5. cvičení z LA II - skalární součin, 2024

Příklad. 1. Definují následující symetrické bilineární formy skalární součin na $\mathbb{R}^3$? Pokud ano, napište pro ně Cauchyovu nerovnost.

a) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
b) $f(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$,
c) $f(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 4x_2y_3 + 4x_3y_2$,
d) $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

Příklad. 2. Pomocí skalárního součinu dokažte:

(1) V rovnoběžníku je součet druhých mocnin uhlopříček roven součtu druhých mocnin všech stran.
(2) Rovnoběžník je kosočtverec, právě když jsou jeho uhlopříčky na sebe kolmé.

Příklad. 3. Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$S = [(1,2,-1,3,1),\ (5,2,-1,7,1),\ (2,-1,2,-4,-2)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem. Použijte k tomu prvně Gram-mův-Schmidtův ortogonalizační proces a potom získané vektory ortogonální báze vynormujte (tj. vydělte normou, abyste získali vektory jednotkové velikosti).

Příklad. 4. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ortogonální doplněk podprostoru

$$V = [(1,2,-1,-3,3),\ (1,-2,3,1,-1)]\,.$$

Příklad. 5. Spočtěte kolmou projekci vektoru $u = (2,11,-3,-4,7)$ do podprostoru V a jeho ortogonálního doplňku $V^\perp$ z předchozího příkladu.

Příklad. 6. Uvažujme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem a nadrovinu ρ

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Pomocí skalárního součinu napište předpis lineárního zobrazení $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je kolmou projekcí do nadroviny ρ. (Předpokládáme, že $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0,0,\ldots,0)$.)

Příklad. 7. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na rovinu

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad. 8. V $\mathbb{R}^4$ spočítejte vzdálenost bodu $A = [3, 3, 1, 5]$ od roviny

$$\rho: \ x_1 - x_3 = -2, \quad x_2 + x_4 = 6.$$

Navíc najděte bod $R \in \rho$ takový, že $\mathrm{dist}(A, \rho) = ||A - R||$.
Řešení. $R = [1, 2, 3, 4]$, $\mathrm{dist}(A, \rho) = \sqrt{10}$. □

Příklad. 9. V $\mathbb{R}^4$ určete vzdálenost bodu $A = [4, 1, -4, -5]$ od roviny

$$\rho: \ [3, -2, 1, 5] + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2).$$

Současně najděte bod $M \in \rho$ takový, že $||M - A|| = \mathrm{dist}(A, \rho)$.

Další příklady na procvičení

Příklad. 1. Najděte ortonormální bázi podrostoru

$$V = [(1, 1, 3, 3, 4),\ (1, 3, -5, -7, -1),\ (1, -1, 5, 7, -3)] \subset \mathbb{R}^5,$$

jestliže prostor $\mathbb{R}^5$ bereme se standardním skalárním součinem.

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte kolmou projekci vektoru $u = (1, 2, 3, 4, 5)$ do vektorových podprostorů

$$V = [(3, 3, 2, 1, 3),\ (5, 1, 4, -1, 1)]$$
$$W = [(1, -3, 4, -2, 2),\ (1, 5, -8, -2, 4),\ (1, -9, 16, 4, -4)]$$

Ve druhém případě spočtěte prvně ortogonální doplněk $W^{\perp}$ a kolmou projekci vektoru u do $W^{\perp}$.

Příklad. 3. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je kolmá projekce na přímku p procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Najděte matici B tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Bx = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$