7. cvičení z LA II - eukleidovská geometrie II, vlastní čísla a vektory, 2024

Příklad. 1. Určete odchylku přímky $p:\ [1,2,3,4]+t(-3,15,1,-5)$ od roviny

$$\rho:\ [0,0,0,0]+r(1,-5,-2,10)+s(1,8,-2,-16).$$

Příklad. 2. V $\mathbb{R}^4$ určete odchylku rovin τ a σ.

$$\sigma : [2,1,0,1]+s(1,1,1,1)+t(1,-1,1-1),$$
$$\tau : [1,0,1,1]+p(2,2,1,0)+q(1,-2,2,0).$$

Příklad. 3. V $\mathbb{R}^5$ spočítejte odchylku roviny ρ a nadroviny Γ.

$$\rho : s(1,-1,1,1,3)+t(1,-3,-3,-3,-9),$$
$$\Gamma : x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0.$$

Příklad. 4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního zobrazení

$$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \varphi(x)=\begin{pmatrix}5&2&-3\\4&5&-4\\6&4&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení φ v této bázi.

Řešení. Charakteristický polynom je $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=(1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$, vlastní vektory postupně pro vlastní čísla $1,2,3$ jsou $u_1=(1,1,2)$, $u_2=(1,0,1)$, $u_3=(1,2,2)$. □

Příklad. 5. Najděte vlastní čísla a vlastní podprostory lineárního zobrazení

$$\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \psi(x)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Pokud lze z vlastních vektorů sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^3$, napište matici zobrazení ψ v této bázi.

Řešení. Charakteristický polynom je $(1-\lambda)(\lambda-2)^2$, vlastní vektory: pro vlastní číslo 1 je $u_1=(1,1,1)$, pro vlastní číslo 2 jsou $u_2=(1,0,1)$ a $u_3=(-1,1,0)$. □

Příklad. 6. Najděte vlastní čísla a jejich algebraickou a geometrickou násobnost u lineárního zobrazení

$$\varphi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\quad \varphi(x)=\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&5&-3\\4&-1&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

Bázi vlastních podprostorů doplňte na bázi α celého prostoru $\mathbb{R}^4$ a napište matici zobrazení φ v této bázi.

Řešení. Charakteristický polynom je $(\lambda-2)^4$, vlastní vektory jsou au_1+bu_2, $u_1=(1,1,0,1)$, $u_2=(-1,-1,1,0)$. □

Příklad. 7. Pomocí vlastních čísel a vektorů zjistěte, které z následujících matic jsou podobné diagonální matici nad $\mathbb{R}$ a které nad $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Řešení. A: Charakteristický polynom je $(1-\lambda)(\lambda-2)^2$, vlastní vektory k vlastním číslům $1, 2$ jsou postuponě $u_1 = (-2, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 0)$. Je podobná diagonální matici nad $\mathbb{R}$.

B: Charakteristický polynom je $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$. Vlastní čísla $1, 2 \pm 3i$. Podobná diagonální matici nad $\mathbb{C}$, ale nikoliv nad $\mathbb{R}$.

C: Charakteristický polynom je $\lambda^2(1-\lambda)$. K vlastnímu číslu 0 pouze jednorozměrný vlastní podprostor $[(-7, 3, 2)]$. Není podobná diagonální matici nad $\mathbb{R}$ ani nad $\mathbb{C}$. $\square$