \geq 2$ ***není podobná se žádnou diagonální maticí.***

Spektrum lineárního operátoru a matice X

Na druhé straně, podprostor řešení homogenní soustavy s maticí $\mathbf{J}_n(\lambda) - \lambda\mathbf{I}_n = \mathbf{J}_n$ je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$.

Tedy geometrická násobnost vlastní hodnoty λ matice $\mathbf{J}_n(\lambda)$ je stále jen 1, bez ohledu na to, jak velké je n. Proto $\mathbf{J}_n(\lambda)$ pro $n \geq 2$ ***není podobná se žádnou diagonální maticí.***

Tvrzení 1.5

Podobné matice mají stejné spektrum, včetně algebraické i geometrické násobnosti každé vlastní hodnoty.

Spektrum lineárního operátoru a matice XI

Věta 1.6

Nechť φ je lineární operátor na konečně rozměrném vektorovém prostoru V dimenze n. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *φ je diagonalizovatelný;*

(ii) *geometrická váha spektra $\operatorname{Spec}\varphi$ se rovná n;*

(iii) *algebraická váha spektra $\operatorname{Spec}\varphi$ se rovná n a algebraická násobnost každé vlastní hodnoty se rovná její geometrické násobnosti;*

(iv) *algebraická i geometrická váha spektra $\operatorname{Spec}\varphi$ se rovná n.*

Spektrum lineárního operátoru a matice XII

Překážky bránící diagonalizaci lineárneho operátoru φ na n-rozměrném vektorovém prostoru V se dělí do dvou kategorií:

(1) algebraická váha spektra $\operatorname{Spec}\varphi$ je menší než $n = \dim V$, tj. φ má "málo" vlastních hodnot v tělese K, i když každou z nich počítáme i s její algebraickou násobností (příkladem je například rotace o 90°);

Spektrum lineárního operátoru a matice XII

Překážky bránící diagonalizaci lineárneho operátoru φ na n-rozměrném vektorovém prostoru V se dělí do dvou kategorií:

(1) algebraická váha spektra $\mathrm{Spec}\varphi$ je menší než $n = \dim V$, tj. φ má "málo" vlastních hodnot v tělese K, i když každou z nich počítáme i s její algebraickou násobností (příkladem je například rotace o 90°);

(2) geometrická váha spektra $\mathrm{Spec}\varphi$ je menší než jeho algebraická váha, t.j. geometrická násobnost některých vlastních hodnot nedosahuje jejich algebraické násobnosti, tj. φ má "málo" vlastních vektorů jako v předchozím příkladu.

Prekážky druhého typu definitivně vylučují diagonalizaci.

Obsah

Ortogonální a unitární operátory I

Nechť U a V jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ (resp. nad $\mathbb{C}$).
Zobrazení $\varphi\colon U \to V$ se nazývá ***ortogonální*** (resp. ***unitární***), jestliže pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ortogonální a unitární operátory I

Nechť U a V jsou vektorové prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ (resp. nad $\mathbb{C}$).
Zobrazení $\varphi\colon U \to V$ se nazývá ***ortogonální*** (resp. ***unitární***), jestliže pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Lemma 2.1

Je-li $\varphi\colon U \to V$ ortogonální nebo unitární, pak

1. $||\varphi(\mathbf{u})|| = ||\mathbf{u}||$,
2. $\varphi(\mathbf{u}) \perp \varphi(\mathbf{v})$ *pokud* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$,
3. φ *je prosté,*
4. φ *zobrazuje ortonormální posloupnost (bázi) na ortonormální posloupnost,*
5. $\sphericalangle(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *pro* φ *ortogonální.*

Ortogonální a unitární operátory II

Příklad 2.2

Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární ortogonální operátor $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\boxed{\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.}$$

Ortogonální a unitární operátory II

Příklad 2.2

Otočení roviny okolo počátku o úhel α je lineární ortogonální operátor $\mathbf{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má v kanonické bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\boxed{\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.}$$

Totiž

$$\langle \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{u}), \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{R}_\alpha^T \cdot \mathbf{R}_\alpha) \cdot \mathbf{v} =$$

$$\mathbf{u}^T \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \right) \cdot \mathbf{v} =$$

$$\mathbf{u}^T \cdot \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice $\mathbf{A}$ splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice $\mathbf{A}$ splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Reálná čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá ***ortogonální***, jestliže

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n}.$$

Ortogonální a unitární operátory III

Zobecnění předcházejícího příkladu:

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde matice $\mathbf{A}$ splňuje $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Analogicky jako v předcházejícím příkladu máme

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}) \rangle = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Reálná čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá ***ortogonální***, jestliže

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n}.$$

Komplexní čtvercová matice $\mathbf{A}$ se nazývá ***unitární***, jestliže

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}^T} \quad \text{neboli} \quad \boxed{\overline{\mathbf{A}}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n}.$$

(pruh znamená matici komplexně sdružených čísel).

