1

11. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

nemá řešení. Najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Přesvědčíme se, že soustava skutečně nemá řešení. Matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

V soustavě $Ax = b$ je $3 = h(A) < h(A|b) = 4$.

Nejlepší aproximace řešení je $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ takové, že

$$\|Ax - b\|^2$$

je minimální. Z teorie bychom měli vědět, že

(1) Ax je kolmá projekce vektoru $b \in \mathbb{R}^4$ do podprostoru $\{y \in \mathbb{R}^4;\ \exists z \in \mathbb{R}^3, y = Az\}$ $= \operatorname{im} A$

(2)

Příklad. 1. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

nemá řešení. Najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

(2) Je-li $A^{(-1)}$ pseudoinverzní matice k A, pak $A \cdot A^{(-1)}$ je matice kolmé projekce do $\operatorname{im} A$. Tedy kolmá projekce b do $\operatorname{im} A$ je

$$A \cdot A^{(-1)} b$$

Tedy $x = A^{(-1)} b$ je určitě nejlepší aproximace. Všechny nejlepší aproximace pak jsou

$$x + y, \text{ kde } Ay = 0.$$

V našem případě je však $\{y \in \mathbb{R}^3;\ Ay = 0\} = \{0\}$.

<u>Závěr</u>: Nejlepší aproximaci dostaneme jako

$$A^{(-1)} b.$$

Pseudoinverzní matici spočítáme takto:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad. 1. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

nemá řešení. Najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Vzhledem k tomu, že $\det(A^TA) = 30$, můžeme spočítat inverzi. To uděláme pomocí algebraických doplňků (v tomto případě je to rychlejší než provádět úplnou Gaussovu eliminaci)

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Pseudoinverze je

$$A^{(-1)} = (A^TA)^{-1} \cdot A^T = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 11 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 & 13 & 4 & -8 \\ 9 & -7 & 14 & 2 \\ -3 & 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Zkoušku uděláme tak, že vynásobíme $A^{(-1)}A$. Měli bychom dostat jednotkovou matici 3×3.

4

Příklad. 1. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

nemá řešení. Najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Nejlepší aproximace řešení je tedy

$$X = A^{(-1)} b = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 9 & 13 & 4 & -8 \\ 9 & -7 & 14 & 2 \\ -3 & 9 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 38 \\ 28 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5

Příklad. 2. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$$

byl minimální.

Pokud by všechny 4 body ležely v přímce, platilo by $px_i + q = y_i$ pro všechna $i = 1, 2, 3, 4$. Tj:

$$\begin{aligned} -p + q &= 1 \\ q &= 0 \\ p + q &= 1 \\ 2p + q &= 3 \end{aligned}$$

Maticově

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Součet

$$\sum_{i=1}^{4} (px_i + q - y_i)^2 = (-p+q-1)^2 + (q-0)^2 + (p+q-1)^2$$

$$+ (2p+q-3)^2 = \left\| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

Příklad. 2. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$$

byl minimální.

Tedy hledané koeficienty p, q jsou nejlepší aproximací řešení soustavy (*)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Postupujeme jako v předchozí úloze, spočítáme pseudoinverzní matici $A^{(-1)}$.

$$A^T A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{(-1)} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hledané koeficienty jsou

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = A^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/10 \\ 9/10 \end{pmatrix}$$

