

# 18. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky  
Masarykova univerzita

14. května 2024

# Obsah

- 1 Jordanův kanonický tvar matice
  - Kanonický tvar
  - Příklady úprav matic na JKT
- 2 Existence JKT

# Abstrakt

V této kapitole si ukážeme, že i nediagonalizovatelné lineární operátory či matice můžeme volbou vhodné báze upravit na tzv. **Jordanův kanonický tvar**, který je – alespoň na pohled – velmi blízký diagonálnímu tvaru.

# Obsah

- 1 Jordanův kanonický tvar matice
  - Kanonický tvar
  - Příklady úprav matic na JKT
- 2 Existence JKT

# Jordanův kanonický tvar matice I

Motivace 1: Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

# Jordanův kanonický tvar matice I

**Motivace 1: Existují lineární operátory, které nelze diagonalizovat, tj. nelze je ve vhodné bázi psát jako**

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Uvažme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a zobrazení  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  určené předpisem  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ .  
Vlastní čísla jsou kořeny determinantu

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2.$$

## Jordanův kanonický tvar matice II

Vlastní číslo 2 je algebraické násobnosti 2, ale geometrické násobnosti 1. Totiž, prostor řešení homogenního systému rovnic  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  má dimenzi jedna. Řešení homogenního systému rovnic  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  je pak tvaru  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## Jordanův kanonický tvar matice II

Vlastní číslo 2 je algebraické násobnosti 2, ale geometrické násobnosti 1. Totiž, prostor řešení homogenního systému rovnic  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  má dimenzi jedna. Řešení homogenního systému rovnic  $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  je pak tvaru  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Tedy neexistuje báze  $\alpha$  taková, že by v ní bylo  $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , tj. matice  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  není podobná žádné diagonální matici, neplatí tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}$$

pro **žádnou regulární matici P**.



# Jordanův kanonický tvar matice III

**Cílem je najít pro obecný operátor  $\varphi$  bázi  $\alpha$  tak, aby matice  $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$  byla co nejjednodušší. Hledaný tvar se nazývá **Jordanův kanonický tvar**.**

## Jordanův kanonický tvar matice III

**Cílem je najít pro obecný operátor  $\varphi$  bázi  $\alpha$  tak, aby matice  $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$  byla co nejjednodušší. Hledaný tvar se nazývá **Jordanův kanonický tvar**.**

Označme  $\mathbf{J}_n \in K^{n \times n}$  čtvercovou matici řádu  $n$ , jejíž prvky na místech  $(i, i + 1)$  jsou rovné 1 pro  $1 \leq i \leq n - 1$  a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Zřejmě  $h(\mathbf{J}_n) = n - 1$ . Dále položme

$$\mathbf{J}_n(\lambda) = \lambda \mathbf{I}_n + \mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

pro  $\lambda \in K$ .

## Jordanův kanonický tvar matice IV

Tedy  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  je tvořena diagonálou z  $n$  lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z  $n - 1$  jednotek a zbytek jsou nuly.

## Jordanův kanonický tvar matice IV

Tedy  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  je tvořená diagonálou z  $n$  lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z  $n - 1$  jednotek a zbytek jsou nuly. Každá matice tvaru  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  sa nazývá **Jordanova buňka** řádu  $n$ . Zřejmě i  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$  je Jordanova buňka.

## Jordanův kanonický tvar matice IV

Tedy  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  je tvořená diagonálou z  $n$  lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z  $n - 1$  jednotek a zbytek jsou nuly.

Každá matice tvaru  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  sa nazývá **Jordanova buňka** řádu  $n$ . Zřejmě i  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$  je Jordanova buňka.

Říkáme, že matice  $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$  je v **Jordanově kanonickém tvaru**, zkráceně **JKT**, má-li blokově diagonální tvar

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{n_k}(\lambda_k)),$$

kde  $\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i)$  jsou Jordanovy buňky rozměrů  $n_i \times n_i$ , příslušející skalárům  $\lambda_i \in K$ .

## Jordanův kanonický tvar matice IV

Tedy  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  je tvořena diagonálou z  $n$  lambd, vedlejší diagonálou vpravo od ní z  $n - 1$  jednotek a zbytek jsou nuly. Každá matice tvaru  $\mathbf{J}_n(\lambda)$  sa nazývá **Jordanova buňka** řádu  $n$ . Zřejmě i  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_n(0)$  je Jordanova buňka. Říkáme, že matice  $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$  je v **Jordanově kanonickém tvaru**, zkráceně **JKT**, má-li blokově diagonální tvar

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{J}_{n_1}(\lambda_1), \dots, \mathbf{J}_{n_k}(\lambda_k)),$$

kde  $\mathbf{J}_{n_i}(\lambda_i)$  jsou Jordanovy buňky rozměrů  $n_i \times n_i$ , příslušející skalárům  $\lambda_i \in K$ .

Zřejmě v takovém případě je  $n_1 + \dots + n_k = n$  a  $\mathbf{A}$  má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \dots (\lambda_k - x)^{n_k}.$$

# Jordanův kanonický tvar matice $V$

Vidíme, že skalár  $\lambda \in K$  je **vlastní hodnotou matice  $A$**  právě tehdy, když se nachází v seznamu  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

# Jordanův kanonický tvar matice $V$

Vidíme, že skalár  $\lambda \in K$  je **vlastní hodnotou matice  $A$**  právě tehdy, když se nachází v seznamu  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

Protože  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  nemusí být nutně různé, **algebraická násobnost  $\lambda$  vzhledem k  $A$**  je **součet velikostí bloků** s hodnotou  $\lambda$  na diagonále, tj.

$$\sum_{\lambda_i = \lambda} n_i.$$



# Jordanův kanonický tvar matice $V$

Vidíme, že skalár  $\lambda \in K$  je **vlastní hodnotou matice  $A$**  právě tehdy, když se nachází v seznamu  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

Protože  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  nemusí být nutně různé, **algebraická násobnost**  $\lambda$  vzhledem k  $A$  je **součet velikostí bloků** s hodnotou  $\lambda$  na diagonále, tj.

$$\sum_{\lambda_i = \lambda} n_i.$$

Bloku  $J_{n_i}(\lambda_i)$ , bez ohledu na velikost  $n_i$ , odpovídá pouze jednorozměrný vlastní podprostor — proto je **geometrická násobnost**  $\lambda$  vzhledem k  $A$  rovna **počtu takových bloků**, t.j. počtu prvků množiny

$$\{i \leq k; \lambda_i = \lambda\}.$$

# Jordanův kanonický tvar matice VI

S Jordanovými buňkami úzce souvisí pojem **řetězce operátoru**

$\varphi: V \rightarrow V$  **pro vlastní číslo**  $\lambda$ .

# Jordanův kanonický tvar matice VI

S Jordanovými buňkami úzce souvisí pojem **řetězce operátoru**  
 $\varphi: V \rightarrow V$  **pro vlastní číslo**  $\lambda$ .

Jde o  $k$ -tici nenulových vektorů  $\beta = (\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1)$  takových, že

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{0} \\(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 \\&\vdots \\(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_k) &= \mathbf{u}_{k-1}\end{aligned}$$

# Jordanův kanonický tvar matice VI

S Jordanovými buňkami úzce souvisí pojem **řetězce operátoru**  
 $\varphi: V \rightarrow V$  **pro vlastní číslo**  $\lambda$ .

Jde o  $k$ -tici nenulových vektorů  $\beta = (\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1)$  takových, že

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{0} \\(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 \\&\vdots \\(\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_k) &= \mathbf{u}_{k-1}\end{aligned}$$

tj. podle schématu

$$\varphi - \lambda \text{id}_V: \mathbf{u}_k \mapsto \mathbf{u}_{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

# Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \text{id}_V: \mathbf{u}_k \mapsto \mathbf{u}_{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

# Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \text{id}_V: \mathbf{u}_k \mapsto \mathbf{u}_{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Potom první vektor  $\mathbf{u}_1$  řetězce  $\beta$  (v našem schématu první nenulový vektor zprava) je **vlastním vektorem operátoru**  $\varphi$  příslušným vlastní hodnotě  $\lambda$ .

# Jordanův kanonický tvar matice VII

$$\varphi - \lambda \text{id}_V: \mathbf{u}_k \mapsto \mathbf{u}_{k-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{u}_2 \mapsto \mathbf{u}_1 \mapsto \mathbf{0}.$$

Potom první vektor  $\mathbf{u}_1$  řetězce  $\beta$  (v našem schématu první nenulový vektor zprava) je **vlastním vektorem operátoru**  $\varphi$  příslušným vlastní hodnotě  $\lambda$ .

