1. cvičení z lineární algebry II - afinní geometrie, 2024

Příklad. 1. Zopakujte si definici afinního podprostoru ve vektorovém prostoru jako součtu bodu a vektorového podprostoru. Ze znalosti vektorových podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ popište všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Ukažte, že každý afinní podprostor s každými dvěma body A a B obsahuje i jejich afinní kombinaci

$$tA + (1-t)B.$$

U vekt. prostor

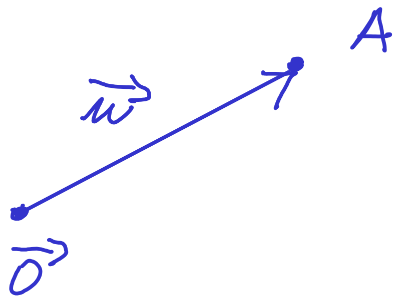
$M \subseteq U$ afinní podprostor, jestliže

$M = \{A + v \in U \,;\, v \in V\} = A + V$

kde $A \in U$ a V je vektorový podprostor v U.

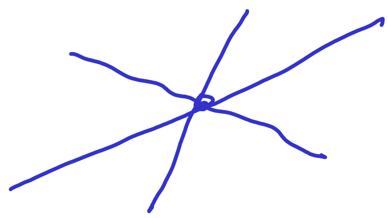
$V = Z(M)$ zaměření af. podprostoru

Prvky prostoru U nazýváme někdy vektory někdy body



Vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou

- počátek $\{\vec{o}\}$
- přímky proch. počátkem
- celé $\mathbb{R}^2$



Afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou

- všechny body $A + \{\vec{o}\} = A$
- všechny přímky $A + \{t\vec{v}\} = \{A + t\vec{v}\}$
- celé $\mathbb{R}^2$

Afinní podprostory v $\mathbb{R}^3$

- všechny body
- všechny přímky
- všechny roviny
- celé $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{M}$ afinní podprostor $\quad \mathcal{M} = M + \mathcal{V}$

$A = M + u \quad , \quad B = M + v \quad , \quad u, v \in \mathcal{V}$

$$tA + (1-t)B = t(M+u) + (1-t)(M+v) =$$

$$= \underline{tM} + tu + \underline{(1-t)M} + (1-t)v$$

$$= M + tu + (1-t)v \in M + \mathcal{V}$$

Příklad. 2. Rozhodněte, které z podmnožin jsou afinní podprostory. Pokud jsou, najděte jejich zaměření a dimenzi.

(1) $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 = x^3 + 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
(2) $\mathcal{N} = \{p \in \mathbb{R}_5[x];\ p(2) + p(3) = 5, p'(20) = 21\} \subset \mathbb{R}_5[x]$.
(3) $\mathcal{P} = \{C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R});\ \mathrm{h}(C) \leq 2\} \subset \mathrm{Mat}_{3\times 3}$.

K důkazu, že nejde o afinní podprostor lze využít charakterizaci afinního podprostoru jako podmnožiny obsahující s každými dvěma různými body i přímku, která jimi prochází.

(1) $A = [0,1] \in \mathcal{M}$, $B = [-1,0] \in \mathcal{M}$

$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \notin \mathcal{M}$ neboť $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1$

Tedy $\mathcal{M}$ není afinní podprostor.

(2) Ukážeme, že $\mathcal{N}$ je afinní podprostor.
Najdeme nějaký polynom ležící v $\mathcal{N}$.
Hledáme ho ve tvaru

$$p(x) = ax + b$$

Koeficienty musí splňovat

$$p(2) + p(3) = a \cdot 2 + b + a \cdot 3 + b = 5$$

$$p'(20) = a = 21$$

Volíme tedy $a = 21$ a $b = -50$.

Množina

$$V = \{q \in \mathbb{R}_5[x];\ q(2) + q(3) = 0,\ q'(20) = 0\}$$

je vektorový podprostor. Ukážeme, že

$$p + V = \mathcal{N}$$

Je-li $q \in V$, pak $p + q$ splňuje rovnice pro $\mathcal{N}$.

Je-li naopak $r \in \mathcal{N}$, pak

$$r = p + (r - p)$$

a $(r-p)$ splňuje rovnice pro V.

(3) $P = \{ A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ h(A) \leq 2 \}$

není afinní podprostor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 2$, $h(B) = 1$ a proto $A, B \in P$

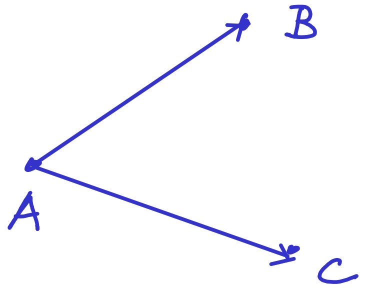
avšak

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

má hodnost 3 a není v P.

Příklad. 3. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathbb{R}^4$, který obsahuje body

$$A = [5, 2, 1, 0], \quad B = [4, 1, 0, 0], \quad C = [-3, 1, 0, 1].$$



Parametrický popis je

$$X = A + t(B-A) + s(C-A)$$

$$X = [5, 2, 2, 0] + t(-1,-1,-1,0) + s(-8,-1,-1,1)$$

V souřadnicích

$$x_1 = 5 - t - 8s$$
$$x_2 = 2 - t - s$$
$$x_3 = 1 - t - s$$
$$x_4 = s$$

$$E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 7 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Dané rovnice

$$x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - x_3 + 7x_4 = 4$$

Přesvědčte se, že body A, B, C je splňují.

