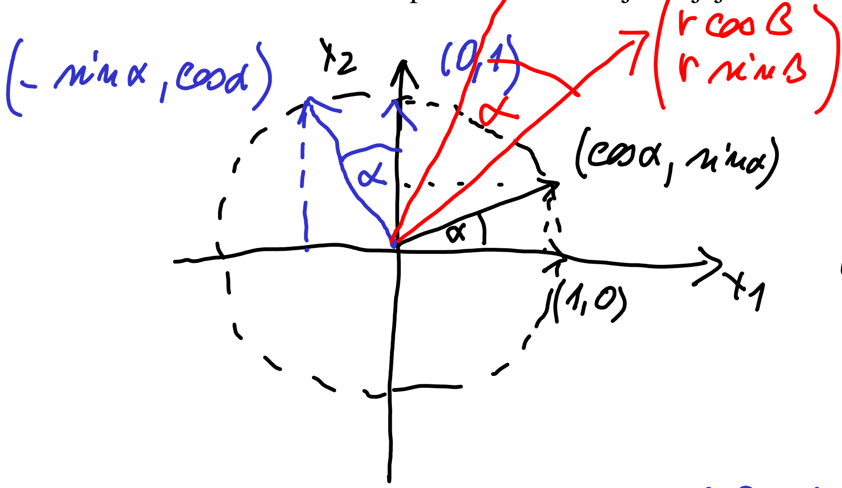
8. cvičení z lineární algebry II

Příklad. 1. Lineární zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

je otočení o úhel α proti směru hodinových ručiček. Přesvědčte se o tom tím, že zobrazíte vektory $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}r\cos\beta\\ r\sin\beta\end{pmatrix}$. $\to \varphi\begin{pmatrix}r\cos\beta\\ r\sin\beta\end{pmatrix}$

Ukažte podle definice, že je to ortonormální operátor. Spočtěte determinant příslušné matice a v oboru komplexních čísel najděte její vlastní čísla.



$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$\varphi(e_1)$ je otočení e_1 o úhel α proti směru hod. ručiček

$\varphi(e_2)$ $$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

je otočení e_2 o úhel α proti směru hod. ručiček

φ je určeno dvěma hodnotami určeno jednoznačně

Otočení o úhel α kolem počátku proti směru hod. ručiček je také lin. zobrazení $= \varphi$ na vektorech báze e_1, e_2.

Tedy $\varphi =$ otočení o úhel α kolem počátku proti směru hod. ručiček na všechny vektory.

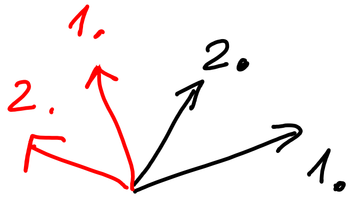
$$\varphi\begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= r\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$



Zobrazení zachovává orientaci

det matice > 0

Matice je ortogonální.

Char. polynom

$$\det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos - \lambda)^2 + \sin^2\alpha$$

$$= \underline{\cos^2\alpha} - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \underline{\sin^2\alpha}$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha - 4 \le 0$$

< 0 pro $\alpha \ne k\pi$

$\alpha \ne k\pi$ φ nemá reálná vl. čísla

komplexní kořeny

$$\frac{2\cos\alpha \pm i\sqrt{-D}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm i2\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{2}$$

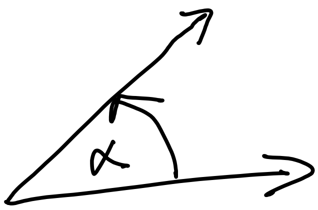
$$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