Celý řetězec je pak tvořen postupnými obrazy posledního vektoru  $\mathbf{u}_k$  (v našem schématu prvního vektoru zleva) v zobrazení  $\varphi - \lambda \text{id}_V$ , tj.

$$\beta = \left( \mathbf{u}_k, (\varphi - \lambda \text{id}_V)(\mathbf{u}_k), \dots, (\varphi - \lambda \text{id}_V)^{k-1}(\mathbf{u}_k) \right).$$

# Jordanův kanonický tvar matice VIII

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$U = [\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1].$$



# Jordanův kanonický tvar matice VIII

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$U = [\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1].$$

Totíž,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{u}_1) &= \lambda \mathbf{u}_1 \in U \\ \varphi(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2 \in U \\ \varphi(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3 \in U \\ &\vdots \\ \varphi(\mathbf{u}_k) &= \mathbf{u}_{k-1} + \lambda \mathbf{u}_k \in U.\end{aligned}$$

Tedy  $\varphi(U) \subseteq U$ .

# Jordanův kanonický tvar matice VIII

Vektory řetězce generují invariantní podprostor

$$U = [\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1].$$

Totíž,

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{u}_1) &= \lambda \mathbf{u}_1 \in U \\ \varphi(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \lambda \mathbf{u}_2 \in U \\ \varphi(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_2 + \lambda \mathbf{u}_3 \in U \\ &\vdots \\ \varphi(\mathbf{u}_k) &= \mathbf{u}_{k-1} + \lambda \mathbf{u}_k \in U.\end{aligned}$$

Tedy  $\varphi(U) \subseteq U$ .

Navíc vektory  $\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_1$  jsou lineárně nezávislé (indukcí podle  $k$ ).

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar I

## Příklad 1.1

Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

Její charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x - 1)^2(x + 1)^2$$

má dva kořeny  $x_{1,2} = 1$  a  $x_{3,4} = -1$ , oba dvojnásobné.  
Najdeme k nim příslušné vlastní vektory.

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1, 1)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar II

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je jednorozměrný, generovaný vlastním vektorem  $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1, 1)^T$ .

Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má tedy geometrickou násobnost 1.

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar III

Další vektor řetězce najdeme jako nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$  soustavy  $(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  úpravou její rozšířené matice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

tedy např.  $\mathbf{v}_2 = (2, -2, 1, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar IV

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla  $-1$ ); jeho bázi tvoří vlastní vektory  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar IV

Podprostor řešení homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má dimenzi 2 (a taková je i geometrická násobnost algebraicky dvojnásobného vlastního čísla  $-1$ ); jeho bázi tvoří vlastní vektory  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)^T$ .

$\mathbf{A}$  je tedy podobná matici  $\mathbf{J}$  v JKT

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_2(1), -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar V

Příslušná Jordanova báze  $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  je tvořena sloupci matice přechodu  $\mathbf{P}$  od  $\beta$  ke kanonické bázi  $\varepsilon$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar V

Příslušná Jordanova báze  $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  je tvořena sloupci matice přechodu  $\mathbf{P}$  od  $\beta$  ke kanonické bázi  $\varepsilon$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na předchozím příkladě bylo vidět, že je poměrně snadné se vypořádat s řetězcí vektorů, příslušnými různými vlastním čísly. Nyní se soustředíme na hledání řetězců příslušných jedinému vlastnímu číslu — budeme se zabývat maticemi s jednoprvkovým spektrem.

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VI

## Příklad 1.2

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3} = 0$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VI

## Příklad 1.2

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = -x^3$$

a jediné, algebraicky trojnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3} = 0$ .

Vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VII

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^T$ , geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1.

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VII

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^T$ , geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1.

Hledaná báze je tedy tvořena jediným řetězcem příslušným vlastnímu vektoru  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VII

Podprostor řešení je jednorozměrný, generovaný vektorem  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)^T$ , geometrická násobnost vlastního čísla 0 je tedy 1.

Hledaná báze je tedy tvořena jediným řetězcem příslušným vlastnímu vektoru  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ .

Vektor  $\mathbf{u}_2$  najdeme jako nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_2$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_1$  úpravou její rozšířené matice

$$(\mathbf{A} | \mathbf{u}_1) = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

takže můžeme položit např.  $\mathbf{u}_2 = (-1, -1, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar VIII

Podobně, třetí vektor  $\mathbf{u}_3$  našeho řetězce najdeme jako nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{u}_3$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u}_2$  úpravou její rozšířené matice

$$(\mathbf{A} | \mathbf{u}_2) = \left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

tedy např.  $\mathbf{u}_3 = (0, -1, 0)^T$ .

To znamená, že  $\mathbf{A}$  je podobná přímo s Jordanovou buňkou

$$\mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prostřednictvím matice přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar IX

## Příklad 1.3

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3 - x)^3$$

a algebraicky trojnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3} = 3$ .

K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar X

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (2, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar X

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (2, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek 1 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci  $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (2a + b, -a, b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar X

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (2, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek 1 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci  $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (2a + b, -a, b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ .

Úpravou její rozšířené matice dostaneme

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & 2a + b \\ -2 & -4 & 2 & -a \\ 1 & 2 & -1 & b \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Soustava má řešení právě tehdy, když  $a = 2b$ ; volíme např.  $b = 1$ ,  $a = 2$ . Tomu odpovídá  $\mathbf{v}_1 = (5, -2, 1)^T$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XI

Za  $\mathbf{v}_3$  lze zvolit libovolný vektor, který spolu s  $\mathbf{v}_1$  tvoří bázi vlastního podprostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ ; vidíme, že vyhovují obě volby  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ , resp.  $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$ . Vyberme si např. druhou možnost  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)^T$ .

JKT matice  $\mathbf{A}$  je tedy

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_2(3), 3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a příslušná matice přechodu tvořená sloupci Jordanovy báze  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$  je např.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XII

## Příklad 1.4

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3,4} = 2$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XII

## Příklad 1.4

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3,4} = 2$ .

K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -19 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIII

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, -1, -5)^T$ .



# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIII

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, -1, -5)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci

$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (a + 4b, -a, -b, -5b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIII

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (4, 0, -1, -5)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat libovolnou lineární kombinaci

$\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (a + 4b, -a, -b, -5b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ . Řešíme tedy následující systém

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -6 & -6 & -19 & -1 & a + 4b \\ 2 & 2 & 3 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -b \\ 5 & 5 & 20 & 0 & -5b \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 4/5 & -4a/5 + 3b/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & a/5 - 2b/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIV

Tato soustava má řešení pro libovolná  $a, b$ . Můžeme pak zvolit  $a = 1, b = 0$ . Tomu zodpovídá první řetězec  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (-4/5, 0, 1/5, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIV

Tato soustava má řešení pro libovolná  $a, b$ . Můžeme pak zvolit

$a = 1, b = 0$ . Tomu zodpovídá první řetězec

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (-4/5, 0, 1/5, 0)^T.$$

Podobně pro volbu  $a = 0, b = 1$  dostaneme druhý řetězec

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} = (4, 0, -1, -5)^T, \mathbf{v}_2 = (3/5, 0, -2/5, 0)^T.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XIV

Tato soustava má řešení pro libovolná  $a, b$ . Můžeme pak zvolit  $a = 1, b = 0$ . Tomu zodpovídá první řetězec

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} = (1, -1, 0, 0)^T, \mathbf{u}_2 = (-4/5, 0, 1/5, 0)^T.$$

Podobně pro volbu  $a = 0, b = 1$  dostaneme druhý řetězec

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} = (4, 0, -1, -5)^T, \mathbf{v}_2 = (3/5, 0, -2/5, 0)^T.$$

JKT  $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_2(2), \mathbf{J}_2(2))$  matice  $\mathbf{A}$  a příslušná Jordanova báze  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  jsou

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -4/5 & 4 & 3/5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & -1 & -2/5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XV

## Příklad 1.5

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3,4} = 0$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XV

## Příklad 1.5

Matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

má charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4$$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3,4} = 0$ .

K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVI

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ .



# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVI

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat lineární kombinaci  $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (a + b, 0, -a, -b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVI

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ .

Geometrická násobnost vlastního čísla 3 je tedy 2, takže k němu přísluší dva řetězce délek buď 1 a 3 nebo 2 a 2. Nyní ale dopředu nevíme, ke kterému vlastnímu vektoru  $\mathbf{v}_1 \in [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  existuje vektor  $\mathbf{v}_2$  tak, že  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v}_2$ , musíme uvažovat lineární kombinaci  $\mathbf{v}_1 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = (a + b, 0, -a, -b)^T$ , kde parametry  $a, b \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby soustava  $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  měla nějaké řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2$ . Řešíme tedy následující systém

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -a \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -b \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2a-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $2a + b = 0$ . Budeme tedy mít dva řetězce délek 1 a 3.