Příklad. 2. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

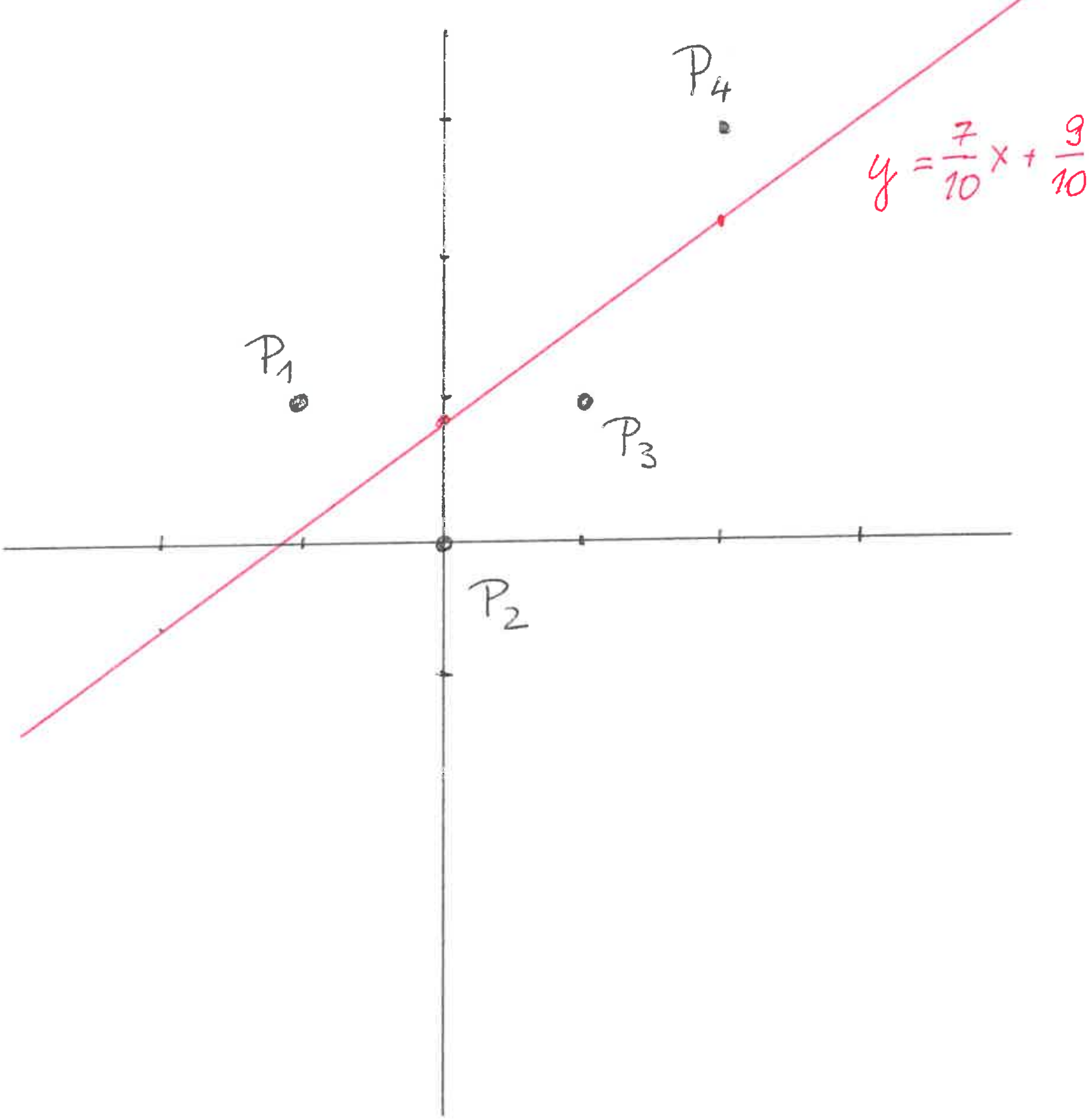
Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$$

byl minimální.

Obrázek:

Přímka je $y = \frac{7}{10}x + \frac{9}{10}$



(8)

Příklad. 3. Uvažujme v rovině stejné 4 body jako v předchozí úloze:

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte parabolu $y = px^2 + qx + r$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} \left(y_i - (px_i^2 + qx_i + r)\right)^2$$

byl minimální.

Kdyby všechny body ležely na parabole, platila by pro koeficienty p, q, r soustava rovnic

$$\begin{aligned} p - q + r &= 1 \\ r &= 0 \\ p + q + r &= 1 \\ 4p + 2q + r &= 3 \end{aligned} \qquad (p x_i^2 + q x_i + r = y_i)$$

Tedy hledané koeficienty pak opět nejlepší aproximaci řešení této soustavy. Vezmeme proto matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a hledáme její pseudoinverzi.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklad. 3. Uvažujme v rovině stejné 4 body jako v předchozí úloze:

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte parabolu $y = px^2 + qx + r$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} \big(y_i - (px_i^2 + qx_i + r)\big)^2$$

byl minimální.

$$\det A^T A = 2^3 \det \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 8 \cdot 10 = 80$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -5 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^{(-1)} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ -5 & 9 & 3 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 & 5 \\ -11 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $A^{(-1)} A = E$

Hledané koeficienty jsou

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = A^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 & 5 \\ -11 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 11 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{20} \\ -\frac{1}{20} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}$$

10

Příklad. 3. Uvažujme v rovině stejné 4 body jako v předchozí úloze:

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte parabolu $y = px^2 + qx + r$ tak, aby součet čtverců

