7. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení φ v této bázi.

Malé opakování teorie: Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo lineárního zobrazení $\varphi : U \to U$, jestliže existuje vektor $u \in U$, $u \neq \vec{o}$, takový, že

$$\varphi(u) = \lambda u.$$

u se nazývá vlastní vektor. Výpočet λ: vezmeme matici $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ v nějaké bázi α, spočítáme charakteristický polynom

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right).$$

λ je vlastní číslo, právě když je kořenem tohoto polynomu.

Matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$, kde $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze $\mathbb{R}^3$. Charakteristický polynom je

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(5-\lambda)^2(4+\lambda) - 48 - 48 + 18(5-\lambda) + 8(4+\lambda) + 16(5-\lambda) =$$

$$= -(5-\lambda)^2(4+\lambda) - 26\lambda + 106 = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + 10\lambda^2 + 40\lambda - 25\lambda$$

$$- 100 - 26\lambda + 106 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

7. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení φ v této bázi.

Celočíselné kořeny musí dělit absolutní člen 6. Dělitelé jsou $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Vidíme, že 1 je kořen

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (1-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) =$$
$$= (1-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Vlastní vektor k $\lambda_1 = 1$ spočítáme řešením homogenní soustavy

$$(A - \lambda_1 E)\, x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Všechny vlastní vektory jsou nenulové násobky vektoru $u_1 = (1, 1, 2)$.

Analogicky spočítáme:

Vlastní vektory k $\lambda_2 = 2$ jsou násobky

$$u_2 = (1, 0, 1)$$

Vlastní vektory k $\lambda_3 = 3$ jsou nenulové násobky vektoru $u_3 = (1, 2, 2)$

(3)

Vezmeme bázi $\alpha = \left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{u_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{u_3} \right).$

Potom

$$\varphi(u_1) = 1 \cdot u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 u_2 + 0 u_3$$
$$\varphi(u_2) = 2 u_2 = 0 \cdot u_1 + 2 u_2 + 0 \cdot u_3$$
$$\varphi(u_3) = 3 u_3 = 0 u_1 + 0 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$$

Proto matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \; (\varphi(u_2))_\alpha \; (\varphi(u_3))_\alpha \right) =$$

souřadnice vektoru $\varphi(u_1)$ v bázi α

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4

Příklad. 2. Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení ψ v této bázi.

Charakteristický polynom je

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 + (1-\lambda) + (1-\lambda) - (3-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 - \lambda = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(3-\lambda)+1\big)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

ψ má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Vlastní vektory k $\lambda_1 = 1$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou nenulové násobky $u_1 = (1, 1, 1)$

Vlastní vektory k $\lambda_2 = 2$. Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5

Příklad. 2. Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení ψ v této bázi.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je $(t-s, s, t) = t(1,0,1) + s(-1,1,0)$

Vlastní podprostor k vlastnímu číslu 2, tj.

$$\{ x \in \mathbb{R}^3,\ \psi(x) = 2x \} = \ker(\psi - 2\,id)$$

má dimenzi 2 a je generován vektory $u_2 = (1,0,1)$ a $u_3 = (-1,1,0)$.

V bázi $\beta = (u_1, u_2, u_3)$ má ψ matici

$$(\psi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

neboť

$$\psi(u_1) = 1 \cdot u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$\psi(u_2) = 2 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 2 u_2 + 0 \cdot u_3$$

$$\psi(u_3) = 2 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3.$$

Příklad. 3. Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi α celého prostoru $\mathbb{R}^4$ a napište matici zobrazení φ v této bázi.

Spočítáme charakteristický polynom

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \{(3-\lambda)(1-\lambda)+1\} \cdot \{(5-\lambda)(-1-\lambda)+9\}$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda-2)^2 = (\lambda-2)^4$$

Operátor $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ má jediné vlastní číslo algebraické násobnosti 4. Alg. násobnost vlastního čísla je jeho násobnost coby kořene charakt. polynomu.

Vlastní vektory k vl. číslu $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

4. řádek − 3. řádek

Příklad. 3. Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi α celého prostoru $\mathbb{R}^4$ a napište matici zobrazení φ v této bázi.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je

$$(p-q,\, p-q,\, q,\, p) = p\underbrace{(1,1,0,1)}_{u_1} + q\underbrace{(-1,-1,1,0)}_{u_2}$$

Při výpočtu vlastních vektorů je dobré udělat vždy zkoušku. Matici vynásobíme vektory u_1 a u_2 a přesvědčíme se, že výsledek je $2u_1$ a $2u_2$.

