17. SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY A JEJICH VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

Jan Paseka

Ústav matematiky a statistiky
Masarykova univerzita

20. dubna 2022

Obsah

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

Abstrakt

V této kapitole budeme pokračovat ve studiu struktury lineárních operátorů na konečně rozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Zavedeme pojem ***adjungovaného zobrazení a samoadjungovaného lineárního operátoru*** a podíváme se na jeho diagonalizovatelnost.

V celé této kapitole bude V buď reálný nebo komplexní vektorový prostor, tj. pole skalárů je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Obsah

Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

Samoadjungované operátory I

Motivace 1: **Vlastní vektory a vlastní čísla symetrické matice**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda E| = (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$
$$= (\lambda - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2})(\lambda - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}) = 0$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Pro tato vlastní čísla nalezneme vlastní vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.

$$(1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})x_1 - x_2 = 0, (1 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})y_1 - y_2 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^T, \mathbf{v}_2 = (1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^T$$

Tyto vektory jsou na sebe **navzájem kolmé.**

Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

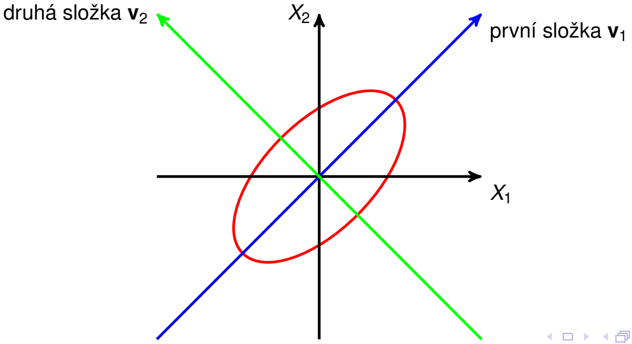
existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.
Toto není náhoda.

Samoadjungované operátory II

Tedy k symetrické matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

existuje ortogonální báze tvořená vlastními vektory.
Toto není náhoda.



Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**

Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V: U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**

Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Ukážeme, že platí $\boxed{\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle}$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{(\mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Samoadjungované operátory III

Motivace 2: **Kolmá projekce**

Buď U vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho konečně rozměrný vektorový podprostor a $P_V : U \to U$ kolmá projekce na podprostor V.

Ukážeme, že platí $\boxed{\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, P_V(\mathbf{v}) \rangle}$

$$\langle P_V(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \underbrace{P_V(\mathbf{u})}_{\in V}, \underbrace{(\mathbf{v} - P_V(\mathbf{v}))}_{\in V^\perp} + \underbrace{P_V(\mathbf{v})}_{\in V} \rangle = \langle P_V(\mathbf{u}), P_V(\mathbf{v}) \rangle$$

Pak říkáme, že P_V je ***samoadjungované zobrazení***.

Samoadjungované operátory IV

Definice 1

Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů. ***Adjungovaným zobrazením*** k φ se nazývá lineární zobrazení $\varphi^* : V \to U$ takové, že pro všechny vektory $\mathbf{u} \in U$ a $\mathbf{v} \in V$ platí

$$\boxed{\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_V = \langle \mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}) \rangle_U.}$$

Samoadjungované operátory V

Příklad 1.1

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{y}$.

Samoadjungované operátory V

Příklad 1.1

Buď $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ lineární zobrazení, $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$. Hledáme adjungované zobrazení $\varphi^* : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ve tvaru $\varphi^*(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{y}$.

Musí platit

$$
\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \varphi^*(\mathbf{y})\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
\langle \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^k} &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{x})^T\cdot\overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T\cdot\overline{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{y})} \\
\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{A}^T\cdot\overline{\mathbf{y}} &= \mathbf{x}^T\cdot\overline{\mathbf{B}}\cdot\overline{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Odtud $\boxed{B = \overline{\mathbf{A}}^T}$ je matice adjungovaného zobrazení φ^* k φ.

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).}$$

Totiž, pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$ máme

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \overline{d_j} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \overline{d_i} = \sum_{i=1}^n c_i \overline{d_i} \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}.\end{aligned}$$

Samoadjungované operátory VI - Souřadnicové zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze v unitárním (euklidovském) prostoru V dimenze n. Pak souřadnicové zobrazení $(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{C}^n$ ($(-)_\alpha \colon V \to \mathbb{R}^n$) je unitární (ortogonální) zobrazení, tj.,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n} \quad (\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{R}^n}).$$

Totiž, pro $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j$ máme

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_V &= \langle \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j \rangle_V = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_V \overline{d_j} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n c_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle_V \overline{d_i} = \sum_{i=1}^n c_i \overline{d_i} \\ &= (\mathbf{u})_\alpha^T \cdot \overline{(\mathbf{v})_\alpha} = \langle (\mathbf{u})_\alpha, (\mathbf{v})_\alpha \rangle_{\mathbb{C}^n}. \end{aligned}$$

Tedy i inverzní zobrazení $(-)_\alpha^{-1} \colon \mathbb{C}^n \to V$ ($(-)_\alpha \colon \mathbb{R}^n \to V$) je unitární (ortogonální) zobrazení.

Samoadjungované operátory VII

Věta 1.2

Nechť α *je ortonormální báze v* V, β *je ortonormální báze v* U, $\varphi : U \to V$ *je lineární zobrazení unitárních (euklidovských) prostorů,* $A = (\varphi)_{\alpha,\beta}$. *Potom k* φ *existuje právě jedno adjungované zobrazení* φ^* *a matice adjungovaného zobrazení* $\varphi^* : V \to U$ *má tvar*

$$(\varphi^*)_{\beta,\alpha} = \begin{cases} \overline{A}^T & \text{v unitárním případě,} \\ A^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Obráceně, je-li $\psi : V \to U$ *lineární zobrazení a* $(\psi)_{\beta,\alpha} = \overline{A}^T$, *pak* $\psi = \varphi^*$.

Samoadjungované operátory VIII

Definice 2

Lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U se nazývá ***samoadjungované zobrazení***, jestliže pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ platí

$$\langle \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_U = \langle \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) \rangle_U$$

tj. pokud $\varphi^* = \varphi$.

Věta 1.3

Operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U je samoadjungovaný právě tehdy, když pro jeho matici v ortonormální bázi α platí

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \mathbf{A} = \begin{cases} \overline{\mathbf{A}}^T & \text{v unitárním případě,} \\ \mathbf{A}^T & \text{v euklidovském případě.} \end{cases}$$

Samoadjungované operátory IX

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Samoadjungované operátory IX

Maticím $\mathbf{A}$, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Samoadjungované operátory IX

Maticím **A**, které splňují podmínku $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$ se nazývají ***hermitovské***. Dále budeme značit $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Příkladem hermitovské matice je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 & -5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Podobně samoadjungované operátory na euklidovských prostorech (speciálně na $\mathbb{R}^n$) jsou určeny symetrickými maticemi.

