9. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která je tvořena vlastními vektory operátoru φ. Napište podobnost mezi maticí A a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

Před samotným řešením příkladu připomeňme něco z teorie:

Je-li U vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ se skalárním součinem $\langle , \rangle : U \times U \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ a $\varphi : U \to U$ lin. operátor, pak tento operátor nazveme <u>samoadjungovaný</u>, jestliže

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

pro všechna $u, v \in U$. Je-li $U = \mathbb{R}^n$ a $\varphi(x) = Ax$, kde A je matice $n \times n$, pak φ je samoadjungovaný, právě když je matice A symetrická, tj. $A = A^T$.

Teorie nám říká, že

(1) vlastní čísla samoadjungovaných operátorů jsou vždy reálná,

(2) vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé,

(3) v U existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

9. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která je tvořena vlastními vektory operátoru φ. Napište podobnost mezi maticí A a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

Prvně najdeme vlastní čísla operátoru φ.

Char. polynom je

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda)$$

$$= (4-\lambda)^3 + 16 - 3\cdot 16 + 12\lambda \quad = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32$$

Celočíselné kořeny musí dělit absolutní člen 32. Po chvíli zkoušení zjistíme, že 2 je kořen. Dostaneme

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = (2-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 16) =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8)$$

Tedy vlastní čísla jsou

$\lambda_1 = 2$ alg. násobnosti 2

$\lambda_2 = 8$ alg. násobnosti 1

Najdeme vlastní vektory:

9. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která je tvořena vlastními vektory operátoru φ. Napište podobnost mezi maticí A a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

$\lambda_1 = 2$ Řešíme $(A-2E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $(a+b, -b, -a)$
$= a(1,0,-1) + b(1,-1,0)$

Geometrická násobnost je 2.

$\lambda_2 = 8$ Řešíme $(A-8E)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení je $(c, c, c) = c(1,1,1)$.

Vybereme z vlastních vektorů ortonormální bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$.

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

9. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která je tvořena vlastními vektory operátoru φ. Napište podobnost mezi maticí A a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

Platí $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$. Zde $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze. Dále

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

neboť $\varphi(u_1) = 2u_1 = 2u_1 + 0\cdot u_2 + 0\, u_3$, atd.

Vztah mezi $(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}$ a $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

Matice $P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$,

neboť ve sloupcích jsou souřadnice vektorů báze α ve standardní bázi ε. Protože jsou obě báze ortonormální, je matice P ortogonální. Proto $P^{-1} = P^T$.

Matice přechodu $(id)_{\alpha,\varepsilon}$ je

$$(id)_{\alpha,\varepsilon} = (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} = P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

9. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Uvažujme samoadjungovaný lineární operátor $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte vlastní čísla tohoto operátoru a ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$, která je tvořena vlastními vektory operátoru φ. Napište podobnost mezi maticí A a diagonální maticí s vlastními čísly na diagonále.

Tedy matice A a $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ jsou podobné:

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P$$

a současně kongruentní, neboť $P^{-1} = P^T$

$$A = P^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

6

Příklad. 2. Uvažujme kvadratickou formu f zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma f diagonální tvar. Ten rovněž napište.

Matice této kvadratické formy ve stand. bázi je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

To je stejná matice jako v předchozí úloze, kde definovala samoadjungovaný operátor. Mezi samoadjungovanými operátory $\varphi : U \to U$ a kvadratickými formami $f : U \to \mathbb{R}$ je bijekce definovaná vztahem

$$f(u) = \langle \varphi(u), u \rangle$$

Je-li $U = \mathbb{R}^n$ a $\varphi(x) = Ax$, je $A = A^T$

a $f(x) = \langle Ax, x \rangle = (Ax)^T \cdot x = x^T A^T x$

$= x^T A x$.

Tedy korespondence mezi samoadjungovanými operátory a kvadratickými formami je v případě $U = \mathbb{R}^n$ zprostředkována pomocí symetrické matice A.

Hledáme-li pro kvadratickou formu f ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích

7

Příklad. 2. Uvažujme kvadratickou formu f zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma f diagonální tvar. Ten rovněž napište.

je f diagonální, přejdeme nejdříve k příslušnému samoadjungovanému operátoru a najdeme ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory tohoto operátoru. V této bázi má f vyjádření

$$f(u) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla. Toto vyjádření odpovídá matici samoadjungovaného operátoru v nové ortonormální bázi. Tato matice je

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Z výše řečeného a z řešení 1. příkladu dostáváme řešení našeho příkladu. V bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$, kde $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ má kvadr. forma vyjádření

$$f(y) = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 8y_3^2.$$

(8)

Příklad. 3. Uvažujme kvadratickou formu g zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$g(x) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma g diagonální tvar. Ten rovněž napište.