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $2a + b = 0$ . Budeme tedy mít dva řetězce délek 1 a 3.

Můžeme pak zvolit  $a = -1$ ,  $b = 2$ . Tomu zodpovídá první vektor řetězce délky 3, a to  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (1, 0, 1, -2)^T$ . Druhý vektor řetězce délky 3 zatím ponecháme v obecném tvaru  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x} = (c + d, 1, -c, -d)^T$  řešení soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  a parametry  $c, d \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby existovalo nějaké řešení  $\mathbf{y} = \mathbf{v}_3$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{v}_2$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $2a + b = 0$ . Budeme tedy mít dva řetězce délek 1 a 3.

Můžeme pak zvolit  $a = -1$ ,  $b = 2$ . Tomu zodpovídá první vektor řetězce délky 3, a to  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = (1, 0, 1, -2)^T$ . Druhý vektor řetězce délky 3 zatím ponecháme v obecném tvaru  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x} = (c + d, 1, -c, -d)^T$  řešení soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_1$  a parametry  $c, d \in \mathbb{R}$  budeme volit tak, aby existovalo nějaké řešení  $\mathbf{y} = \mathbf{v}_3$  soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{v}_2$ .

Úpravou její rozšířené matice obdržíme

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -c \\ -1 & -2 & -1 & -1 & -d \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -2c-d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+2c+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVIII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $1 + 2c + d = 0$ .  
Zvolme tedy  $c = 0$ ,  $d = -1$ . Této volbě odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$  a dále například vektor  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVIII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $1 + 2c + d = 0$ .

Zvolme tedy  $c = 0$ ,  $d = -1$ . Této volbě odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$  a dále například vektor  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)^T$ .

Jediný vektor druhého řetězce zvolíme tak, aby spolu s vektorem  $\mathbf{v}_1$  tvořily bázi vlastního podprostoru  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ ; vyhovuje každý z vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Zvolme např.  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ .

# Příklady úprav matic na Jordanův kanonický tvar XVIII

Tato soustava má řešení právě tehdy, když  $1 + 2c + d = 0$ .

Zvolme tedy  $c = 0$ ,  $d = -1$ . Této volbě odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 1)^T$  a dále například vektor  $\mathbf{v}_3 = (1, -1, 0, 0)^T$ .

Jediný vektor druhého řetězce zvolíme tak, aby spolu s vektorem  $\mathbf{v}_1$  tvořily bázi vlastního podprostoru  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ ; vyhovuje každý z vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ . Zvolme např.  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ .

JKT  $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_3(0), \mathbf{J}_1(0))$  matice  $\mathbf{A}$  a příslušná Jordanova báze  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  jsou

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



# Obsah

1 Jordanův kanonický tvar matice

- 2 Existence JKT
- Věta o existenci JKT
  - Aplikace JKT

# Věta o existenci Jordanova kanonického tvaru matice I

Klíčové výsledky celé kapitoly lze shrnout do následujících dvou vět.

## Věta 2.1

*Nechť  $\varphi: V \rightarrow V$  je lineární operátor na vektorovém prostoru  $V$  konečné dimenze  $n$  nad  $K$ . Má-li  $\varphi$  nad  $K$  spektrum algebraické váhy  $n$ , pak existuje báze  $\beta$  prostoru  $V$ , vzhledem na kterou má  $\varphi$  matici  $(\varphi)_\beta$  v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom Jordanův kanonický tvar matice zobrazení  $\varphi$  je určený jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

## Věta 2.2

*Nechť matice  $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$  má nad  $K$  spektrum algebraické váhy  $n$ . Potom  $\mathbf{A}$  je podobná s maticí  $\mathbf{J} \in K^{n \times n}$  v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom matice  $\mathbf{J}$  je určena jednoznačně až na pořadí Jordanových bloků.*

# Věta o existenci JKT matice II

## Důsledek 2.3

*Nechť matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$  mají nad  $K$  spektrum plné algebraické váhy  $n$ . Potom  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají též Jordanův kanonický tvar.*

# Věta o existenci JKT matice II

## Důsledek 2.3

*Nechť matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$  mají nad  $K$  spektrum plné algebraické váhy  $n$ . Potom  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají též Jordanův kanonický tvar.*

Předpoklad o plné algebraické váze spektra je automaticky splněn nad tzv. algebraicky uzavřenými tělesy (např.  $\mathbb{C}$ ).

# Věta o existenci JKT matice II

## Důsledek 2.3

*Nechť matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$  mají nad  $K$  spektrum plné algebraické váhy  $n$ . Potom  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$  právě tehdy, když  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  mají též Jordanův kanonický tvar.*

Předpoklad o plné algebraické váze spektra je automaticky splněn nad tzv. algebraicky uzavřenými tělesy (např.  $\mathbb{C}$ ).

Obě uvedené věty jsou zřejmě ekvivalentní, proto stačí dokázat jen jednu z nich. Důkaz je ale poměrně náročný, budeme před vlastním důkazem potřebovat připomenout pár pojmů a dokázat pomocná tvrzení.

# Věta o existenci JKT matice III

## Lemma 2.4 (Wildonovo lemma)

*Nechť  $\mathbf{V}$  je  $n$ -rozměrný vektorový prostor a  $T: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  je lineární zobrazení  $\mathbf{V}$  do sebe tak, že  $T^s = \mathbf{0}$  pro některé přirozené číslo  $s$ . Pak existují vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  a přirozená čísla  $a_1, \dots, a_k$  tak, že*

$$T^{a_i}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0} \text{ pro } i = 1, \dots, k,$$

*a vektory*

$$\mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_1), \dots, T^{a_1-1}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{u}_k, T(\mathbf{u}_k), \dots, T^{a_k-1}(\mathbf{u}_k)$$

*jsou nenulové vektory, které tvoří bázi  $\mathbf{V}$ .*

Důkaz se provede indukcí vzhledem k dimenzi  $\dim \mathbf{V}$ .

# Věta o existenci JKT matice IV

## Příklad 2.5 (Aplikace Wildonova lemmatu)

Nechť  $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$  a  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je definováno předpisem  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, 0, 0)$ . Pak  $Im(T) = [(1, 0, 0)]$  a  $T(Im(T)) = \{\mathbf{0}\}$ . Tedy  $T^2 = \mathbf{0}_V$  a  $s = 2$ .

Zároveň jádro  $Ker(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$ . Vidíme tedy, že stačí zvolit  $\mathbf{u}_1 = (0, 1, -1)$ ,  $a_1 = 1$  a  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $a_2 = 2$ . Pak  $T(\mathbf{u}_2) = (1, 0, 0)$ .

Odtud  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T(\mathbf{u}_2)$  tvoří bázi  $\mathbb{R}^3$ .

# Věta o existenci JKT matice $V$

## Definice 1

Říkáme, že vektorový prostor  $V$  je **přímým součtem** svých podprostorů  $V_1, \dots, V_m$ , pokud pro každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  existuje jediná posloupnost vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  taková, že  $\mathbf{v}_i \in V_i$  pro  $i = 1, \dots, m$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_m$ . V takovém případě píšeme  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ .



# Věta o existenci JKT matice $V$

## Definice 1

Říkáme, že vektorový prostor  $V$  je **přímým součtem** svých podprostorů  $V_1, \dots, V_m$ , pokud pro každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  existuje jediná posloupnost vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  taková, že  $\mathbf{v}_i \in V_i$  pro  $i = 1, \dots, m$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_m$ . V takovém případě píšeme  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$ .

Jedinečnost v definici znamená, že pro každé dva různé indexy  $i, j$  musí být  $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ .

Speciálně,

$$\dim V = \dim V_1 + \dots + \dim V_m.$$

# Věta o existenci JKT matice VI

## Lemma 2.6

*Nechť  $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  je lineární operátor na vektorovém prostoru  $\mathbf{V}$  konečné dimenze  $n$  nad  $K$ . Má-li  $\varphi$  nad  $K$  spektrum algebraické váhy  $n$  a jsou-li  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi$ , pak existují přirozená čísla  $s_1, \dots, s_r$  tak, že*

$$\mathbf{V} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

*a každý sčítanec je invariantní vzhledem k  $\varphi$ .*

# Věta o existenci JKT matice VI

## Lemma 2.6

Nechť  $\varphi: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  je lineární operátor na vektorovém prostoru  $\mathbf{V}$  konečné dimenze  $n$  nad  $K$ . Má-li  $\varphi$  nad  $K$  spektrum algebraické váhy  $n$  a jsou-li  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi$ , pak existují přirozená čísla  $s_1, \dots, s_r$  tak, že

$$\mathbf{V} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

a každý sčítanec je invariantní vzhledem k  $\varphi$ .

