

7. cvičení z LA II - Vlastní čísla a vektory, 2023

Příklad 1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru \mathbb{R}^3 , napište matici zobrazení φ v této bázi.

Příklad 2. Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru \mathbb{R}^3 , napište matici zobrazení ψ v této bázi.

Příklad 3. Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi α celého prostoru \mathbb{R}^4 a napište matici zobrazení φ v této bázi.

Příklad 4. Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad \mathbb{R} a které nad \mathbb{C} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Příklad 5. Zobrazení φ je symetrií prostoru \mathbb{R}^3 podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 1)$. Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Ax$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?

Příklad 6. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Bx$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?