To je popis afinního podprostoru pomocí soustavy rovnic (implicitní popis).

Příklad. 4. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{M} : [2,3,4,3,6] + a(1,1,1,-1,1) + b(0,0,1,0,1)$$
$$\mathcal{N} : [2,2,4,4,6] + c(1,0,0,0,1) + d(0,0,1,0,0) + e(2,1,1,-1,1).$$

$\mathcal{M}: \quad X = A + a u_1 + b u_2$

$\mathcal{N}: \quad Y = B + c v_1 + d v_2 + e v_3$

Pro výpočet $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ X = A + a u_1 + b u_2 = B + c v_1 + d v_2 + e v_3 \}$

řešíme rovnici

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 - a u_1 - b u_2 = A - B$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Řešení je b libovolné, $a = -1$. Proto

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{ A - u_1 + b u_2 \} = [1,2,3,4,5] - b(0,0,1,0,1)$

je přímka.

Spojení afinních podprostorů

$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}$ je nejmenší afinní podprostor obsahující $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.

$C = [1,2,3,4,5] \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, proto

$\mathcal{M} = C + Z(\mathcal{M}) \qquad \mathcal{N} = C + Z(\mathcal{N})$,

a tedy $\qquad \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} = C + Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

$Z(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{N}) = Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}) = [v_1, v_2, v_3, u_1]$

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu rovin

$$\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$$
$$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2.$$

Vzájemná poloha afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$

1. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ nebo $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$
2. nenastane 1
   $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou <u>různoběžné</u>

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$

3. $Z(\mathcal{M}) \subseteq Z(\mathcal{N})$ nebo $Z(\mathcal{N}) \subseteq Z(\mathcal{M})$
   $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou <u>rovnoběžné</u>
4. nenastane 3, ale $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) \neq \{\vec{o}\}$
   $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou částečně rovnoběžné
5. $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N}) = \{\vec{o}\}$
   $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou mimoběžné

Průnik $\pi \cap \rho$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Soustava má jediné řešení. Tedy

$\pi \cap \rho$ = jediný bod, a proto jsou π a ρ různoběžné.

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho: \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p : [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q : [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r : [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

(a) $\rho : \ M + s u + t v$

$p : \ A + a z$

Počítáme průnik $\rho \cap p$ $\qquad M + su + tv = A + az$

$su + tv - az = A - M$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Soustava má právě jedno řešení

$\rho \cap p$ = jediný bod

Proto jsou ρ a p <u>různoběžné.</u>

(b) $q : \ B + b z$

$\rho \cap q$ řešením soustavy $\qquad su + tv - bz = B - M$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Evidentně nemá řešení, tedy $p \cap q = \emptyset$.
Soustava pro $Z(p) \cap Z(q)$ dává homogenní soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

řešením je 1-dim podprostor.
Protože $\dim Z(p) = 2$, $\dim Z(q) = 1$ a $\dim Z(p) \cap Z(q) = 1$, je

$$Z(p) \cap Z(q) = Z(q)$$

tedy $Z(q) \subset Z(p)$,
p a q jsou <u>rovnoběžné</u>

(c) $r: C + cz$
Rovnice pro výpočet $p \cap r$ je $su + tv - cz = C - M$
Matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

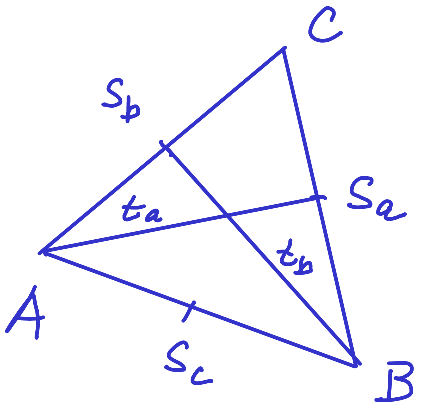
Proto $p \cap r = \emptyset$. Pro $Z(p) \cap Z(r)$ dostaneme soustavu s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tedy jediné, a to triviální řešení.
Proto $Z(p) \cap Z(r) = \{o\}$

a p a r jsou <u>mimoběžné</u>

Příklad. 7. Pomocí afinních kombinací dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.



$$S_a = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$$

$$S_b = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$$

těžnice na stranu a je

$$t_a : (1-t)A + tS_a =$$
$$= (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C$$

Těžnice na stranu b je

$$t_b : (1-s)B + sS_b = \frac{s}{2}A + (1-s)B + \frac{s}{2}C$$

$T = t_a \cap t_b$ splňuje

$$T = (1-t)A + \frac{t}{2}B + \frac{t}{2}C = \frac{s}{2}A + (1-s)B + \frac{s}{2}C$$

Odtud

$$1-t = \frac{s}{2}$$
$$\frac{t}{2} = 1-s$$
$$\frac{t}{2} = \frac{s}{2} \implies t = s$$
$$1-t = \frac{t}{2} \implies t = \frac{2}{3} = s$$

Proto

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Tento bod leží i na těžnici na stranu c

$$t_c : \frac{p}{2}A + \frac{p}{2}B + (1-p)C$$

Proto se těžnice protínají v jednom bodě.