## Důkaz lemmatu - základní body

- 1 Vybereme nejprve libovolné z vlastních čísel operátoru  $\varphi$  a označíme jej  $\lambda$ .
- 2 Položme

$$t = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^i = \text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^{i+1}\}.$$

# Věta o existenci JKT matice VII

3 Dokážeme

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t \cap \text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t = \{\mathbf{0}\}.$$

4 Dokážeme

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t \oplus \text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t = \mathbf{V}.$$

5 Dokážeme invariantnost vzhledem k  $\varphi$  podprostorů

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t \text{ a } \text{Im}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t.$$

# Věta o existenci JKT matice VIII

- 6 Použijeme indukční předpoklad na zúžení operátoru  $\varphi$  na podprostor  $Im(\varphi - \lambda id_{\mathbf{V}})^t$ :

$$Im(\varphi - \lambda id_{\mathbf{V}})^t = Ker(\varphi - \lambda_2)^{s_2} \oplus \dots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

pro  $\lambda = \lambda_1$  a dokážeme tedy z Bodu 4

$$\mathbf{V} = Ker(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus Ker(\varphi - \lambda_2)^{s_2} \oplus \dots \oplus Ker(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

# Věta o existenci JKT matice IX

## Příklad 2.7

Uvažujme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

z příkladu 1.1.

Její charakteristický polynom

$$\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x - 1)^2(x + 1)^2$$

má dva kořeny  $x_{1,2} = 1$  a  $x_{3,4} = -1$ , oba dvojnásobné.

Algebraicky dvojnásobné vlastní číslo 1 má geometrickou násobnost 1 a algebraicky dvojnásobné vlastní číslo  $-1$  má geometrickou násobnost 2.

# Věta o existenci JKT matice $X$

Speciálně pak

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4 &= \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 \oplus \text{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) \\ &= [(2, -1, 1, 1), (2, -2, 1, 0)^T] \oplus [(1, 0, -1, 0)^T, (1, 0, 0, 1)^T].\end{aligned}$$

# Věta o existenci JKT matice XI

## Důkaz Věty o existenci JKT matice - základní body

- 1 Z předcházejícího lemmatu víme, že existují přirozená čísla  $s_1, \dots, s_r$  tak, že

$$\mathbf{V} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$  jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi$  a každý sčítanec je invariantní vzhledem k  $\varphi$ .



# Věta o existenci JKT matice XI

## Důkaz Věty o existenci JKT matice - základní body

- 1 Z předcházejícího lemmatu víme, že existují přirozená čísla  $s_1, \dots, s_r$  tak, že

$$\mathbf{V} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$  jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi$  a každý sčítanec je invariantní vzhledem k  $\varphi$ .

- 2 Potřebnou bázi  $\alpha$  prostoru  $\mathbf{V}$  obdržíme zřetězením jednotlivých bazí  $\alpha(\lambda_1), \dots, \alpha(\lambda_r)$  získaných pomocí Wildonova lemmatu, tzv. **kořenových podprostorů**

$$\text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1}, \dots, \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r}.$$

# Věta o existenci JKT matice XII

- 3 Příslušná matice zobrazení  $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$  má pak tvar

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\lambda_1} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{J}_{\lambda_{r-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\lambda_r} \end{pmatrix}.$$

Přitom  $\mathbf{J}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{J}_{\lambda_r}$  jsou čtvercové matice tak, že  $\mathbf{J}_{\lambda_i}$  je matice restrikce operátoru  $\varphi$  na podprostor  $\text{Ker}(\varphi - \lambda_i \text{id}_{\mathbf{V}})^{s_i}$  vzhledem ke zvolené bázi  $\alpha(\lambda_i)$ .

# Věta o existenci JKT matice XIII

4 Necht'  $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ . Každá matice  $\mathbf{J}_\lambda$  je tvaru

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{a_1}(\lambda) & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{a_2}(\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \mathbf{J}_{\lambda_{r-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{a_k}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Přitom  $\mathbf{J}_{a_i}(\lambda)$  je Jordanova buňka tak, že

$$\mathbf{J}_{a_i}(\lambda) = (\varphi/\mathbf{U}_i)_{\alpha(\lambda)_i, \alpha(\lambda)_i}.$$

Platí  $\alpha(\lambda)_i = (T^{a_i-1}(u_i), T^{a_i-2}(u_i), \dots, T(u_i), u_i)$  je báze invariantního podprostoru  $\mathbf{U}_i$  vzhledem k  $\varphi$  a

$$T = \varphi - \lambda id_{\mathbf{V}}.$$

# Věta o existenci JKT matice XIV

## 5 Ověření jednoznačnosti (až na pořadí) JKT

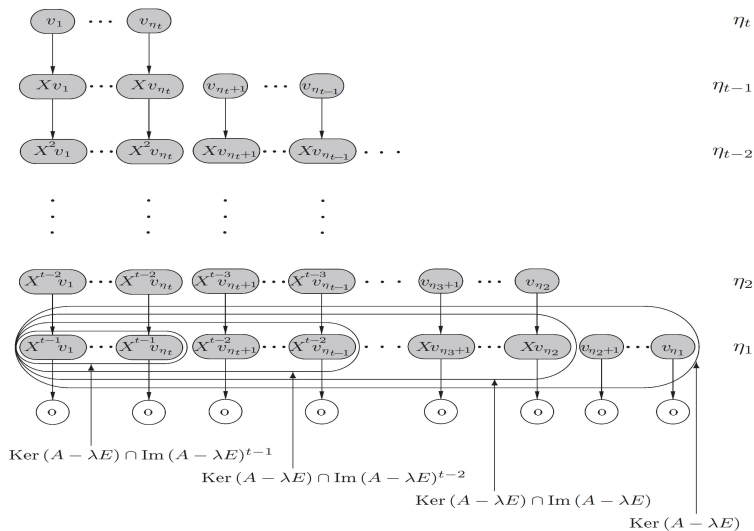
- (a) Stačí se omezit na podprostory  $\mathbf{U}$  tvaru  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{V}})^t$ . Položme tedy  $X = \varphi - \lambda \text{id}_{\mathbf{U}}$ .
- (b) Buď  $\beta$  celkový počet Jordanových buněk operátoru  $\varphi$  zúženého na  $\mathbf{U}$ , tj. počet všech řetězců. Dále buď  $\beta(l)$  celkový počet Jordanových buněk typu  $l \times l$  operátoru  $\varphi$  zúženého na  $\mathbf{U}$ , tj. počet všech řetězců délky  $l$ ,  $1 \leq l \leq t$ .
- (c) Protože každý řetězec končí právě vlastním vektorem příslušným k vlastnímu číslu  $\lambda$  a tyto vlastní vektory jsou lineárně nezávislé, máme

$$\dim \text{Ker}(X) = \beta.$$

- (d) Dále se dimenze  $\dim \text{Ker}(X^2)$  liší od dimenze  $\dim \text{Ker}(X)$  o počet bloků  $\beta - \beta(1)$ . Tedy

$$\dim \text{Ker}(X^2) = \dim \text{Ker}(X) + \beta - \beta(1).$$

# Věta o existenci JKT matice XV



# Věta o existenci JKT matice XVI

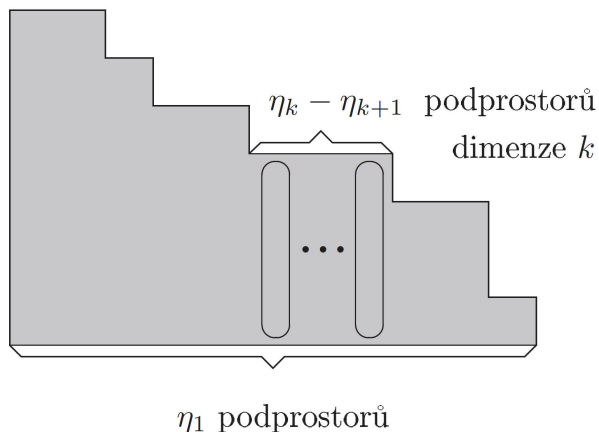
$\eta_t$  vektorů

$\eta_{k+1}$  vektorů

$\eta_k$  vektorů

$\eta_2$  vektorů

$\eta_1$  vektorů



$$\beta = \eta_1, \beta(1) = \eta_1 - \eta_2, \dots, \beta(k) = \eta_k - \eta_{k+1}, \dots, \beta(t) = \eta_t.$$

# Věta o existenci JKT matice XVII

## 5 Ověření jednoznačnosti (až na pořadí) JKT

(e) Celkem tedy

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(X) &= \beta, \\ \dim \operatorname{Ker}(X^2) &= \dim \operatorname{Ker}(X) + \beta - \beta(1), \\ \dim \operatorname{Ker}(X^3) &= \dim \operatorname{Ker}(X) + \beta - \beta(1) - \beta(2), \\ &\vdots \\ \dim \operatorname{Ker}(X^{l+1}) &= \dim \operatorname{Ker}(X^l) + \beta - \beta(1) - \dots - \beta(l). \end{aligned}$$