Samoadjungované operátory X

Příklad 1.4

Buď nyní U konečně rozměrný vektorový prostor se skalárním součinem, V jeho vektorový podprostor a $P_V\colon U \to U$ kolmá projekce na podprostor V. Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je ortonormální báze U a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ je báze V. Pak matice kolmé projekce je

$$P_V = \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad \underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad 0}}_{k} \end{array} .$$

Samoadjungované operátory XI

Lemma 1.5

Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U je samoadjungovaný s invariantním podprostorem V. Pak $V^{\perp}$ je rovněž invariantní.

Samoadjungované operátory XI

Lemma 1.5

Nechť lineární operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U je samoadjungovaný s invariantním podprostorem V. Pak $V^{\perp}$ je rovněž invariantní.

Věta 1.6

Nechť $\varphi : U \to U$ je samoadjungovaný operátor na unitárním (euklidovském) prostoru U. Pak platí:

1. *Vlastní čísla zobrazení φ jsou reálná.*
2. *Vlastní vektory příslušné k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.*

Samoadjungované operátory XII

Věta 1.7

O spektrálním rozkladu. *Pro každý samoadjungovaný operátor* $\varphi : U \to U$ *na unitárním (euklidovském) prostoru* U *existuje ortonormální báze* α *prostoru* U *tvořená vlastními vektory, v níž má* φ *diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

Samoadjungované operátory XII

Věta 1.7

O spektrálním rozkladu. *Pro každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ na unitárním (euklidovském) prostoru U existuje ortonormální báze α prostoru U tvořená vlastními vektory, v níž má φ diagonální matici s reálnými vlastními čísly na diagonále.*

Důsledek 1.8

Buď $\varphi : U \to U$ lineární operátor na unitárním (euklidovském) prostoru U. Pak φ je samoadjungovaný operátor právě tehdy, když

$$\boxed{\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k,}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla operátoru φ a $P_1, \ldots, P_k$ jsou kolmé projekce do navzájem kolmých vlastních podprostorů $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_U)$, $i = 1, \ldots, k$.

Samoadjungované operátory XIII

Důsledek 1.9

Pro každou reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}$ *existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

je diagonální.

Samoadjungované operátory XIII

Důsledek 1.9

Pro každou reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}$ *existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *tak, že matice*

$$\boxed{\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}}$$

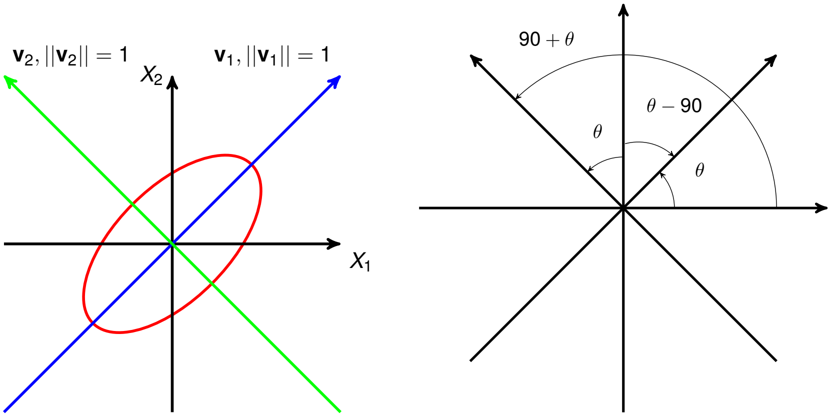
je diagonální.

Důsledek 1.10

Každá kvadratická forma na euklidovském prostoru U *dimenze* n *má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 .$$

Samoadjungované operátory XIV



Obsah

Singulární rozklad matice I

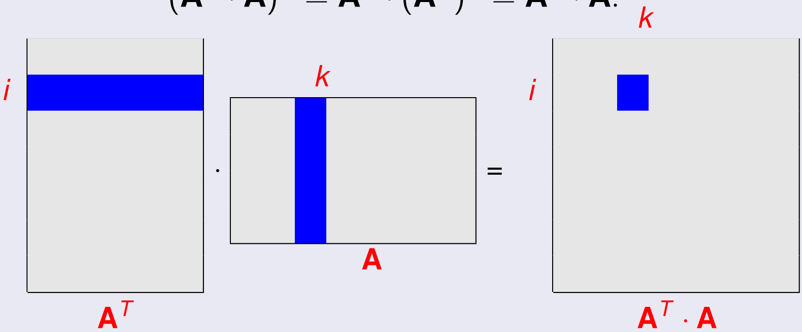
Příklad 2.1

Je-li $\mathbf{A}$ reálná matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$$

je reálná symetrická matice typu $n \times n$.
Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}.$$



Singulární rozklad matice II

Příklad 2.2

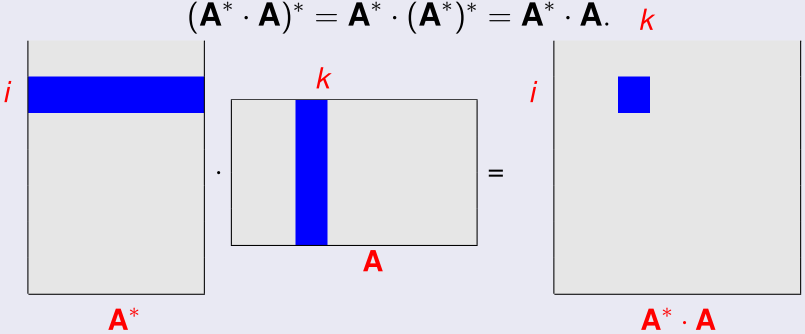
Je-li $\mathbf{A}$ komplexní matice typu $m \times n$, pak matice

$$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$$

je komplexní hermitovská matice typu $n \times n$.

Snadno pak ověříme následující rovnost

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^* = \mathbf{A}^* \cdot (\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}.$$



Singulární rozklad matice III

Lemma 2.3

Nechť $\varphi\colon U \to V$ je lineární zobrazení mezi prostory se skalárním součinem. Pak $\varphi^* \circ \varphi\colon U \to U$ (a $\varphi \circ \varphi^*\colon V \to V$) jsou samoadjungované, pozitivně semidefinitní, tj.

$$\boxed{\forall \mathbf{u} \in U : \langle (\varphi^* \circ \varphi)(\mathbf{u}), \mathbf{u} \rangle \geq 0.}$$

Speciálně, všechna vlastní čísla jsou nezáporná a platí

$$\boxed{Ker(\varphi^* \circ \varphi) = Ker(\varphi).}$$

Singulární rozklad matice IV

Věta 2.4

Nechť $\mathbf{A} \in Mat_{m\times n}$, *kde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Pak existují unitární (případně ortogonální nad* $\mathbb{R}$*) matice* $\mathbf{P}$ *typu* $m \times m$ *a* $\mathbf{Q}$ *typu* $n \times n$ *takové, že*

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

kde

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\sigma_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}^{n} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{\sigma_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}}_{r} \quad \underbrace{\hphantom{0 \quad \dots \quad 0}}_{n-r} \end{array}$$

a čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ *jsou druhé odmocniny kladných vlastních čísel hermitovské matice* $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$.