Ortogonální a unitární operátory IV

Jak na matici **A** poznáme, že je ortogonální (unitární)?

- její sloupce tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
- její řádky tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Ortogonální a unitární operátory IV

Jak na matici **A** poznáme, že je ortogonální (unitární)?

- její sloupce tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
- její řádky tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Věta 2.3

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v prostoru U a nechť $\varphi\colon U \to U$ je lineární operátor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *$\varphi\colon U \to V$ ortogonální (nad $\mathbb{R}$) resp. unitární (nad $\mathbb{C}$),*
2. *$(\varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n))$ je ortonormální báze v prostoru U,*
3. ***A** je reálná ortogonální matice resp. komplexní unitární matice, kde $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathbf{A}$.*

Ortogonální a unitární operátory V

Lemma 2.4

Nechť **A** *je ortogonální resp. unitární matice. Pak*

$$|\,det\,\mathbf{A}| = 1.$$

Speciálně je determinant ortogonální matice ± 1.

Ortogonální a unitární operátory V

Lemma 2.4

Nechť $\mathbf{A}$ *je ortogonální resp. unitární matice. Pak*

$$|\det \mathbf{A}| = 1.$$

Speciálně je determinant ortogonální matice ± 1.

Lemma 2.5

Nechť φ *je unitární operátor. Pak*

1. *Vlastní čísla operátoru* φ *mají absolutní hodnotu 1.*
2. *Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům operátoru* φ *jsou na sebe kolmé.*

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů I

Věta 2.6

Nechť $\varphi\colon U \to U$ je unitární operátor. Pak v prostoru U existuje ortonormální báze $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$\boxed{(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ jsou vlastní čísla operátoru φ tvaru

$$\boxed{\lambda_k = \cos\alpha_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k.}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

Příklad 2.7

Popišme nyní všechny ortogonální operátory $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Každý takový operátor má tvar $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je ortogonální matice typu 2×2.

Nechť první sloupec matice $\mathbf{A}$ je tvaru $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Nutně musí platit (protože sloupce ortogonální matice mají normu 1) $a^2 + b^2 = 1$. Protože ale řádky ortogonální matice mají rovněž normu 1, máme $a_{12} = \pm b$ a $a_{22} = \pm a$.

Zároveň máme, že první sloupec musí být kolmý na druhý sloupec, tedy druhý sloupec má jeden ze dvou následujících tvarů:

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

(1) Uvažme nejprve případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Protože $a^2 + b^2 = 1$, lze zvolit $a = \cos\alpha$ a $b = \sin\alpha$. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{R}_\alpha$ a φ je otočení roviny okolo počátku o úhel α. Pro $\alpha \neq k\pi$ nemá φ reálná vlastní čísla (viz předcházející kapitola).

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů II

(1) Uvažme nejprve případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Protože $a^2 + b^2 = 1$, lze zvolit $a = \cos\alpha$ a $b = \sin\alpha$. Pak $\mathbf{A} = \mathbf{R}_\alpha$ a φ je otočení roviny okolo počátku o úhel α. Pro $\alpha \neq k\pi$ nemá φ reálná vlastní čísla (viz předcházející kapitola).

(2) Uvažme nyní případ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pak charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ je tvaru

$$\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) = det \begin{pmatrix} a - x & b \\ b & -a - x \end{pmatrix} = x^2 - a^2 - b^2 = x^2 - 1.$$

Tedy $\mathbf{A}$ má vlastní hodnoty 1 a -1 s vlastními vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^2$, které jsou na sebe kolmé.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů III

Označme $\varphi_1 = \varphi\restriction[\mathbf{u}_1]$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor $[\mathbf{u}_1]$ a $\varphi_2 = \varphi\restriction[\mathbf{u}_2]$ zúžení φ na podprostor $[\mathbf{u}_2]$.

Pak φ_1 je identita na $[\mathbf{u}_1]$ ($\varphi_1(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_1) = 1\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$) a φ_2 je $-$identita na $[\mathbf{u}_2]$ ($\varphi_2(\mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_2) = (-1)\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_2$).

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů III

Označme $\varphi_1 = \varphi \restriction [\mathbf{u}_1]$ zúžení lineárního operátoru φ na podprostor $[\mathbf{u}_1]$ a $\varphi_2 = \varphi \restriction [\mathbf{u}_2]$ zúžení φ na podprostor $[\mathbf{u}_2]$.