# Věta o existenci JKT matice XVII

## 5 Ověření jednoznačnosti (až na pořadí) JKT

(e) Celkem tedy

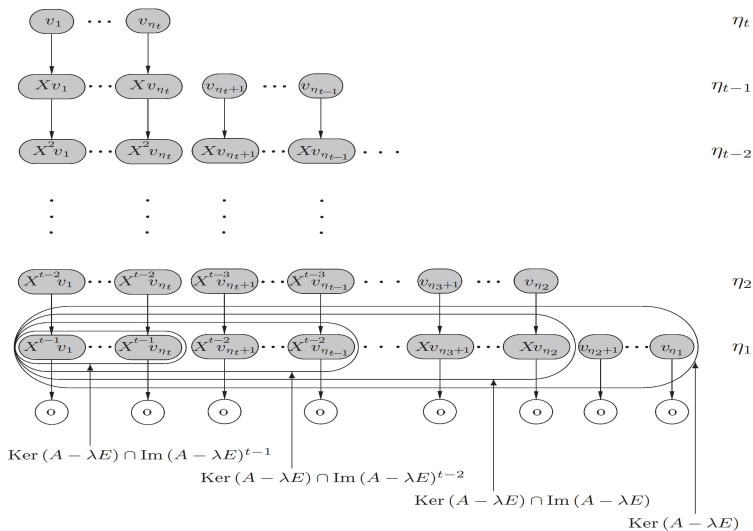
$$\begin{aligned}
 \dim \operatorname{Ker}(X) &= \beta, \\
 \dim \operatorname{Ker}(X^2) &= \dim \operatorname{Ker}(X) + \beta - \beta(1), \\
 \dim \operatorname{Ker}(X^3) &= \dim \operatorname{Ker}(X) + \beta - \beta(1) - \beta(2), \\
 &\vdots \\
 \dim \operatorname{Ker}(X^{l+1}) &= \dim \operatorname{Ker}(X^l) + \beta - \beta(1) - \dots - \beta(l).
 \end{aligned}$$

(f) Indukcí lehce ověříme, že každé  $\beta(l)$  je jednoznačně určeno pouze operátorem  $X$ , tj.  $\varphi$ . Jsou tedy počet bloků a jejich rozměry jednoznačně určeny.

Uvědomme si, že součet délek řetězců je roven dimenzi příslušného kořenového podprostoru (pomocí Wildonova lemmatu).



# Věta o existenci JKT matice XVIII



# Věta o existenci JKT matice XIX

$${}_{t-1}\mathcal{B} = \{(A - \lambda E)^{t-1}v_1^T, (A - \lambda E)^{t-1}v_2^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-1}v_{\eta_t}^T\}$$

$${}_{t-2}\mathcal{B} = {}_{t-1}\mathcal{B} \cup {}_{t-2}\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_{t-2}\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t+1}}^T, (A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t+2}}^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t-1}}^T\},$$

$${}_{t-3}\mathcal{B} = {}_{t-2}\mathcal{B} \cup {}_{t-3}\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_{t-3}\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-1+1}}^T, (A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-1+2}}^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-2}}^T\},$$

.....

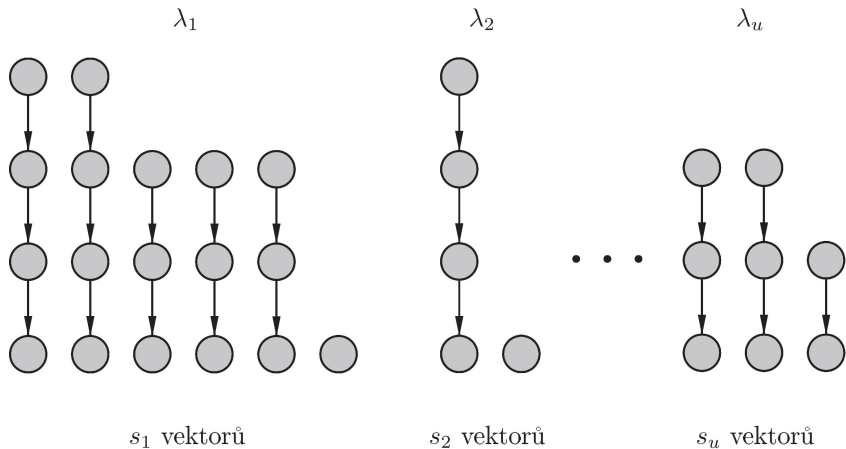
$${}_1\mathcal{B} = {}_2\mathcal{B} \cup {}_1\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_1\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)v_{\eta_3+1}^T, (A - \lambda E)v_{\eta_3+2}^T, \dots, (A - \lambda E)v_{\eta_2}^T\},$$

$${}_0\mathcal{B} = {}_1\mathcal{B} \cup {}_0\mathcal{C}, \text{ kde } {}_0\mathcal{C} = \{v_{\eta_2+1}^T, v_{\eta_2+2}^T, \dots, v_{\eta_1}^T\}.$$



# Věta o existenci JKT matice XXI



# Věta o existenci JKT matice XXII

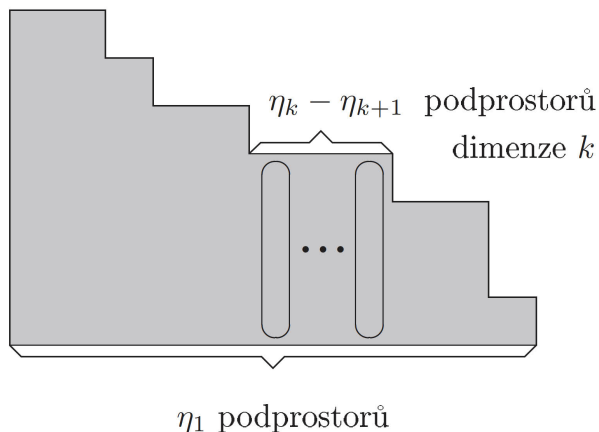
$\eta_t$  vektorů

$\eta_{k+1}$  vektorů

$\eta_k$  vektorů

$\eta_2$  vektorů

$\eta_1$  vektorů



$$\beta = \eta_1, \beta(1) = \eta_1 - \eta_2, \dots, \beta(k) = \eta_k - \eta_{k+1}, \dots, \beta(t) = \eta_t.$$

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava I

Nechť matice  $\mathbf{A}$  typu  $n \times n$  má plné spektrum nad  $K$ .

- ① Pro každé  $\lambda \in \text{Spec } \mathbf{A}$  vypočítáme mocniny matice  $\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$  a každou z nich upravíme na redukovaný stupňovitý tvar. Dostáváme tak posloupnost dvojic matic

$$\mathbf{A}_\lambda \sim \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_\lambda^2 \sim \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}_\lambda^t \sim \mathbf{B}_t, \mathbf{A}_\lambda^{t+1} \sim \mathbf{B}_{t+1},$$

kteřou ukončíme pro první  $t$  takové, že  $t = t_\lambda$  a  $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{t+1}$  (což může nastat i když  $\mathbf{A}_\lambda^t \neq \mathbf{A}_\lambda^{t+1}$ ). Potom podprostor

$$\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^t = \mathcal{R}(\mathbf{A}_\lambda^t) = \mathcal{R}(\mathbf{B}_t)$$

řešení homogenní soustavy  $\mathbf{A}_\lambda^t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  je kořenový

podprostor matice  $\mathbf{A}$  příslušející vlastnímu číslu  $\lambda$ . V případě jednobodového spektra platí  $\mathbf{A}_\lambda^t = \mathbf{0}$ .

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava II

Máme tedy požadovaný rozklad

$$K^n = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1)^{s_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(\varphi - \lambda_r)^{s_r},$$

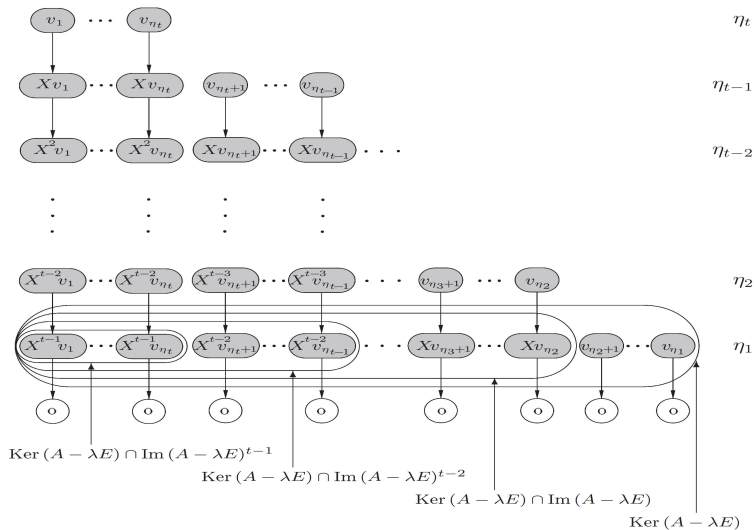
$\lambda_1, \dots, \lambda_r$  jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru  $\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  a každý sčítanec je invariantní vzhledem k  $\varphi$ . Nyní se omezíme na pevně zvolené vlastní číslo  $\lambda$ .