Vlastní vektory netvoří v tomto případě bázi $\mathbb{R}^4$. Doplníme je na bázi pomocí vektorů $e_2 = (0,1,0,0)$ a $e_4 = (0,0,0,1)$. Přesvědčte se, že u_1, u_2, e_2, e_4 tvoří bázi!

$B = (u_1, u_2, e_2, e_4)$. Najdeme $(\varphi)_{B,B}$

$$\varphi(u_1) = 2u_1 = 2\cdot u_1 + 0\cdot u_2 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_4$$

$$\varphi(u_2) = 2u_2 = 0\cdot u_1 + 2\cdot u_2 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_4$$

$$\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -u_1 + 2e_2 = (-1)u_1 + 0\cdot u_2 + 2e_2 + 0\cdot e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -3u_1 - 3u_2 + 2e_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= -3u_1 - 3u_2 + 0 \cdot e_2 + 2e_4$$

Matici $(\varphi)_{B,B}$ dostaneme tak, že souřadnice vektorů $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_4)$ napíšeme do sloupců. Tedy

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9

Příklad. 4. Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad $\mathbb{R}$ a které nad $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Teorie: Matice A a D jsou podobné, jestliže existuje regulární matice P tak, že $A = P^{-1}DP$. Relace podobnosti matic je ekvivalence.

Platí: Matice A typu $n \times n$ nad $\mathbb{K}$ je podobná matici diagonální D, právě když existuje v $\mathbb{K}^n$ báze tvořená vlastními vektory lin. zobrazení $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definovaného pomocí matice A takto $\varphi(x) = Ax$.

Náznak důkazu: Nechť $n = 3$. Nechť v $\mathbb{K}^n$ existuje báze $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ tvořená vlastními vektory. Pak $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$, $\varphi(u_2) = \lambda_2 u_2$, $\varphi(u_3) = \lambda_3 u_3$ a proto

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Dále pro standardní bázi ε platí

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$$

neboť
$\varphi(e_1) =$ 1. sloupec matice A
$\varphi(e_2) =$ 2. sloupec matice A
$\varphi(e_3) =$ 3. sloupec matice A

Mezi $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ a $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$ je vztah

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \overset{P^{-1}}{\overset{\|}{(id)_{\alpha,\varepsilon}}}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}\,\overset{=P}{(id)_{\varepsilon,\alpha}}$$

kde $(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha}$, $(id)_{\varepsilon,\alpha}$, $(id)_{\alpha,\varepsilon}$ jsou matice přechodu. Proto

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

Tedy matice A je podobná diagonální matici s vlastními čísly na diagonále.

Zpět k příkladu: matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

má vlastní čísla

$\lambda_1 = 1$ s vlastním vektorem $u_1 = (-2, 1, 1)$

a $\lambda_2 = 2$ s vlastními vektory

$$a u_2 + b u_3$$

$$u_2 = (-1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 0)$$

Tedy báze tvořená vlastními vektory v $\mathbb{R}^3$ existuje, proto je A podobná diagonální matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11

Příklad. 4. Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad $\mathbb{R}$ a které nad $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Matice B má char. polynom

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$$

s celočíselným kořenem 1.

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$$

Kvadratický člen $\lambda^2 - 4\lambda + 13$ má kořeny

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 13}}{2} = 2 \pm 3i$$

Tedy B má vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$, $\lambda_3 = 2-3i$. Tedy nemůže existovat báze $\mathbb{R}^3$ tvořená vlastními vektory. Tedy B není nad $\mathbb{R}^3$ podobná matici diagonální. Definujeme-li $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$\varphi(x) = Bx$$

pak φ má ke každému vlastnímu číslu vlastní vektor v $\mathbb{C}^3$ (není potřeba je počítat). Teorie říká, že vlastní vektory ke různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé,

proto v $\mathbb{C}^3$ ~~[illegible]~~ vlastní vektory k vl. číslům $1,\ 2+3i,\ 2-3i$ tvoří bázi.
Tedy matice B je podobná nad $\mathbb{C}^3$ diagonální matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}.$$