Singulární rozklad matice V

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

Singulární rozklad matice V

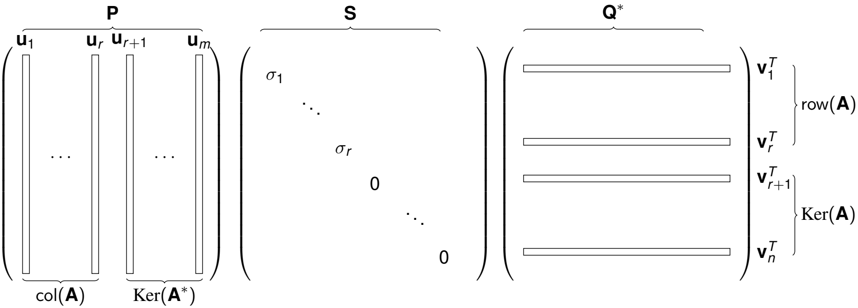
$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1 \ \ \cdots \ \ \mathbf{u}_r}_{\mathrm{col}(\mathbf{A})} & \underbrace{\mathbf{u}_{r+1} \ \ \cdots \ \ \mathbf{u}_m}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)} \end{pmatrix}}^{\mathbf{P}} \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && \sigma_r &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{S}} \overbrace{\begin{pmatrix} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \end{pmatrix}}^{\mathbf{Q}^*} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{matrix}\right\} \mathrm{row}(\mathbf{A}) \\ \left.\begin{matrix} \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{matrix}\right\} \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \end{matrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*) \perp \mathrm{col}(\mathbf{A}), \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{row}(\mathbf{A})}$$

Singulární rozklad matice VI

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{S},\mathbf{P}^*\cdot\mathbf{P}=\mathbf{I}_m,\mathbf{Q}^*\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{I}_n,}$$



Singulární rozklad matice VI

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}_m, \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n,}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r}_{\mathrm{col}(\mathbf{A})} & \underbrace{\mathbf{u}_{r+1} \ \cdots \ \mathbf{u}_m}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)} \end{pmatrix}}^{\mathbf{P}} \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{S}} \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \\ \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix}}^{\mathbf{Q}^*} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{array}\right\} \mathrm{row}(\mathbf{A}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right\} \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_r = \sigma_r \mathbf{u}_r, \sigma_i = ||\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i||.}$$

Singulární rozklad matice VI

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}, \mathbf{P}^* \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}_m, \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n,$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\mathbf{u}_1 \; \cdots \; \mathbf{u}_r}_{\mathrm{col}(\mathbf{A})} & \underbrace{\mathbf{u}_{r+1} \; \cdots \; \mathbf{u}_m}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)} \end{pmatrix}}^{\mathbf{P}} \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}^{\mathbf{S}} \overbrace{\begin{pmatrix} \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \vdots \\ \text{———} \end{pmatrix}}^{\mathbf{Q}^*} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \end{array}\right\} \mathrm{row}(\mathbf{A}) \\ \left.\begin{array}{l} \mathbf{v}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{array}\right\} \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) \end{array}$$

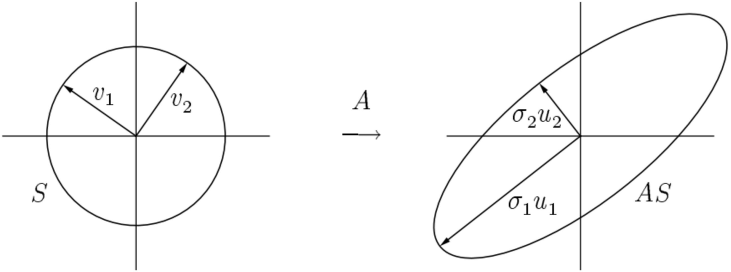
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_r = \sigma_r \mathbf{u}_r, \sigma_i = ||\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i||.$$

Singulární rozklad matice VII - Interpretace

Sloupce matice $\mathbf{P}$ se nazývají ***levé singulární vektory*** a sloupce matice $\mathbf{Q}$ se nazývají ***pravé singulární vektory***.

Singulární rozklad matice VII - Interpretace

Sloupce matice **P** se nazývají ***levé singulární vektory*** a sloupce matice **Q** se nazývají ***pravé singulární vektory***.



Obrázek 1: Transformace jednotkové kružnice na elipsu

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)$,
7. rozšíříme $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ o vektory $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvořící ortogonální bázi $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)$,

Singulární rozklad matice VIII - Nástin důkazu

1. $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*$,
2. každé σ_j^2 musí být vlastní číslo hermitovské matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$, $1 \leq j \leq n$,
3. $\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{S}$ je čtvercová diagonální matice podobná s $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
4. zvolíme pak tedy za $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormální vlastní vektory matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ příslušné k vlastním číslům $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2$, $0, \ldots, 0$ matice $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$,
5. položíme $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i)$, $1 \leq i \leq r$,
6. $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ tvoří ortonormální posloupnost ležící v podprostoru $\mathrm{col}(\mathbf{A}) \perp \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)$,
7. rozšíříme $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ o vektory $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ tvořící ortogonální bázi $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}^*)$,
8. ověříme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$.

Singulární rozklad matice IX - Aplikace

Abychom lépe pochopili, co je singulární rozklad matice, představme si matici **A** o rozměrech $m \times n$ jako m bodů $\{\mathbf{a}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ a řešme problém nalezení nejlepšího r-rozměrného podprostoru vzhledem k těmto m bodům.