Řešíme stejně jako předchozí příklad. Matice kvadratické formy g je

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \\ -2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

její charakteristický polynom je

$$\det(B - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 14-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & 14-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (17-\lambda)(14-\lambda)^2 - 16 - 16 - 4(14-\lambda) - 16(17-\lambda) - 4(14-\lambda)$$

$$= (17-\lambda)(\lambda^2 - 28\lambda + 196) - 26 \cdot 16 + 24\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 45\lambda^2 - (17 \cdot 28 + 14 \cdot 14)\lambda + 17 \cdot 14 \cdot 14 - 26 \cdot 16 + 24\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 24 \cdot 27\lambda + 2916 = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 648\lambda + 2^2 \cdot 3^6$$

Kořeny hledáme mezi děliteli čísla $2916 = 2^2 3^6$. Ta je pracné. Jeden kořen je 9. Tedy

$$-\lambda^3 + 45\lambda^2 - 648\lambda + 2916 = (9-\lambda)(\lambda^2 - 36\lambda + 324)$$

$$= (9-\lambda)(\lambda - 18)^2$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 9$ alg. násobnosti 1 a $\lambda_2 = 18$ alg. násobnosti 2.

(9)

Příklad. 3. Uvažujme kvadratickou formu g zadanou v souřadnicích standardní báze takto

$$g(x) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Najděte ortonormální bázi, v jejíž souřadnicích má kvadratická forma g diagonální tvar. Ten rovněž napište.

Najdeme vlastní vektory k $\lambda_2 = 18$. Řešíme $(B - 18E)\,x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení jsou vektory kolmé k vektoru $(-1, 2, -2)$. Zvolme dva ortogonální

$v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (4, 1, -1)$

Přesvědčíme se, že vektor $v_1 = (-1, 2, -2)$ je vlastní vektor pro vlastní číslo $\lambda_1 = 9$. Hledaná ortonormální báze je tedy $B = (u_1, u_2, u_3)$, kde $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}(4, 1, -1)$, $u_3 = \frac{1}{3}(-1, 2, -2)$.

V této bázi je

$$g(y) = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2.$$

Příklad. 4. V souřadnicích standardní báze napište matici kolmé projekce $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na rovinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ukažte, že P je samoadjungovaný operátor.

Úlohu lze řešit několika způsoby:

1. Spočteme P na třech vhodných vektorech: vektory $u_1 = (1, -1, 0)$ a $u_2 = (0, 1, -1)$ leží v dané rovině, proto

$$P(u_1) = u_1, \quad P(u_2) = u_2.$$

Hodnota P na normálovém vektoru $u_3 = (1, 1, 1)$ je $P(u_3) = 0$.
Z těchto údajů spočítáme $P(e_1), P(e_2), P(e_3)$ a tyto tři vektory tvoří sloupce hledané matice A takové, že

$$P(x) = Ax.$$

Podobný výpočet jsme již dělali.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & -1, & 0 & 1, & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} u & P(u) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

Hledaná matice A je

Příklad. 4. V souřadnicích standardní báze napište matici kolmé projekce $P:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na rovinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ukažte, že P je samoadjungovaný operátor.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_3) \\ \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - x_3) \\ \frac{1}{3}(-x_1 - x_2 + 2x_3) \end{pmatrix}.$$

2) Spočítáme kolmé projekce vektorů e_1, e_2, e_3 do podprostoru $[u_1, u_2]$.

3) Spočítáme kolmou projekci vektoru $x = (x_1, x_2, x_3)$ do podprostoru $[u_1, u_2]^\perp = [u_3 = (1,1,1)]$. Označme ji $Q(x)$

$$Q(x) = \frac{\langle x, u_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} u_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix}$$

Potom

$$P(x) = x - Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3 - \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 - x_3) \\ \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 - x_3) \\ \frac{1}{3}(-x_1 - x_2 + 2x_3) \end{pmatrix}$$

Příklad. 4. V souřadnicích standardní báze napište matici kolmé projekce $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na rovinu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ukažte, že P je samoadjungovaný operátor.

Z maticového vyjádření ve standardních souřadnicích vidíme, že

$$P(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Příslušná matice je symetrická, proto je P samoadjungovaný operátor.