Matice C má char. polynom $\lambda^2(1-\lambda)$.
Tedy vlastní čísla $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$.
Vlastní vektory k $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

rozdíl 3. a 2. řádku

Proto všechny vlastní vektory jsou násobky vektoru $u_1=(-7,3,2)$. Geometrická násobnost vlastního čísla $\lambda_1=0$ je $\dim\{x\in\mathbb{R}^3 \mid Cx=0\}=1$.
Rovněž geom. násobnost $\lambda_2=1$ musí být 1.
Tedy v $\mathbb{R}^3$ (ani v $\mathbb{C}^3$) neexistuje báze tvořená vl. vektory. C není podobná diag. matici.

(13)

Příklad. 5. Zobrazení φ je symetrií prostoru $\mathbb{R}^3$ podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,1)$. Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Ax$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?

Jestliže jsme schopni nalézt hodnoty zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na vektorech nějaké báze, tak matici A již určíme.

Vektor $u_1 = (1,1,1)$ leží na přímce podle které děláme symetrii. Musí se zobrazit do sebe

$$\varphi(u_1) = u_1$$

Vidíme, že u_1 je vlastní vektor k vl. číslu 1. Vezmeme nějaké dva vektory kolmé k ose symetrie. Např.

$$u_2 = (1,-1,0) \quad a \quad u_3 = (0,1,-1).$$

Oba se v symetrii podle přímky zobrazí do opačných vektorů. Tedy

$$\varphi(u_2) = -u_2, \quad \varphi(u_3) = -u_3.$$

Tedy u_2 a u_3 jsou lin. nezávislé vlastní vektory k vlastnímu číslu -1.

V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je matice φ rovna

14

Příklad. 5. Zobrazení φ je symetrií prostoru $\mathbb{R}^3$ podle přímky procházející počátkem se směrovým vektorem $(1,1,1)$. Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Ax$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

My chceme spočítat ale matice A, která je

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon},$$

tj. matici φ ve standardní bázi $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$.

Sloupce matice A jsou hodnoty $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$. Tyto vektory spočteme tak, že si napíšeme u_1, u_2, u_3 do řádků matice a za čáru si za u_i napíšeme $\varphi(u_i)$ a děláme řádkové úpravy

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & \varphi(u_1) \\ u_2 & \varphi(u_2) \\ u_3 & \varphi(u_3) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right)$$

provádíme úplnou Gaus. eliminaci

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} e_1 & \varphi(e_1) \\ e_2 & \varphi(e_2) \\ e_3 & \varphi(e_3) \end{array}\right)$$

Matici A dostaneme tak, že vektory $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$ a $\varphi(e_3)$ napíšeme do sloupců:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Zkouška</u>: Matici A vynásobíme souřadnicemi vektorů u_1, u_2, u_3.

Dostaneme

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Příklad. 6. Zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Bx$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?

Úlohu řešíme stejnou metodou jako předchozí úlohu. Vezmeme dva vektory v rovině, např. $u_1 = (1, 1, 0)$ a $u_2 = (0, 1, 1)$. Ty se při kolmé projekci zobrazí do sebe, tedy

$$\varphi(u_1) = u_1, \quad \varphi(u_2) = u_2.$$

Jsou to vlastní vektory k vlastnímu číslu 1. Vektor kolmý na rovinu $u_3 = (1, -1, 1)$ se při kolmé projekci zobrazí do nulového vektoru

$$\varphi(u_3) = \vec{o}.$$

Je to tedy vlastní vektor k vlastnímu číslu 0. V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ je matice φ rovna

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

K určení matice $B = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$ potřebujeme spočítat $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$. Buď tedy uděláme kolmé projekce vektorů e_1, e_2, e_3

Příklad. 6. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Napište předpis tohoto zobrazení v souřadnicích standardní báze ve tvaru $\varphi(x) = Bx$. Jaké má φ vlastní čísla a vektory?

do podprostoru $[u_1, u_2]$ tak, jak jsme to počítali v předchozím(cvičení 5, příklad 6) cvičení nebo upravujeme

$$\left(\begin{array}{c|c} u_1 & u_1 \\ u_2 & u_2 \\ u_3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Proto $$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zkouškou se přesvědčíme, že jsme počítali dobře.