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(1)} & \mathbf{a}_2^{(1)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(1)} \\ \mathbf{a}_1^{(2)} & \mathbf{a}_2^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_1^{(m)} & \mathbf{a}_2^{(m)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

Singulární rozklad matice IX - Aplikace

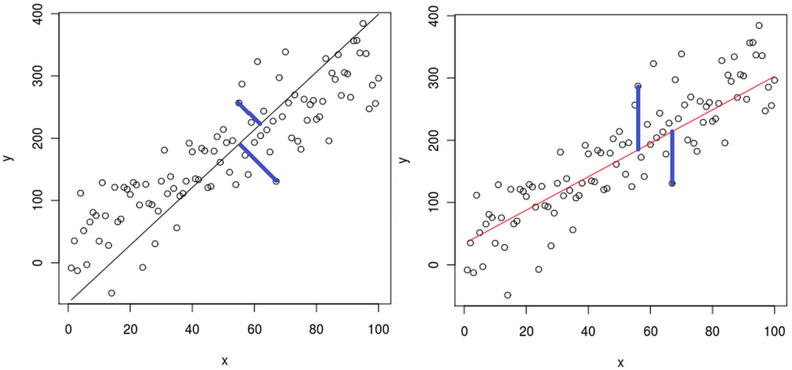
Abychom lépe pochopili, co je singulární rozklad matice, představme si matici **A** o rozměrech $m \times n$ jako m bodů $\{\mathbf{a}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ a řešme problém nalezení nejlepšího r-rozměrného podprostoru vzhledem k těmto m bodům.

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(1)} & \mathbf{a}_2^{(1)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(1)} \\ \mathbf{a}_1^{(2)} & \mathbf{a}_2^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_1^{(m)} & \mathbf{a}_2^{(m)} & \cdots & \mathbf{a}_n^{(m)} \end{pmatrix}$$

V tomto kontextu je ***nejlepší*** prostor s minimální vzdáleností k těmto bodům. Alternativním problémem je problém nejlepší aproximace, který se obvykle řeší pomocí nejmenších čtverců. Problém nejlepší aproximace ***minimalizuje vertikální chybu***, zatímco problém nalezení nejlepšího podprostoru ***minimalizuje kolmou vzdálenost k bodům***.

Singulární rozklad matice X - Aplikace

Obrázek 2: Minimalizace chyby

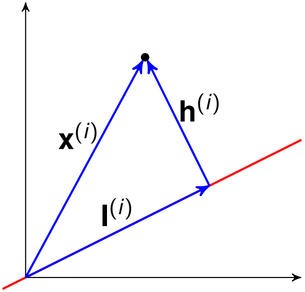


Singulární rozklad matice XI - Aplikace

Uvažujme průmět bodu $\mathbf{x}^{(i)}$ do podprostoru $\mathbf{V}$ procházejícího počátkem:

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}_k^{(i)})^2 = (l^{(i)})^2 + (h^{(i)})^2,$$

kde $l^{(i)}$ je velikost průmětu $\mathbf{l}^{(i)}$ bodu $\mathbf{x}^{(i)}$ do podprostoru $\mathbf{V}$ a $h^{(i)}$ je velikost kolmice $\mathbf{h}^{(i)}$ od bodu $\mathbf{x}^{(i)}$ k podprostoru $\mathbf{V}$.



$$(h^{(i)})^2 = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}_k^{(i)})^2 - (l^{(i)})^2$$

Singulární rozklad matice XII - Aplikace

Definujme nyní singulární vektory matice $\mathbf{A}_{m\times n}$. Představte si přímku procházející počátkem. Předpokládejme, že **v** je jednotkový vektor podél této přímky. Délka projekce vektoru $\mathbf{a}^{(i)}$ (i-tý řádek matice **A**) na podprostor [**v**] je pak $|\mathbf{a}^{(i)} \cdot v|$.

Singulární rozklad matice XII - Aplikace

Definujme nyní singulární vektory matice $\mathbf{A}_{m\times n}$. Představte si přímku procházející počátkem. Předpokládejme, že $\mathbf{v}$ je jednotkový vektor podél této přímky. Délka projekce vektoru $\mathbf{a}^{(i)}$ (i-tý řádek matice $\mathbf{A}$) na podprostor $[\mathbf{v}]$ je pak $|\mathbf{a}^{(i)} \cdot v|$.

To ukazuje, že součet čtverců projekce může být reprezentován jako $||A\mathbf{v}||^2$. Proto bude nejlepší přímka ta, která maximalizuje $||A\mathbf{v}||^2$ (podle Pythagorovy věty) a podle toho pak minimalizuje součet čtverců vzdáleností od bodů k přímce.

Singulární rozklad matice XII - Aplikace

Definujme nyní singulární vektory matice $\mathbf{A}_{m \times n}$. Představte si přímku procházející počátkem. Předpokládejme, že $\mathbf{v}$ je jednotkový vektor podél této přímky. Délka projekce vektoru $\mathbf{a}^{(i)}$ (i-tý řádek matice $\mathbf{A}$) na podprostor $[\mathbf{v}]$ je pak $|\mathbf{a}^{(i)} \cdot v|$.

To ukazuje, že součet čtverců projekce může být reprezentován jako $||A\mathbf{v}||^2$. Proto bude nejlepší přímka ta, která maximalizuje $||A\mathbf{v}||^2$ (podle Pythagorovy věty) a podle toho pak minimalizuje součet čtverců vzdáleností od bodů k přímce.

Na základě předchozích úvah definujeme ***první vlastní vektor*** $\mathbf{v}_1$ matice A, což je sloupcový vektor, jako nejlepší přímku zadanou tímto vektorem pro m bodů v n-rozměrném prostoru.

$$\mathbf{v}_1 = \underset{||\mathbf{v}||=1}{\operatorname{argmax}} ||A\mathbf{v}||$$

Singulární rozklad matice XIII - Aplikace

Hodnota $\sigma_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_1||$ se nazývá ***první singulární hodnota matice*** **A**.

Singulární rozklad matice XIII - Aplikace

Hodnota $\sigma_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_1||$ se nazývá ***první singulární hodnota matice*** **A**.

Všimněme si také, že σ_1^2 je součet čtverců projekcí bodů $\{\mathbf{a}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ na přímku danou vektorem $\mathbf{v}_1$.

Singulární rozklad matice XIII - Aplikace

Hodnota $\sigma_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_1||$ se nazývá ***první singulární hodnota matice*** **A**.

Všimněme si také, že σ_1^2 je součet čtverců projekcí bodů $\{\mathbf{a}^{(i)}\}_{i=1}^{m}$ na přímku danou vektorem $\mathbf{v}_1$.

Hladový algoritmus na nalezení 2-rozměrného podprostoru pro matici **A** vybere $\mathbf{v}_1$ jakožto první základní vektor a najde nejlepší 2-rozměrný podprostor obsahující $\mathbf{v}_1$.

Singulární rozklad matice XIII - Aplikace

Hodnota $\sigma_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_1||$ se nazývá ***první singulární hodnota matice*** **A**.

Všimněme si také, že σ_1^2 je součet čtverců projekcí bodů $\{\mathbf{a}^{(i)}\}_{i=1}^m$ na přímku danou vektorem $\mathbf{v}_1$.