- Na základě každé z matic  $\mathbf{B}_p$ ,  $1 \leq p \leq t$  najdeme bázi podprostoru řešení homogenní soustavy

$$\mathbf{A}_\lambda^p \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kteřou zapíšeme jako sloupce matice  $\mathbf{C}_p$ .

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava III





# Popis úprav na JKT matice zleva doprava IV

- ③ Ze sloupců matice  $\mathbf{C}_t$  vybereme vektory

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\eta_t},$$

tak, aby doplnily bázi podprostoru  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{t-1}$  do báze podprostoru  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^t$ , tj. sloupce matice  $\mathbf{C}_{t-1}$  rozšíříme o vhodné sloupce matice  $\mathbf{C}_t$ .

- ④ Když už máme zkonstruováno prvních  $k$  řádků našeho schématu, přičemž  $k$ -tý řádek bude obsahovat vektory  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_t}), (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-2}(\mathbf{v}_{\eta_{t+1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-2}(\mathbf{v}_{\eta_{t-1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+3-k+1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+2-k}}), \mathbf{v}_{\eta_{t+2-k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\eta_{t+1-k}}$ , pak  $k + 1$ -ní řádek získáme z  $k$ -tého řádku následovně.

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava V

- ④ Nový  $(k + 1)$ -ní řádek bude obsahovat vektory

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k(\mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k(\mathbf{v}_{\eta_t}), (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t+1}}), \\ \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t-1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+2-k+1}}), \dots, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+1-k}}), \mathbf{v}_{\eta_{t+1-k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\eta_{t-k}},$$

přičemž vektory  $\mathbf{v}_{\eta_{t+1-k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\eta_{t-k}}$  získáme tak, aby doplnily bázi podprostoru  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{t-k}$  rozšířenou o vektory

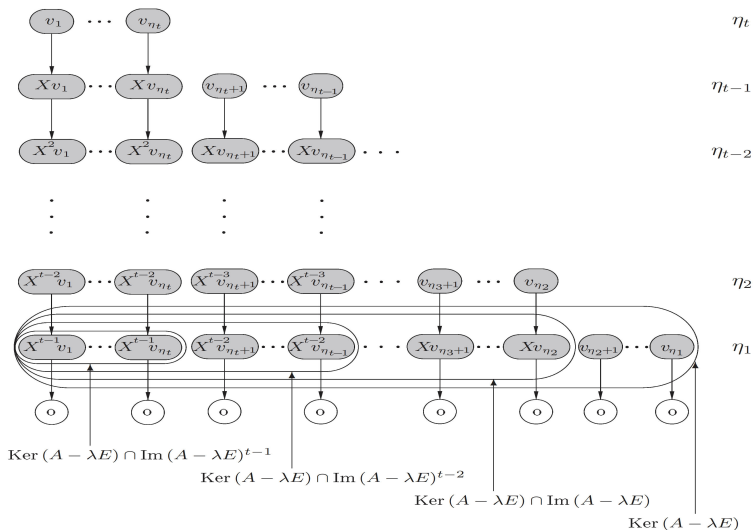
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k(\mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k(\mathbf{v}_{\eta_t}), (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t+1}}), \\ \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t-1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+2-k+1}}), \dots, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+1-k}})$$

do báze podprostoru  $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{t+1-k}$ .

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava VI

- ④ Tedy sloupce matice  $\mathbf{C}_{t-k}$  společně s vektory
- $$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k(\mathbf{v}_1), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k(\mathbf{v}_{\eta_t}), (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t+1}}), \dots,$$
- $$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{v}_{\eta_{t-1}}), \dots, (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+2-k+1}}), \dots,$$
- $$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})(\mathbf{v}_{\eta_{t+1-k}})$$
- rozšíříme o vhodné sloupce matice  $\mathbf{C}_{t+1-k}$ .
- ⑤ Pak už ze znalosti řetězců poskládáme blokově diagonálně JKT, přičemž si musíme uvědomit, že příslušná báze začíná posledním vektorem příslušného řetězce, tj. začínáme vlastním vektorem z posledního řádku našeho schématu.

# Popis úprav na JKT matice zleva doprava VII



# Příklady úprav na JKT matice zleva doprava I

## Příklad 2.8

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

má charakteristický polynom  $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^4$

a algebraicky čtyřnásobné vlastní číslo  $x_{1,2,3,4} = 0$ .

K němu příslušné vlastní vektory najdeme řešením homogenní soustavy s maticí

$$\mathbf{A} - 0\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Příklady úprav na JKT matice zleva doprava II

Podprostor řešení je dvojrozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ . Maticově zapsáno to je

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ -0 & -1 \end{pmatrix}$$

Druhá mocnina je

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je třírozměrný, generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ ,  $\mathbf{w} = (0, -1, 0, 0)^T$ .

# Příklady úprav na JKT matice zleva doprava III

Maticově zapsáno to je

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí mocnina je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podprostor řešení je čtyřrozměrný tj. celé  $\mathbb{R}^4$ , generovaný (například) vektory  $\mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, -1)^T$ ,  $\mathbf{w} = (0, -1, 0, 0)^T$ ,  $\mathbf{z} = (1, 0, 0, 0)^T$ .

Protože máme dva lineárně nezávislé vlastní vektory budeme mít dva řetězce. Delší bude mít délku 3 (protože  $(\mathbf{A} - 0\mathbf{I})^3 = \mathbf{0}$ ), kratší pak délku 1.

## Příklady úprav na JKT matice zleva doprava IV

Začneme s vektorem  $\mathbf{z} = (1, 0, 0, 0)^T$ , který doplnil sloupce matice  $\mathbf{C}_2$  na bázi prostoru  $\mathbb{R}^4$ . Tedy klademe

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{z} = (1, 0, 0, 0)^T$ . Pak nutně  $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\mathbf{z} = (0, 1, 1, -1)^T$  a dále  $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - 0\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, -2)^T$ .

Jediný vektor druhého řetězce zvolíme tak, aby spolu s vektorem  $\mathbf{v}_1$  tvořily bázi vlastního podprostoru  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ ; vyhovuje každý z vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ .

Zvolme např.  $\mathbf{v}_4 = \mathbf{u} = (1, 0, -1, 0)^T$ .

JKT  $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_3(0), \mathbf{J}_1(0))$  matice  $\mathbf{A}$  a příslušná Jordanova báze  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$  jsou

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



# Aplikace JKT I

## Počítání vysokých mocnin matice **A**

Pro reálná i komplexní čísla platí binomická věta

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}.$$

# Aplikace JKT I

## Počítání vysokých mocnin matice **A**

Pro reálná i komplexní čísla platí binomická věta

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}.$$

Tato věta obecně neplatí pro matice typu  $m \times m$ ,  $m \geq 2$ .

# Aplikace JKT I

## Počítání vysokých mocnin matice **A**

Pro reálná i komplexní čísla platí binomická věta

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^i b^{n-i}.$$

Tato věta obecně neplatí pro matice typu  $m \times m$ ,  $m \geq 2$ .

Důvodem je, že matice obecně nekomutují:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2 \\ &\neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2\end{aligned}$$

# Aplikace JKT II

Jestliže však  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , pak binomická věta platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \mathbf{A}^i \mathbf{B}^{n-i}.$$

# Aplikace JKT II

Jestliže však  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , pak binomická věta platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \mathbf{A}^i \mathbf{B}^{n-i}.$$

Nechť matice  $\mathbf{A}$  má JKT  $\mathbf{J}$  a platí  $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ . Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \underbrace{(\mathbf{PJP}^{-1})}_{\mathbf{I}_m} \cdot \underbrace{(\mathbf{PJP}^{-1}) \dots (\mathbf{PJP}^{-1})}_{\mathbf{I}_m} \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

# Aplikace JKT II

Jestliže však  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ , pak binomická věta platí:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \mathbf{A}^i \mathbf{B}^{n-i}.$$

Nechť matice  $\mathbf{A}$  má JKT  $\mathbf{J}$  a platí  $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$ . Potom

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \underbrace{(\mathbf{PJP}^{-1})}_{\mathbf{I}_m} \cdot \underbrace{(\mathbf{PJP}^{-1})}_{\mathbf{I}_m} \dots \dots \underbrace{(\mathbf{PJP}^{-1})}_{\mathbf{I}_m} \\ &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Známe-li matice  $\mathbf{J}$  a  $\mathbf{P}$ , stačí pak k výpočtu  $\mathbf{A}^n$  spočítat  $\mathbf{J}^n$ .  
Zejména z podobnosti matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  plyne podobnost matic  $\mathbf{A}^n$  a  $\mathbf{B}^n$ .

