1. cvičení z lineární algebry II - afinní geometrie, 2024

Příklad. 1. Zopakujte si definici afinního podprostoru ve vektorovém prostoru jako součtu bodu a vektorového podprostoru. Ze znalosti vektorových podprostorů v $\mathbb{R}^2$ a v $\mathbb{R}^3$ popište všechny afinní podprostory v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$. Ukažte, že každý afinní podprostor s každými dvěma body A a B obsahuje i jejich afinní kombinaci

$$tA + (1-t)B.$$

Příklad. 2. Rozhodněte, které z podmnožin jsou afinní podprostory. Pokud jsou, najděte jejich zaměření a dimenzi.

(1) $\mathcal{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 = x^3 + 1\} \subset \mathbb{R}^2$.
(2) $\mathcal{N} = \{p \in \mathbb{R}_5[x];\ p(2) + p(3) = 5, p'(20) = 21\} \subset \mathbb{R}_5[x]$.
(3) $\mathcal{P} = \{C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R});\ \mathrm{h}(C) \leq 2\} \subset \mathrm{Mat}_{3\times 3}$.

K důkazu, že nejde o afinní podprostor lze využít charakterizaci afinního podprostoru jako podmnožiny obsahující s každými dvěma různými body i přímku, která jimi prochází.

Příklad. 3. Napište nejdříve parametrický a potom implicitní popis nejmenšího afinního podprostoru v $\mathbb{R}^4$, který obsahuje body

$$A = [5,2,1,0], \quad B = [4,1,0,0], \quad C = [-3,1,0,1].$$

Příklad. 4. Najděte průnik a spojení afinním podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ v $\mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{M} : [2,3,4,3,6] + a(1,1,1,-1,1) + b(0,0,1,0,1)$$
$$\mathcal{N} : [2,2,4,4,6] + c(1,0,0,0,1) + d(0,0,1,0,0) + e(2,1,1,-1,1).$$

Příklad. 5. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu rovin

$$\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \quad 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$$
$$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = -2.$$

Příklad. 6. V $\mathbb{R}^4$ určete vzájemnou polohu roviny

$$\rho : \ [3,-1,0,0] + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$$

a přímek p, q a r, které mají parametrická vyjádření

a) $p : [7,4,2,3] + a(5,-2,-3,1)$,
b) $q : [1,2,3,4] + b(1,5,3,2)$,
c) $r : [1,2,3,4] + c(1,1,1,1)$.

Příklad. 7. Pomocí afinních kombinací dokažte, že se těžnice v trojúhelníku ABC protínají v jediném bodě.