Hladový algoritmus na nalezení 2-rozměrného podprostoru pro matici **A** vybere $\mathbf{v}_1$ jakožto první základní vektor a najde nejlepší 2-rozměrný podprostor obsahující $\mathbf{v}_1$.

Pro jakýkoli dvourozměrný podprostor je součet druhých mocnin souřadnic projekcí bodů roven součtu čtverců souřadnic projekcí bodů na $\mathbf{v}_1$ plus součtu druhých mocnin souřadnic projekcí bodů na $\mathbf{v}_2$. Není předem zaručeno, že přístup pomocí hladového algoritmu přinese nejlepší řešení, ale v tomto případě tomu tak bude.

Singulární rozklad matice XIV - Aplikace

Druhý singulární vektor najdeme takto:

$$\mathbf{v}_2 = \underset{\mathbf{v}\perp\mathbf{v}_1, ||\mathbf{v}||=1}{\operatorname{argmax}} ||A\mathbf{v}||$$

Hodnota $\sigma_2(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_2||$ se nazývá ***druhá singulární hodnota matice*** **A**.

Singulární rozklad matice XIV - Aplikace

Druhý singulární vektor najdeme takto:

$$\mathbf{v}_2 = \underset{\mathbf{v}\perp\mathbf{v}_1, ||\mathbf{v}||=1}{\operatorname{argmax}} ||A\mathbf{v}||$$

Hodnota $\sigma_2(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}\mathbf{v}_2||$ se nazývá ***druhá singulární hodnota matice*** **A**.

Všechny zbývající bázové vektory n-rozměrného prostoru najdeme podobně:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \underset{\mathbf{v}\perp\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k, ||\mathbf{v}||=1}{\operatorname{argmax}} ||\mathbf{A}\mathbf{v}||$$

Singulární rozklad matice XV - Aplikace

Věta 2.5 (Korektnost hladového algoritmu)

Nechť $\mathbf{A}$ *je reálná matice typu* $m \times n$*, kde* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ *jsou výše uvedené singulární vektory. Pro* $1 \leq k \leq r$ *nechť* $\mathbf{V}_k$ *je podprostor generovaný základními vektory* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$*. Pak pro jakékoli* k *je* $\mathbf{V}_k$ *nejlepší* k*-rozměrný podprostor řádkového prostoru matice* $\mathbf{A}$*.*

Singulární rozklad matice XV - Aplikace

Věta 2.5 (Korektnost hladového algoritmu)

Nechť $\mathbf{A}$ *je reálná matice typu* $m \times n$*, kde* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *jsou výše uvedené singulární vektory. Pro* $1 \leq k \leq r$ *nechť* $\mathbf{V}_k$ *je podprostor generovaný základními vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*. Pak pro jakékoli* k *je* $\mathbf{V}_k$ *nejlepší* k*-rozměrný podprostor řádkového prostoru matice* $\mathbf{A}$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $k = 1$ toto tvrzení zjevně platí.

Singulární rozklad matice XV - Aplikace

Věta 2.5 (Korektnost hladového algoritmu)

Nechť $\mathbf{A}$ *je reálná matice typu* $m \times n$*, kde* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *jsou výše uvedené singulární vektory. Pro* $1 \leq k \leq r$ *nechť* $\mathbf{V}_k$ *je podprostor generovaný základními vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*. Pak pro jakékoli* k *je* $\mathbf{V}_k$ *nejlepší* k*-rozměrný podprostor řádkového prostoru matice* $\mathbf{A}$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $k = 1$ toto tvrzení zjevně platí.

Předpokládejme, že $\mathbf{V}_{k-1}$ je nejlepší $(k-1)$-rozměrný podprostor a že $\mathbf{W}_k$ je nejlepší k-rozměrný podprostor.

Singulární rozklad matice XV - Aplikace

Věta 2.5 (Korektnost hladového algoritmu)

Nechť $\mathbf{A}$ *je reálná matice typu* $m \times n$*, kde* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ *jsou výše uvedené singulární vektory. Pro* $1 \leq k \leq r$ *nechť* $\mathbf{V}_k$ *je podprostor generovaný základními vektory* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$*. Pak pro jakékoli* k *je* $\mathbf{V}_k$ *nejlepší* k*-rozměrný podprostor řádkového prostoru matice* $\mathbf{A}$*.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí. Pro $k = 1$ toto tvrzení zjevně platí.

Předpokládejme, že $\mathbf{V}_{k-1}$ je nejlepší $(k-1)$-rozměrný podprostor a že $\mathbf{W}_k$ je nejlepší k-rozměrný podprostor.

Ukažme, že existuje vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tak, že $\mathbf{v} \in W_k \cap V_{k-1}^{\perp}$.

Singulární rozklad matice XVI - Aplikace

Zvolíme tedy ortonormální bázi $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ prostoru $\mathbf{W}_k$ tak, aby $\mathbf{w}_k$ byl kolmý k $\mathbf{V}_{k-1}$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{A}\mathbf{w}_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_i||^2 + ||\mathbf{A}\mathbf{w}_k||^2,$$

protože $\mathbf{V}_{k-1}$ je optimální $(k-1)$-rozměrný podprostor.

Singulární rozklad matice XVI - Aplikace

Zvolíme tedy ortonormální bázi $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$ prostoru $\mathbf{W}_k$ tak, aby $\mathbf{w}_k$ byl kolmý k $\mathbf{V}_{k-1}$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{A}\mathbf{w}_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_i||^2 + ||\mathbf{A}\mathbf{w}_k||^2,$$

protože $\mathbf{V}_{k-1}$ je optimální $(k-1)$-rozměrný podprostor.

Protože $\mathbf{w}_k$ je kolmý na $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1}$, pak podle definice $\mathbf{v_k}$ máme: $||\mathbf{A}\mathbf{w_k}||^2 \leq ||\mathbf{A}\mathbf{v_k}||^2$.

Singulární rozklad matice XVI - Aplikace

Zvolíme tedy ortonormální bázi $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ prostoru $\mathbf{W}_k$ tak, aby $\mathbf{w}_k$ byl kolmý k $\mathbf{V}_{k-1}$. Pak

$$\sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{A}\mathbf{w}_i||^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_i||^2 + ||\mathbf{A}\mathbf{w}_k||^2,$$

protože $\mathbf{V}_{k-1}$ je optimální $(k-1)$-rozměrný podprostor.

Protože $\mathbf{w}_k$ je kolmý na $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$, pak podle definice $\mathbf{v_k}$ máme: $||\mathbf{A}\mathbf{w_k}||^2 \leq ||\mathbf{A}\mathbf{v_k}||^2$. Tím pádem

$$\sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{A}\mathbf{w_i}||^2 \leq \sum_{i=1}^{k} ||\mathbf{A}\mathbf{v_i}||^2,$$

což ukazuje, že $\mathbf{V}_k$ je přinejmenším stejně dobré jako $\mathbf{W}_k$, a tedy optimální.

