

12. a 13. cvičení, Jordanův kanonický tvar, jaro 2023

Úlohy řešte postupně. Úloha 7 bude, resp. byla rychle udělána na 12. přednášce, ale spočítejte ji ještě jednou. Určitě udělejte příklad 8 na soustavu diferenciálních rovnic.

Příklad. 1. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}SP$.

Příklad. 2. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}TP$.

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}VP$.

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$.

Příklad. 5. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

Příklad 6. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}KR$.

Příklad 7. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}NP$.

Návod. Využijte toho, že charakteristický polynom je $(1 - \lambda)^4$. □

Příklad 8. Pomocí Jordanova kanonického tvaru najděte řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Návod. Matice $A = PJP^{-1}$, kde

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy je

$$x(t) = e^{3t} P \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

Další úlohy na procvičení

Příklad 1. [Kad'ourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 3]

Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici R takovou, že $J = R^{-1}CR$. Nápověda: Vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 2. [Kad'ourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 2]

Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}BQ$. Nápověda: Vlastní číslo 3 algebraické násobnosti 1 a vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 3.

Příklad. 3. [Kad'ourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 4]

Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici S takovou, že $J = S^{-1}DS$. Nápověda: Vlastní číslo -1 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 4. [Kad'ourek, Domácí úlohy ke cvičení 12, příklad 5]

Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici T takovou, že $J = T^{-1}FT$. Nápověda: Vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 4.

Příklad. 5. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$L = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}LP$.