# Aplikace JKT III

Udělejme to prvně pro Jordanovu buňku typu  $k \times k$  pro  $\lambda \in K$

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \lambda \mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT III

Udělejme to prvně pro Jordanovu buňku typu  $k \times k$  pro  $\lambda \in K$

$$\mathbf{J}_k(\lambda) = \lambda \mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Přitom

$$\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



# Aplikace JKT IV

Vidíme, že platí:

1.  $(\lambda \mathbf{I}_k)^i = \lambda^i \mathbf{I}_k,$

# Aplikace JKT IV

Vidíme, že platí:

1.  $(\lambda \mathbf{I}_k)^i = \lambda^i \mathbf{I}_k,$

2.  $\mathbf{J}_k^2, \dots, \mathbf{J}_k^{k-1}$  jsou matice, kde se diagonála z jedniček postupně posunuje vpravo, tj.

# Aplikace JKT IV

Vidíme, že platí:

1.  $(\lambda \mathbf{I}_k)^i = \lambda^i \mathbf{I}_k$ ,

2.  $\mathbf{J}_k^2, \dots, \mathbf{J}_k^{k-1}$  jsou matice, kde se diagonála z jedniček postupně posunuje vpravo, tj.

$$\mathbf{J}_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\mathbf{J}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT IV

Vidíme, že platí:

1.  $(\lambda \mathbf{I}_k)^i = \lambda^i \mathbf{I}_k$ ,

2.  $\mathbf{J}_k^2, \dots, \mathbf{J}_k^{k-1}$  jsou matice, kde se diagonála z jedniček postupně posunuje vpravo, tj.

$$\mathbf{J}_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$\mathbf{J}_k^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a  $\mathbf{J}_k^k = \mathbf{J}_k^{k+1} = \dots = \mathbf{J}_k^n = \dots = \mathbf{0}$  pro  $n \geq k$ .

# Aplikace JKT V

3. Protože  $\lambda \mathbf{I}_k \cdot \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_k \cdot \lambda \mathbf{I}_k$ , můžeme použít binomickou větu:

$$\mathbf{J}_k(\lambda)^n = (\lambda \mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \lambda^{n-i} \mathbf{I}_k \cdot \mathbf{J}_k^i$$

$$\stackrel{\text{pro } n \geq k}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot \lambda^{n-i} \cdot \mathbf{J}_k^i$$

$$= \lambda^n \mathbf{I}_k + \binom{n}{1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{J}_k + \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} \cdot \mathbf{J}_k^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{k-1} \cdot \lambda^{n-k+1} \cdot \mathbf{J}_k^{k-1}.$$

# Aplikace JKT V

3. Protože  $\lambda \mathbf{I}_k \cdot \mathbf{J}_k = \mathbf{J}_k \cdot \lambda \mathbf{I}_k$ , můžeme použít binomickou větu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_k(\lambda)^n &= (\lambda \mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \lambda^{n-i} \mathbf{I}_k \cdot \mathbf{J}_k^i \\
 &\stackrel{\text{pro } n \geq k}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \cdot \lambda^{n-i} \cdot \mathbf{J}_k^i \\
 &= \lambda^n \mathbf{I}_k + \binom{n}{1} \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{J}_k + \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} \cdot \mathbf{J}_k^2 + \dots \\
 &\quad \dots + \binom{n}{k-1} \cdot \lambda^{n-k+1} \cdot \mathbf{J}_k^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Pro každé  $n \geq k$  má součet pouze  $k$  členů!!!

Pro každé  $n$  má součet nejvýše  $k$  členů!!!

# Aplikace JKT VI

Tedy pro každé  $n \geq k$

$$\mathbf{J}_k(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1} \cdot \lambda^{n-1} & \binom{n}{2} \cdot \lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-1} \cdot \lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1} \cdot \lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{k-2} \cdot \lambda^{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n & \binom{n}{1} \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT VII

4. Protože je matice  $\mathbf{J}$  blokově diagonální s Jordanovými buňkami na diagonále, můžeme počítat  $\mathbf{J}^n$  „blokově diagonálně“, tj.

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_{k_{s-1}}(\lambda_{s-1})^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_s}(\lambda_s)^n \end{pmatrix}$$



# Aplikace JKT VII

4. Protože je matice  $\mathbf{J}$  blokově diagonální s Jordanovými buňkami na diagonále, můžeme počítat  $\mathbf{J}^n$  „blokově diagonálně“, tj.

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1)^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_2}(\lambda_2)^n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_{k_{s-1}}(\lambda_{s-1})^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{k_s}(\lambda_s)^n \end{pmatrix}$$

Tedy, známe-li matici  $\mathbf{J}$ , známe všechny její  $n$ -té mocniny a rovněž víme, že

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{J}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

# Aplikace JKT VIII - Exponenciála z matice

Můžeme definovat, že pro čtvercovou matici  $\mathbf{A}$  typu  $m \times m$  je  $e^{\mathbf{A}}$  rovněž čtvercová matice typu  $m \times m$  taková, že

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_m + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3 + \frac{1}{24}\mathbf{A}^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!}.$$

Lze ukázat, že pro každý prvek  $(e^{\mathbf{A}})_{r,s}$  v  $r$ -tém řádku a v  $s$ -tém sloupci příslušná řada absolutně konverguje.

Stačí ověřit následující vlastnost Frobeniovy normy matice:

$$\|\mathbf{AB}\|_F \leq \|\mathbf{A}\|_F \cdot \|\mathbf{B}\|_F.$$

Máme pak

$$0 \leq \left\| \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right\|_F \leq \frac{\|\mathbf{A}\|_F^n}{n!}.$$

# Aplikace JKT IX - Exponenciála z matice

Totíž

$$\|\mathbf{AB}\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2$$

# Aplikace JKT IX - Exponenciála z matice

Totiž

$$\begin{aligned}\|\mathbf{AB}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz}\end{aligned}$$

# Aplikace JKT IX - Exponenciála z matice

Totíž

$$\begin{aligned}\|\mathbf{AB}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k,l=1}^n |a_{ik}|^2 |b_{lj}|^2 \right)\end{aligned}$$

# Aplikace JKT IX - Exponenciála z matice

Totíž

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{AB}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k,l=1}^n |a_{ik}|^2 |b_{lj}|^2 \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{lj}|^2 \right)
 \end{aligned}$$

# Aplikace JKT IX - Exponenciála z matice

Totíž

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{AB}\|_F^2 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
 &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{kj}|^2 \right) \quad \text{Cauchy-Schwarz} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k,l=1}^n |a_{ik}|^2 |b_{lj}|^2 \right) \\
 &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \right) \left( \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^p |b_{lj}|^2 \right) \\
 &= \|\mathbf{A}\|_F^2 \|\mathbf{B}\|_F^2.
 \end{aligned}$$

# Aplikace JKT X - Exponenciála z matice

Dále víme, že pro každé reálné číslo  $x$  řada  $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$  absolutně konverguje (definuje exponenciální funkci).



# Aplikace JKT X - Exponenciála z matice

Dále víme, že pro každé reálné číslo  $x$  řada  $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$  absolutně konverguje (definuje exponenciální funkci).

Speciálně pak řada  $(e^{\mathbf{A}})_{r,s}$  absolutně konverguje, protože její každý člen na  $n$ -té pozici je nejvýše  $\|\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\|_F$ .

# Aplikace JKT X - Exponenciála z matice

Dále víme, že pro každé reálné číslo  $x$  řada  $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}$  absolutně konverguje (definuje exponenciální funkci).

Speciálně pak řada  $(e^{\mathbf{A}})_{r,s}$  absolutně konverguje, protože její každý člen na  $n$ -té pozici je nejvýše  $\|\frac{\mathbf{A}^n}{n!}\|_F$ .