Pak φ_1 je identita na $[\mathbf{u}_1]$ ($\varphi_1(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_1) = 1\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$) a φ_2 je $-$identita na $[\mathbf{u}_2]$ ($\varphi_2(\mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_2) = (-1)\mathbf{u}_2 = -\mathbf{u}_2$).

Položíme-li $a = \cos 2\alpha$ a $b = \sin 2\alpha$, lze snadno ověřit, že chceme-li normované (a správně orientované) $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$, nutně bude $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ a $\mathbf{u}_2 = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$.
Obdržíme pak nám známou souměrnost roviny podle osy procházející počátkem a svírající s osou x úhel α, tj. určené vektorem $\mathbf{u}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.
Tedy φ je lineární operátor $\mathbf{S}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, který má vzhledem na kanonickou bázi $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ matici

$$\mathbf{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

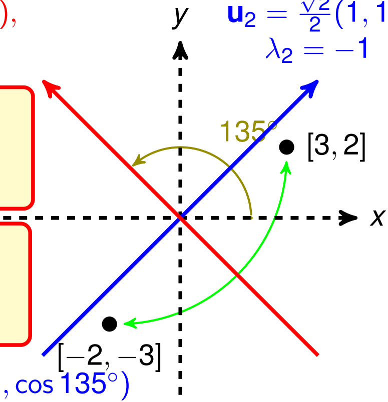
Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů IV

$$\mathbf{u}_1 = (\cos 135^\circ, \sin 135^\circ),$$
$$\mathbf{u}_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1),$$
$$\lambda_1 = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 1),$$
$$\lambda_2 = -1$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{135^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{u}_2 = (-\sin 135^\circ, \cos 135^\circ)$$

Překlopení podle přímky $y = -x$

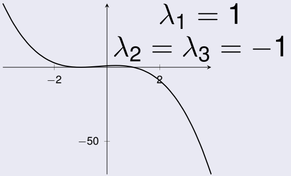
Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů V

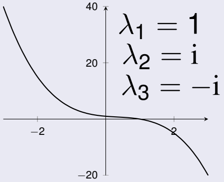
Příklad 2.8

Popišme nyní všechny ortogonální operátory $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Operátor φ je tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ a jeho charakteristický polynom je pak tvaru

$$\boxed{\mathrm{ch}_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c,\, a, b, c \in \mathbb{R}.}$$

Protože jde o polynom lichého stupně, má alespoň jeden reálný kořen λ_1 o absolutní hodnotě 1 (jedná se o ortogonální operátor). Tedy $\lambda_1 \in \{-1, 1\}$.





Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VI

Další kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu s reálnými koeficienty, je i $\overline{\lambda}$, tj. komplexně sdružené číslo k $\lambda \in \mathbb{C}$ rovněž kořenem.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VI

Další kořeny charakteristického polynomu mohou být komplexní. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ kořen polynomu s reálnými koeficienty, je i $\overline{\lambda}$, tj. komplexně sdružené číslo k $\lambda \in \mathbb{C}$ rovněž kořenem.

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Totiž, pokud} & -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c & = & 0, & \text{pak i} \\
 & \overline{-\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c} & = & \overline{0}. & \text{Odtud} \\
 & -\overline{\lambda}^3 + \overline{a}\overline{\lambda}^2 + \overline{b}\overline{\lambda} + \overline{c} & = & 0. & \text{Tedy celkem} \\
 & -\overline{\lambda}^3 + a\overline{\lambda}^2 + b\overline{\lambda} + c & = & 0. &
\end{array}
$$

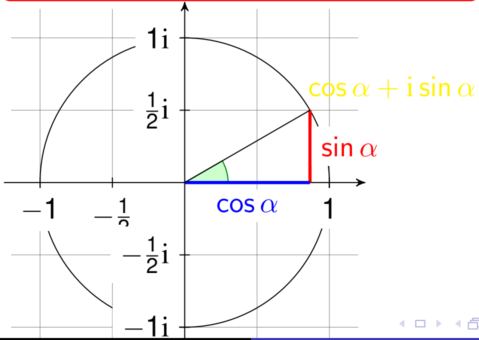
Protože je **A** reálná ortogonální matice, je nutně i unitární.

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}_3.}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VII

Vlastní čísla matice **A** v $\mathbb{C}$ mají absolutní hodnotu 1. Každé takové číslo lze psát jakožto $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$. Tedy všechna vlastní čísla matice **A** jsou

$$\boxed{\pm 1, \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha}.$$



Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VIII

Pro $\alpha = 0$ máme vlastní čísla $\boxed{\pm 1, 1, 1}$,

pro $\alpha = \pi$ máme vlastní čísla $\boxed{\pm 1, -1, -1}$

pro jiná $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ máme **dvě** vlastní čísla s nenulovou imaginární částí. Rozlišíme dva případy.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů VIII

Pro $\alpha = 0$ máme vlastní čísla $\boxed{\pm 1, 1, 1}$,

pro $\alpha = \pi$ máme vlastní čísla $\boxed{\pm 1, -1, -1}$

pro jiná $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ máme **dvě** vlastní čísla s nenulovou imaginární částí. Rozlišíme dva případy.