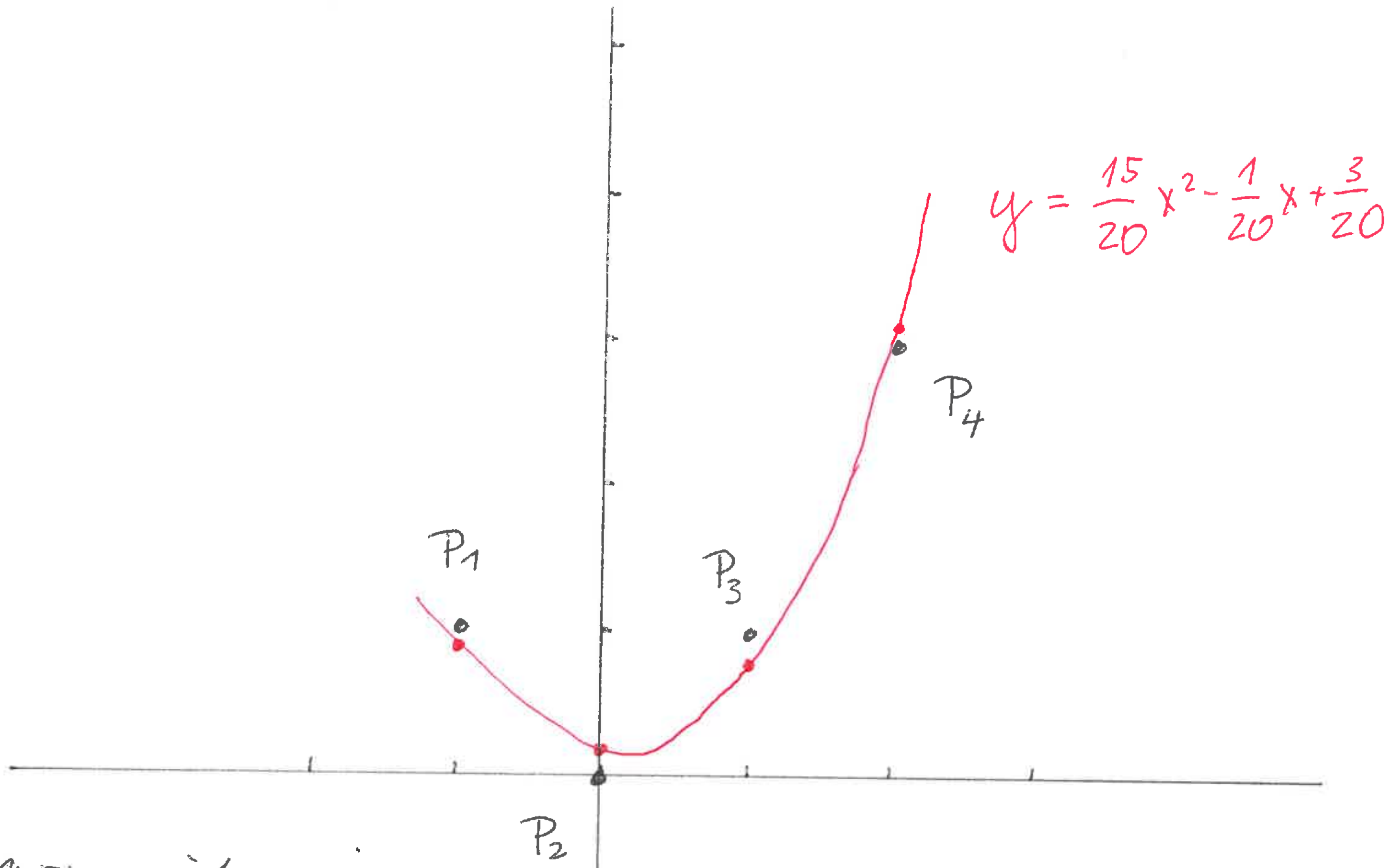
$$\sum_{i=1}^{4} \left(y_i - (px_i^2 + qx_i + r)\right)^2$$

byl minimální.

Nejlepší aproximace je parabola

$$y = \frac{15}{20}x^2 - \frac{1}{20}x + \frac{3}{20}.$$

Obrázek:



x	-1	0	1	2
y	$\frac{19}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{17}{20}$	$\frac{61}{20}$

Všimněte si, že tato aproximace je daleko lepší než „naivní" aproximace $y = x^2$!