Singulární rozklad matice XVII - Aplikace

Všimněme si, že vektor $\mathbf{A}\mathbf{v}_j$ lze popsat souborem délek průmětů řádků matice **A** do podprostoru $[\mathbf{v}_j]$.

Singulární rozklad matice XVII - Aplikace

Všimněme si, že vektor $\mathbf{Av}_j$ lze popsat souborem délek průmětů řádků matice $\mathbf{A}$ do podprostoru $[\mathbf{v}_j]$.

Podívejme se na singulární hodnotu $||\mathbf{Av}_j|| = \sigma_j(A)$ matice $\mathbf{A}$ jakožto na nějakou složku matice $\mathbf{A}$ podél vektoru $\mathbf{v}_j$.

Singulární rozklad matice XVII - Aplikace

Všimněme si, že vektor $\mathbf{Av}_j$ lze popsat souborem délek průmětů řádků matice $\mathbf{A}$ do podprostoru $[\mathbf{v}_j]$.

Podívejme se na singulární hodnotu $||\mathbf{Av}_j|| = \sigma_j(A)$ matice $\mathbf{A}$ jakožto na nějakou složku matice $\mathbf{A}$ podél vektoru $\mathbf{v}_j$.

Aby tato interpretace dávala smysl, je nutné, aby součet druhých mocnin prvků všech vektorů $\mathbf{Av}_j$ byl roven součtu druhých mocnin prvků matice $\mathbf{A}$.

Singulární rozklad matice XVII - Aplikace

Všimněme si, že vektor $\mathbf{Av}_j$ lze popsat souborem délek průmětů řádků matice $\mathbf{A}$ do podprostoru $[\mathbf{v}_j]$.

Podívejme se na singulární hodnotu $||\mathbf{Av}_j|| = \sigma_j(A)$ matice $\mathbf{A}$ jakožto na nějakou složku matice $\mathbf{A}$ podél vektoru $\mathbf{v}_j$.

Aby tato interpretace dávala smysl, je nutné, aby součet druhých mocnin prvků všech vektorů $\mathbf{Av}_j$ byl roven součtu druhých mocnin prvků matice $\mathbf{A}$.

To ve skutečnosti platí a je to maticová analogie rozkladu vektoru z hlediska složek ortogonální báze.

Singulární rozklad matice XVIII - Aplikace

Uvažujme řádek $\mathbf{a}_i$ matice $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ tvoří lineární obal všech řádků matice $\mathbf{A}$, pak $\forall \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v} = 0$. Tedy pro každý vektor $\mathbf{a}_i$ platí rovnost $\sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a_i} \cdot \mathbf{v_j})^2 = ||\mathbf{a_i}||^2$.

Singulární rozklad matice XVIII - Aplikace

Uvažujme řádek $\mathbf{a}_i$ matice $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ tvoří lineární obal všech řádků matice $\mathbf{A}$, pak $\forall \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v} = 0$. Tedy pro každý vektor $\mathbf{a}_i$ platí rovnost $\sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a_i} \cdot \mathbf{v_j})^2 = ||\mathbf{a_i}||^2$.

Sečtením všech řádků dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} ||\mathbf{a_i}||^2 &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_j)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||^2 = \sum_{j=1}^{r} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||^2 = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^2(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Singulární rozklad matice XVIII - Aplikace

Uvažujme řádek $\mathbf{a}_i$ matice $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ tvoří lineární obal všech řádků matice $\mathbf{A}$, pak $\forall \mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r : \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{v} = 0$. Tedy pro každý vektor $\mathbf{a}_i$ platí rovnost $\sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a_i} \cdot \mathbf{v_j})^2 = ||\mathbf{a_i}||^2$.

Sečtením všech řádků dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} ||\mathbf{a_i}||^2 &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_j)^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{v}_j)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||^2 = \sum_{j=1}^{r} ||\mathbf{A}\mathbf{v}_j||^2 = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^2(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Je třeba vzít v úvahu, že $\sum_{i=1}^{m} ||\mathbf{a}_i||^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ je součet druhých mocnin všech prvků matice $\mathbf{A}$.

Tedy součet druhých mocnin singulárních hodnot matice $\mathbf{A}$ je ve skutečnosti roven součtu druhých mocnin všech prvků matice $\mathbf{A}$.

Singulární rozklad matice XIX - Aplikace

Definujeme pak ***Frobeniovu normu matice* A**, označovanou $||\mathbf{A}||_F$, jakožto

$$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Singulární rozklad matice XIX - Aplikace

Definujeme pak ***Frobeniovu normu matice* A**, označovanou $||\mathbf{A}||_F$, jakožto

$$||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Důsledkem výše uvedených výpočtů je tvrzení, že součet druhých mocnin singulárních hodnot matice **A** se rovná druhé mocnině Frobeniovy normy.

$$\sum_j \sigma_j^2(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_F^2$$

Singulární rozklad matice XX - Aplikace

Matici $\mathbf{A}$ lze plně popsat tím, jak transformuje vektory $\mathbf{v_i}$.

Singulární rozklad matice XX - Aplikace

Matici **A** lze plně popsat tím, jak transformuje vektory $\mathbf{v_i}$.

Jakýkoli vektor **v** může být reprezentován jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ a vektoru kolmého ke všem $\mathbf{v}_j$. Vektory $\mathbf{Av}_1, ..., \mathbf{Av}_r$ tvoří základní sadu vektorů spojených s maticí A. Po normalizaci dostaneme:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i(\mathbf{A})}\mathbf{Av}_i, 1 \leq i \leq r.$$

Singulární rozklad matice XX - Aplikace

Matici **A** lze plně popsat tím, jak transformuje vektory $\mathbf{v_i}$.

Jakýkoli vektor **v** může být reprezentován jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ a vektoru kolmého ke všem $\mathbf{v}_j$. Vektory $\mathbf{Av}_1, ..., \mathbf{Av}_r$ tvoří základní sadu vektorů spojených s maticí A. Po normalizaci dostaneme:

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i(\mathbf{A})}\mathbf{Av}_i, 1 \leq i \leq r.$$

Stačí pak jen dokázat

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad \text{a} \quad \mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_k \quad \text{pro } i \neq k.$$

Pseudoinverzní matice I

Motivace č. 1: Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^{\perp}, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^{\perp},$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^{\perp}\colon\ Ker(\varphi)^{\perp} \to Im(\varphi).$$

Pseudoinverzní matice I

Motivace č. 1: Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^\perp,$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na ($Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp)$) z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ existuje inverze.