(1) Vlastní čísla ortogonální matice $\mathbf{A}$ tvaru 3×3 jsou

$\boxed{1, \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha}$.

Nechť $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu 1. Pak $\mathbb{R}^3 = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_1]^\perp$. Přitom jak $[\mathbf{u}_1]$ tak $[\mathbf{u}_1]^\perp$ jsou invariantní vůči zobrazení $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Totiž

$$\varphi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 \text{ a } \mathbf{u}_1 \perp [\mathbf{u}_1]^\perp \text{ implikuje } \varphi(\mathbf{u}_1) \perp \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp).$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů IX

Toto zobrazení je tedy v rovině $[\mathbf{u}_1]^\perp = \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp)$ otočení o úhel α. Odtud pak v celém $\mathbb{R}^3$ to je otočení o úhel α kolem osy dané vektorem $[\mathbf{u}_1]$. Velikost a směr otáčení určíme tak, že vezmeme vektor $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1]^\perp$, zobrazíme ho do $\varphi(\mathbf{v})$ a následně určíme odchylku těchto dvou vektorů. Úhel otáčení α je

$$\boxed{\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v})) = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\varphi(\mathbf{v})||}.}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů X

(2) Vlastní čísla ortogonální matice **A** tvaru 3×3 jsou

$$\boxed{-1, \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha, \cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha}.$$

Opět $\mathbb{R}^3 = [\mathbf{u}_1] \oplus [\mathbf{u}_1]^\perp$, kde $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ je vlastní vektor k vlastnímu číslu -1.

Výsledné zobrazení je pak složení symetrie podle roviny $[\mathbf{u}_1]^\perp = \varphi([\mathbf{u}_1]^\perp)$ a otočení kolem osy dané vektorem $[\mathbf{u}_1]$.

Velikost a směr otáčení určují vektory $\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \in [\mathbf{u}_1]^\perp$ a opět úhel otáčení α je

$$\boxed{\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v})) = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle}{||\mathbf{v}|| \cdot ||\varphi(\mathbf{v})||}.}$$

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XI

Lemma 2.9

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je lineární operátor zadaný maticí* $\mathbf{A}$*, tj.* $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$*. Tato matice zadává lineární operátor* $\varphi^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *stejným předpisem* $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ *pro* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$*. Jesliže* $\lambda = a + ib$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *nad* $\mathbb{C}$ *s vlastním vektorem* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$*, kde* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$*, pak* $\overline{\lambda} = a - ib$ *je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathrm{i}\mathbf{u}_2$*.*

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XI

Lemma 2.9

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární operátor zadaný maticí $\mathbf{A}$, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Tato matice zadává lineární operátor $\varphi^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ stejným předpisem $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. Jesliže $\lambda = a + ib$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{C}$ s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, kde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$, pak $\overline{\lambda} = a - ib$ je rovněž vlastním číslem s vlastním vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathrm{i}\mathbf{u}_2$.

Každou ortogonální matici A můžeme chápat rovněž jako unitární matici, která zadává unitární operátor $\varphi^{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, kde $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XII

Lemma 2.10

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *je ortogonální operátor zadaný ve standardní bázi ortogonální maticí* $\mathbf{A}$, *tj.* $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$. *Nechť* $\lambda = a + ib$ *je vlastní číslo matice* $\mathbf{A}$ *nad* $\mathbb{C}$ *s vlastním vektorem* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathrm{i}\mathbf{u}_2 \in \mathbb{C}^n$, *kde* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lambda \neq \pm 1$, *tj.* $\mathbf{u}$ *je vlastním vektorem unitárního operátoru* $\varphi^{\mathbb{C}}$, $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$ *pro* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$. *Potom platí*

1. $||\mathbf{u}_1|| = ||\mathbf{u}_2||$ *a* $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$.
2. *Dvourozměrný podprostor* $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \subseteq \mathbf{R}^n$ *je invariantní vůči* φ *a* φ *je na tomto podprostoru otočením o úhel* α *od vektoru* $\mathbf{u}_2$ *k vektoru* $\mathbf{u}_1$.

Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních a unitárních operátorů XIII

Věta 2.11

Nechť $\varphi\colon U \to U$ je ortogonální operátor. Potom U je direktním součtem navzájem kolmých invariantních podprostorů dimenze 1 a 2. V podprostorech dimenze 1 působí φ jako identita nebo -identita, v podprostorech dimenze 2 působí φ jako otáčení.