Je tedy  $e^{\mathbf{A}}$  korektně definováno a navíc

$$\|e^{\mathbf{A}}\|_F \leq e^{\|\mathbf{A}\|_F}.$$

Uvažme funkci

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}_m + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^3t^3 + \frac{1}{24}\mathbf{A}^4t^4 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}.$$

# Aplikace JKT XI - Exponenciála z matice

Derivujme řadu  $e^{\mathbf{A}t}$  člen po členu. Pak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^3t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^4t^3 + \dots = \mathbf{A} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \\ &= \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

# Aplikace JKT XI - Exponenciála z matice

Derivujme řadu  $e^{\mathbf{A}t}$  člen po členu. Pak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^3t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^4t^3 + \dots = \mathbf{A} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \\ &= \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

Vynásobením vektorem  $\mathbf{x}_0$  zprava zjistíme, že vektorová funkce  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$  je řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

# Aplikace JKT XI - Exponenciála z matice

Derivujme řadu  $e^{\mathbf{A}t}$  člen po členu. Pak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^3t^2 + \frac{1}{6}\mathbf{A}^4t^3 + \dots = \mathbf{A} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!} \\ &= \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t}.\end{aligned}$$

Vynásobením vektorem  $\mathbf{x}_0$  zprava zjistíme, že vektorová funkce  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$  je řešení diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

To platí, protože  $e^{0 \cdot \mathbf{A}} = \mathbf{I}_m$  ( $t = 0$  v mocninné řadě).

# Aplikace JKT XII - Exponenciála z matice

Pro maticovou exponenciálu platí další známá vlastnost obyčejných exponenciál: Jestliže  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  komutují (tj.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ), pak

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}.$$

Můžeme to dokázat vynásobením mocninných řad pro exponenciály vlevo a aplikací binomické věty. ( $e^{\mathbf{A}}$  je rovno  $e^{\mathbf{A}t}$  s  $t = 1$ .)

# Aplikace JKT XII - Exponenciála z matice

Pro maticovou exponenciálu platí další známá vlastnost obyčejných exponenciál: Jestliže  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  komutují (tj.  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ), pak

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}}.$$

Můžeme to dokázat vynásobením mocninných řad pro exponenciály vlevo a aplikací binomické věty. ( $e^{\mathbf{A}}$  je rovno  $e^{\mathbf{A}t}$  s  $t = 1$ .)

Proto pro Jordanovu buňku  $\mathbf{J}_k(\lambda)$  platí

$$e^{\mathbf{J}_k(\lambda)} = e^{(\lambda \mathbf{I}_k + \mathbf{J}_k)} = e^{\lambda \mathbf{I}_k} \cdot e^{\mathbf{J}_k}.$$

# Aplikace JKT XIII - Exponenciála z matice

Dále pro Jordanovu buňku  $\mathbf{J}_k(\lambda)$  platí

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{J}_k(\lambda)t} &= e^{(\lambda t \mathbf{I}_k + t \mathbf{J}_k)} = e^{\lambda t \mathbf{I}_k} \cdot e^{t \mathbf{J}_k} = e^{\lambda t \mathbf{I}_k} \cdot e^{t \mathbf{J}_k} \\ &= e^{\lambda t} \left( \mathbf{I}_k + t \mathbf{J}_k + \frac{t^2 \mathbf{J}_k^2}{2!} + \dots + \frac{t^{k-1} \mathbf{J}_k^{k-1}}{(k-1)!} \right), \end{aligned}$$

což je

KONEČNÁ ŘADA!!!

Totéž nutně platí pro každou matici  $\mathbf{J}$  v JKT!!!



# Aplikace JKT XIV - Exponenciála z matice

Tedy exponenciála z Jordanovy buňky  $\mathbf{J}_k(\lambda)$  je tvaru:

$$e^{\mathbf{J}_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XV - Exponenciála z matice

Soustavu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  tedy umíme spočítat pomocí konečného součtu.

# Aplikace JKT XV - Exponenciála z matice

Soustavu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  tedy umíme spočítat pomocí konečného součtu.

Nechť  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ . Pak soustava

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}\mathbf{y}_0$  má řešení  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$ .

# Aplikace JKT XV - Exponenciála z matice

Soustavu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$  tedy umíme spočítat pomocí konečného součtu.

Nechť  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$ . Pak soustava

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{P}\mathbf{y}_0$  má řešení  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$ .

Totíž

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

# Aplikace JKT XVI - Exponenciála z matice

Celkem pak soustavu

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  spočítáme opět pomocí konečného součtu a  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}\mathbf{y}(t)$ , kde  $\mathbf{y}(t)$  je řešení soustavy

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{J}\mathbf{y}(t)$$

s počáteční podmínkou  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$ .

# Aplikace JKT XVII - Exponenciála z matice

Nechť platí  $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$ . Pak pro každé  $i \geq 0$  platí  $\mathbf{A}^i = \mathbf{PB}^i\mathbf{P}^{-1}$ . Nutně pak i

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P} \frac{\mathbf{B}^i}{i!} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^i}{i!} \right) \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} e^{\mathbf{B}} \mathbf{P}^{-1}.$$

# Aplikace JKT XVIII - Příklad 1

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je  $(\lambda - 2)^2$ . Tedy  $\lambda_{1,2} = 2$  je dvojnásobný kořen.

# Aplikace JKT XVIII - Příklad 1

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je  $(\lambda - 2)^2$ . Tedy  $\lambda_{1,2} = 2$  je dvojnásobný kořen. Řešme homogenní systém

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zvolme  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0)^T$ . Pak  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ .



# Aplikace JKT XVIII - Příklad 1

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je  $(\lambda - 2)^2$ . Tedy  $\lambda_{1,2} = 2$  je dvojnásobný kořen. Řešme homogenní systém

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zvolme  $\mathbf{u}_1 = (1, 1)^T$ ,  $\mathbf{u}_2 = (1, 0)^T$ . Pak  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ .

Máme tedy

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XIX - Příklad 1

Odtud

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Aplikace JKT XIX - Příklad 1

Odtud

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení úlohy pro danou počáteční hodnotu je

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 3-t \\ 4-t \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XIX - Příklad 1

Odtud

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}t} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Řešení úlohy pro danou počáteční hodnotu je

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 3-t \\ 4-t \end{pmatrix}.$$

Navíc 
$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = e^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XX - Příklad 2

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

## Aplikace JKT XX - Příklad 2

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom  $p(\lambda)$  je roven

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

# Aplikace JKT XX - Příklad 2

Budeme řešit diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom  $p(\lambda)$  je roven

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Tedy

$$p(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \left[ (1-\lambda) \cdot (-2\lambda + \lambda^2 + 2) - 1 \cdot (-\lambda + 1) \right] = (1-\lambda)^4.$$

## Aplikace JKT XXI - Příklad 2

Odtud pak  $\lambda_{1,2,3,4} = 1$  je čtyřnásobný kořen.



# Aplikace JKT XXI - Příklad 2

Odtud pak  $\lambda_{1,2,3,4} = 1$  je čtyřnásobný kořen. Řešme homogenní systém

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Aplikace JKT XXI - Příklad 2

Odtud pak  $\lambda_{1,2,3,4} = 1$  je čtyřnásobný kořen. Řešme homogenní systém

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Množina jeho řešení je generována sloupci matice

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XXII - Příklad 2

Řešme dále homogenní systém

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Aplikace JKT XXII - Příklad 2

Řešme dále homogenní systém

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Množina jeho řešení je generována sloupci matice

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Aplikace JKT XXII - Příklad 2

Zbývá vyřešit homogenní systém

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Aplikace JKT XXII - Příklad 2

Zbývá vyřešit homogenní systém

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Množina jeho řešení je generována sloupci matice

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evidentně poslední sloupec matice  $\mathbf{C}_3$  není lineární kombinací sloupců matice  $\mathbf{C}_2$ . Označme jej  $\mathbf{v}_3$ .

## Aplikace JKT XXIII - Příklad 2

Pak

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4) \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2$$

a

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_4) \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1.$$

Stačí pak položit  $\mathbf{v}_4 = (-1, 0, 0, 1)^T$ .

# Aplikace JKT XXIII - Příklad 2

Máme tedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1}, \text{ kde } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



# Aplikace JKT XXIII - Příklad 2

Máme tedy

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^{-1}, \text{ kde } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ale  $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_3(1), \mathbf{J}_1(1))$ . Speciálně

$$e^{\mathbf{J}_3(1)t} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad e^{\mathbf{J}_1(1)t} = (e^t).$$

# Aplikace JKT XXIV - Příklad 2

Odtud

$$e^{\mathbf{J}t} = \text{diag}(e^{\mathbf{J}_3(1)t}, e^{\mathbf{J}_1(1)t}) = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = P e^{\mathbf{J}t} P^{-1} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 - t - \frac{t^2}{2} & -2t - \frac{t^2}{2} & -t - \frac{t^2}{2} & -t - \frac{t^2}{2} \\ t & 1 + t & t & t \\ \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení  $\mathbf{x}(t)$  je pak lineární kombinací sloupců matice  $e^{\mathbf{A}t}$ .