Pseudoinverzní matice I

Motivace č. 1: Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení, tj. $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Platí

$$K^n = Ker(\varphi) \oplus Ker(\varphi)^\perp, K^k = Im(\varphi) \oplus Im(\varphi)^\perp,$$
$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Im(\varphi).$$

Lineární zobrazení $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ je prosté (jeho jádro je triviální) a na ($Im(\varphi) = Im(\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp)$ z důvodu stejné dimenze). Tedy k $\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp$ existuje inverze.
Má-li být **B** pseudoinverzní matice k **A**, položme $\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{y}$. Pak $\psi\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$ a určitě by kompozice

$$\psi \circ \varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp\colon\ Ker(\varphi)^\perp \to Ker(\varphi)^\perp$$

měla být identita na $Ker(\varphi)^\perp$.

Pseudoinverzní matice II

Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^\perp$.

Pseudoinverzní matice II

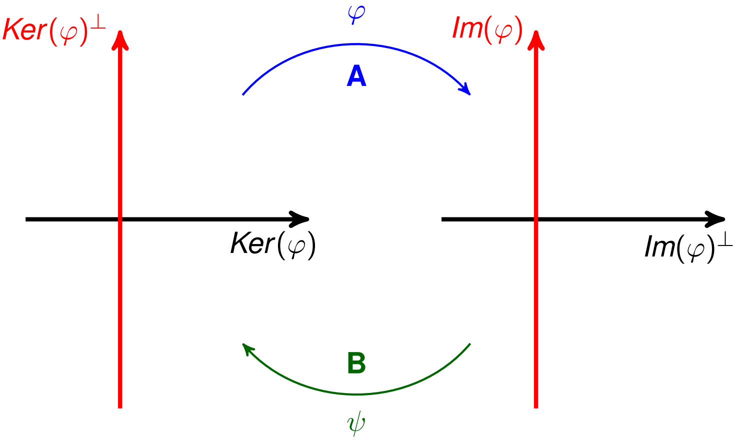
Tedy lineární zobrazení $\psi \circ \varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Ker(\varphi)^\perp$.

Podobně by lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ mělo být identita na podprostoru $Im(\varphi)$, tj. kompozice

$$\varphi \restriction Ker(\varphi)^\perp \circ \psi \colon \ Im(\varphi) \to Im(\varphi)$$

by měla být identita na $Im(\varphi)$.
Tedy lineární zobrazení $\varphi \circ \psi \colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^k$ by mělo být kolmou projekcí na podprostor $Im(\varphi)$.

Pseudoinverzní matice III



Pseudoinverzní matice IV

Motivace č. 2: Nechť **A** je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^{n} \\ \begin{matrix} 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{matrix} \end{pmatrix}, s_i > 0}$$

Pseudoinverzní matice IV

Motivace č. 2: Nechť **A** je matice typu $n \times n$, která je invertibilní. Pro její singulární rozklad platí

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*,}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \overbrace{s_1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0}^{n} \\ 0 \quad s_2 \quad \ldots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \ddots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad \ldots \quad s_n \end{pmatrix}, s_i > 0}$$

Pak pro inverzní matici k **A** platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^*)^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{Q}^*)^*\mathbf{S}^{-1}\mathbf{P}^* \\ &= \mathbf{Q} \cdot \begin{pmatrix} s_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2^{-1} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & s_n^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^*. \end{aligned}$$

Pseudoinverzní matice V

Definice 3

Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $k \times n$ se singulárním rozkladem

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{Q}^*, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_r \end{pmatrix}, s_i > 0$$

Potom se matice

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{Q} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \hline \mathbf{0}_{n-r,r} & \mathbf{0}_{n-r,n-r} \end{array} \right) \cdot \mathbf{P}^*}$$

typu $n \times k$ nazývá ***pseudoinverzní matice*** k matici $\mathbf{A}$.

Pseudoinverzní matice VI - Základní vlastnosti

1. Je-li $\mathbf{A}$ invertibilní, je $\mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{-1}$.
2. $\left(\mathbf{A}^{(-1)}\right)^{(-1)} = \mathbf{A}$.
3. $\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)}$ jsou samoadjungované matice.
4. Buď $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k$ lineární zobrazení tvaru $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. Dále položme $\varphi^{(-1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^k$ a definujme tak lineární zobrazení $\varphi^{(-1)}\colon \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}^n$. Pak kompozice $\varphi^{(-1)} \circ \varphi$ tvaru

$$(\varphi^{(-1)} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^n$ do podprostoru $(Ker(\varphi))^\perp$ (viz Motivace 1) a kompozice $\varphi \circ \varphi^{(-1)}$ tvaru

$$(\varphi \circ \varphi^{(-1)})(\mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{y}$$

je **kolmá projekce** $\mathbb{K}^k$ do podprostoru $Im(\varphi)$.

Pseudoinverzní matice VII - Základní vlastnosti

5. $$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A},} \qquad \boxed{\mathbf{A}^{(-1)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{(-1)} = \mathbf{A}^{(-1)}.}$$
6. **Důležitá pro počítání:**

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{(-1)} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

7. **Důsledek (6) a (1):** Existuje-li k matici $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ typu $n \times n$ inverzní matice, pak

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^*.}$$

Vlastnost (7) lze často použít při počítání, když $n \leq k$.

Pseudoinverzní matice VIII

Příklad 2.6

Spočtěte $\mathbf{A}^{(-1)}$ *k matici* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Platí:*

$$\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathit{det}\, \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = 6.$$

$$(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-1)} &= (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$ lineární podprostor v $\mathbb{R}^m$ generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Pseudoinverzní matice IX - Aplikace (opakování)

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

a označme $S = [\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \ldots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})]$ lineární podprostor v $\mathbb{R}^m$ generovaný sloupci matice $\mathbf{A}$.

Podle Frobeniova kritéria má naše soustava nějaké řešení $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in S$. Složky řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ jsou pak koeficienty lineární kombinace

$$x_1 \mathbf{s}_1(\mathbf{A}) + \ldots + x_n \mathbf{s}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Ale i v případě, kdy $\mathbf{b} \notin S$, tj. řešení soustavy neexistuje, se můžeme pokusit nahradit její pravou stranu $\mathbf{b}$ co nejbližším vektorem z podprostoru S. Takto získaná nová soustava už má řešení, které můžeme právem považovat za nejlepší možné přibližné řešení původní soustavy.

