

### 3. cvičení z LA II - bilineární a kvadratické formy, 2023

**Příklad 1.** Zjistěte, zda následující funkce jsou bilineární formy. Pokud ano, zjistěte zda jsou symetrické nebo antisymetrické, a napište matici této formy ve standardní bázi prostoru  $\mathbb{R}^2$  nebo  $\mathbb{R}_2[x]$ .

- $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - 5x_2$ ,
- $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2$ ,
- $h : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(p, q) = p(1)q(2) + 4p(3)^2q(4)$ ,
- $k : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(p, q) = p(1)q(2) + 4p(3)q'(8)$ .

Zde  $q'(8)$  značí derivaci polynomu  $q$  v čísle 8.

**Příklad 2.** K symetrické matici  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$  najděte diagonální matici  $D$  kongruentní s  $A$ . Současně najděte regulární matici  $P$  takovou, že  $D = P^T A P$ .

*Poznámka.* Matice  $P$  není určena jednoznačně.

**Příklad 3.** Symetrická bilineární forma  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  má v souřadnicích standardní báze vyjádření  $f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$ . ( $x$  a  $y$  jsou souřadnice vektorů  $u$  a  $v$  ve standardní bázi.) Najděte v  $\mathbb{R}^3$  nějakou její polární bázi, tj. bázi  $\beta$  v jejíž souřadnicích má  $f$  vyjádření  $f(u, v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$ . Toto vyjádření rovněž najděte. ( $\bar{x}$  a  $\bar{y}$  jsou souřadnice vektorů  $u$  a  $v$  v bázi  $\beta$ .)

*Poznámka.* Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.

**Příklad 4.** Kvadratická forma  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi  $\alpha = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ . Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi  $\beta$ , v jejíž souřadnicích je  $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$ , kde čísla  $b_{ii} = 0, 1$  nebo  $-1$ . Určete signaturu  $f$ .

**Příklad 5.** Uvažujme kvadratickou formu  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ . Pomocí definice napište matici její symetrické bilineární formy v bázi  $\alpha = ((1, 2), (3, -1))$ .

**Příklad 6.** Ve standardních souřadnicích napište nějakou kvadratickou formu  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , která je pozitivně definitní na podprostoru  $V$  a negativně definitní na podprostoru  $W$ , kde

$$V = [(1, 0, 2), (0, 1, 1)], \quad W = [(1, 1, 0)].$$

**Příklad 7.** Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na  $\mathbb{R}^3$ ? Pokud ano, napište pro ně Cauchyovu nerovnost.

- $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ ,

- b)  $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$ ,  
 c)  $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$ ,  
 d)  $f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$ .

**Příklad 8.** Pomocí skalárního součinu dokažte:

- (1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran.
- (2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.

### Úloha na další procvičení

**Příklad.** Kvadratická forma  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4.$$

Najděte nějakou bázi  $\beta$ , v jejíž souřadnicích je  $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2$ , kde čísla  $b_{ii} = 0, 1$  nebo  $-1$ .