4. cvičení z LA II - bilineární a kvadratické formy, 2024

Příklad. 1. K symetrické matici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte diagonální matici D kongruentní s A. Současně najděte regulární matici P takovou, že $D = P^T AP$.

Poznámka. Matice P není určena jednoznačně.

Příklad. 2. Symetrická bilineární forma $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má v souřadnicích standardní báze vyjádření $f(u, v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 3x_3y_1$. ($x$ a y jsou souřadnice vektorů u a v ve standardní bázi.) Najděte v $\mathbb{R}^3$ nějakou její polární bázi, tj. bázi β v jejíž souřadnicích má f vyjádření $f(u, v) = b_{11}\bar{x}_1\bar{y}_1 + b_{22}\bar{x}_2\bar{y}_2 + b_{33}\bar{x}_3\bar{y}_3$. Toto vyjádření rovněž najděte. ($\bar{x}$ a $\bar{y}$ jsou souřadnice vektorů u a v v bázi β.)

Poznámka. Polární báze není určena jednoznačně. Jednoznačně je určen pouze počet kladných a záporných koeficientů v zápisu bilineární formy v souřadnicích polární báze.

Příklad. 3. Uvažujme kvadratickou formu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Pomocí definice napište matici její symetrické bilineární formy v bázi $\alpha = ((1, 2), (3, -1))$.

Příklad. 4. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2.$$

Najděte její vyjádření v bázi $\alpha = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Dále najděte nějakou její polární bázi, tj. bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1. Určete signaturu f.

Příklad. 5. Ve standardních souřadnicích napište nějakou kvadratickou formu $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, která je pozitivně definitní na podprostoru V a negativně definitní na podprostoru W, kde

$$V = [(1, 0, 2), (0, 1, 1)], \quad W = [(1, 1, 0)].$$

Příklad. 6. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? (Postup: napište pro ně příslušné kvadratické formy a pomocí Sylvestrova kriteria zjistěte, zda jsou pozitivně definitní.) Pokud ano, napište pro ně Cauchyovu nerovnost.

a) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Příklad. 8. Pomocí skalárního součinu dokažte:

(1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran.
(2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.

Úloha na další procvičení

Příklad. Kvadratická forma $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ má ve standardní bázi vyjádření

$$f(u) = 2x_1x_2 + 8x_1x_3 - 2x_2x_3 - 8x_2x_4 + 8x_3x_4.$$

Najděte nějakou bázi β, v jejíž souřadnicích je $f(u) = b_{11}\bar{x}_1^2 + b_{22}\bar{x}_2^2 + b_{33}\bar{x}_3^2 + b_{44}\bar{x}_4^2$, kde čísla $b_{ii} = 0$, 1 nebo -1.