Pseudoinverzní matice X - Aplikace

Věta 2.7

Pro $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ *funkce* $\boxed{||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||}$ *nabývá svého minima v bodě* $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}}$. *Body v* $\mathbf{K}^n$, *kde* $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||$ *nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor*

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathit{0}\}.}$$

Pseudoinverzní matice X - Aplikace

Věta 2.7

Pro $\mathbf{x} \in \mathbf{K}^n$ *funkce* $\boxed{||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||}$ *nabývá svého minima v bodě* $\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b}}$. *Body v* $\mathbf{K}^n$, *kde* $||\mathbf{Ax} - \mathbf{b}||$ *nabývá svého minima, tvoří afinní podprostor*

$$\boxed{\mathbf{A}^{(-1)}\mathbf{b} + \{\mathbf{z} \in \mathbf{K}^n \mid \mathbf{Az} = \mathit{0}\}.}$$

V úlohách ***lineární regrese*** máme zadané hodnoty $y_1, \ldots, y_m$ neznámé funkce f v bodech $x_1, \ldots, x_m$ jejího definičního oboru, získané většinou měřením. Funkci f chceme aproximovat lineární kombinací funkcí $f_1, \ldots, f_n$, které známe, či alespoň jsou nám známé jejich hodnoty $a_{ij} = f_j(x_i)$ v bodech $x_1, \ldots, x_m$.

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pokud označíme $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, vidíme, že vlastně hledáme řešení $\mathbf{c}$ soustavy

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.}$$

Pseudoinverzní matice XI - Aplikace - opakování

Obvykle je m podstatně větší než n. V optimálním případě se nám může podařit sestrojit funkci $f = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ přímo jako lineární kombinaci funkcí f_j tak, aby f v bodech x_i nabývala předem předepsané hodnoty y_i, tj.

$$\boxed{y_i = f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j.}$$

Pokud označíme $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, vidíme, že vlastně hledáme řešení $\mathbf{c}$ soustavy

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}.}$$

Tato soustava je v typickém případě neřešitelná.

Pseudoinverzní matice XII - Aplikace

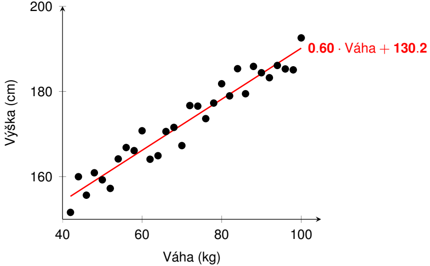
Uvažme následující úlohu: Předpokládejme, že mezi veličinami x a y je vztah

$$y = a + bx.$$

Naměříme hodnoty $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ pro $x_i \not x_j$, $i \neq j$. Chceme najít a a b tak, aby součet čtverců

$$(y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \cdots + (y_n - a - bx_n)^2$$

byl minimální.



Pseudoinverzní matice XIII - Aplikace

To vede k řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ tj.}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Pseudoinverzní matice XIV - Aplikace

Tedy $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ najdeme jako vektor (pseudořešení naší soustavy)

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}^{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Nutně $\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}$ je matice typu 2×2, která je invertibilní. Odtud

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla. Vezměme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (a + \mathrm{i}b) \cdot z$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

$$\boxed{a + \mathrm{i}b = r \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha),\ r \geq 0}.$$

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu z komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

Polární rozklad matice I

Motivace: Na polární rozklad matice se můžeme dívat jako na zobecnění exponenciálního tvaru komplexního čísla. Vezměme lineární zobrazení $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = (a + ib) \cdot z$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak $\boxed{a + ib = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha),\ r \geq 0}$.

Na tuto rovnost se můžeme dívat jako na vyjádření bodu z komplexní roviny v polárních souřadnicích. Odtud zřejmě název **polární rozklad**.

Matice typu 1×1 s prvkem $\cos\alpha + i \sin\alpha$ je vždy unitární, matice typu 1×1 s prvkem $r \in \mathbb{R}$ je samoadjungovaná, pro $r > 0$ pak pozitivně definitní. Totiž,

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)^* &= (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha - i\sin\alpha) \\ &= \cos 0 - i \sin 0 = 1 \\ r^* &= r.\end{aligned}$$

Polární rozklad matice II

Věta 2.8

Věta o polárním rozkladu matice *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice nad* $\mathbb{R}$ *nebo* $\mathbb{C}$*. Pak existuje samoadjungovaná* $(\mathbf{R} = \mathbf{R}^*)$ *pozitivně semidefinitní* $(\langle \mathbf{Rx}, \mathbf{x} \rangle \geq 0)$ *matice* $\mathbf{R}$ *a unitární matice* $\mathbf{U}$ *tak, že* $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}}$.

Navíc platí, že $\mathbf{R}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*$ *(píšeme* $\boxed{\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}}$*).*

Je-li $\mathbf{A}$ *invertibilní, je tento rozklad jednoznačný.*

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad I - opakování

Nechť $\mathbf{A}$ je invertibilní čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Tedy její sloupce $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1, \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory. Víme, že pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu můžeme najít ortogonální (a tedy nenulové) vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tak, že

$$
\boxed{
\begin{array}{lcl}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1 & = & \mathbf{u}_1 = R_{11}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2 & = & R_{12}\mathbf{u}_1 + R_{22}\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3 & = & R_{13}\mathbf{u}_1 + R_{23}\mathbf{u}_2 + R_{33}\mathbf{u}_3 \\
\vdots & = & \qquad\quad \vdots \\
\vdots & = & \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n & = & R_{1n}\mathbf{u}_1 + R_{2n}\mathbf{u}_2 + R_{33}\mathbf{u}_3 + \cdots + R_{nn}\mathbf{u}_n
\end{array}
}
$$

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad II - opakování

$$\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_1,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_2,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_3,\ldots,\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_n\right)=\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3,\ldots,\mathbf{u}_n\right)\cdot\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \ldots & R_{1n}\\ 0 & R_{22} & R_{23} & \ldots & R_{2n}\\ 0 & 0 & R_{33} & \ldots & R_{3n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & R_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$\underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|},\frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|},\frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|},\ldots,\frac{\mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}_n\|}\right)}_{\mathbf{Q}}\begin{pmatrix} (\|\mathbf{u}_1\|R_{11}) & (\|\mathbf{u}_2\|R_{12}) & (\|\mathbf{u}_3\|R_{13}) & \ldots & (\|\mathbf{u}_n\|R_{1n})\\ 0 & \|\mathbf{u}_2\|R_{22} & (\|\mathbf{u}_3\|R_{23}) & \ldots & (\|\mathbf{u}_n\|R_{2n})\\ 0 & 0 & (\|\mathbf{u}_2\|R_{33}) & \ldots & (\|\mathbf{u}_n\|R_{3n})\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (\|\mathbf{u}_n\|R_{nn})\end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ unitární nebo ortogonální matice, $\mathbf{R}$ horní trojúhelníková matice.

Gramův-Schmidtův OP a QR-rozklad III - opakování

Aplikace QR-rozkladu:

Platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{b}.$$

Poslední rovnice lze snadno spočítat bez použití Gaussovy eliminace, protože **R** je horní trojúhelníková matice.