$\alpha = \pi$ Dvojnásobný kořen -1 středová souměrnost $\varphi = -id$

$\alpha = 2k\pi$ Dvojnásobný kořen 1 $\varphi = id$

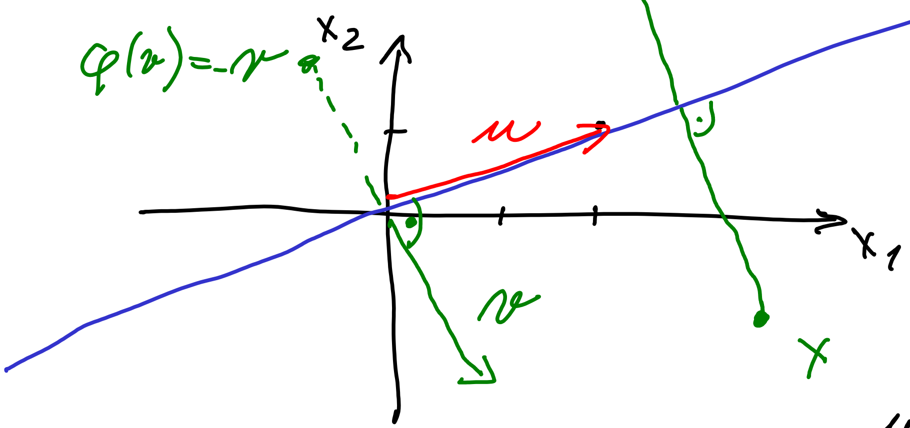
$\alpha \ne k\pi$ φ nemá reálná vl. čísla

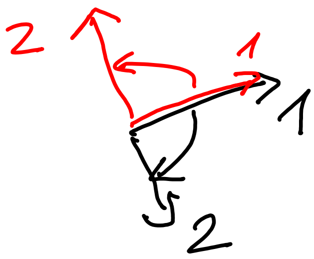
Změřme i geometricky.



Příklad. 2. Zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky $x_1 - 2x_2 = 0$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

Jaká jsou vlastní čísla zobrazení φ a čemu se rovná $\det B$?





$u = (2,1)$ směrnice přímky

$\varphi(u) = u$

$\varphi(v) = -v \qquad v = (1,-2)$

$\varphi(x) = Bx \qquad s_1 B = \varphi(e_1)$

$\qquad\qquad\qquad\quad s_2 B = \varphi(e_2)$

$$\begin{array}{cc} u & \varphi(z) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 4/5 & -3/5 \end{array}\right)$$

$-1 + 8/5 \qquad 2 - \frac{6}{5}$

$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \qquad \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ vl. čísla jsou $\boxed{1 \text{ a } -1}$

$B = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \qquad \det B = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \underline{-1}$

Příklad. 3. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Ax$, kde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Teorie: A ortogonální matice 3×3

① $\varphi(x) = Ax$ je otočení kolem osy proch. počátkem

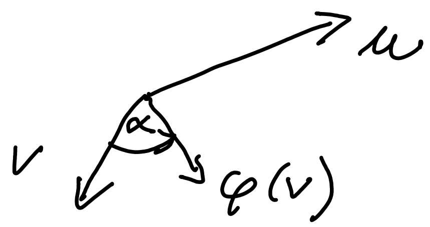
det $A = 1$

vl. čísla jsou 1, $\cos\alpha \pm i \sin\alpha$

Směrnice osy = vl. vektor k 1.

Úhel otáčení je α

počítal otáč. odsýpem a byla dvě otočení nenulové



$v \perp u$

$\varphi(v)$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|}$$

směr otáčení bude od v k $\varphi(v)$.

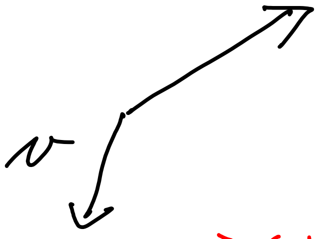
② det $A = -1$

vlastní čísla -1, $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$

$\varphi(x) = Ax$ je SLOŽENÍ

(a) symetrie podle roviny proch. počátkem kolmé ke vlastnímu vektoru pro -1

(b) otočení kolem osy proch. počátkem se směrnicí vlastní vektor k -1

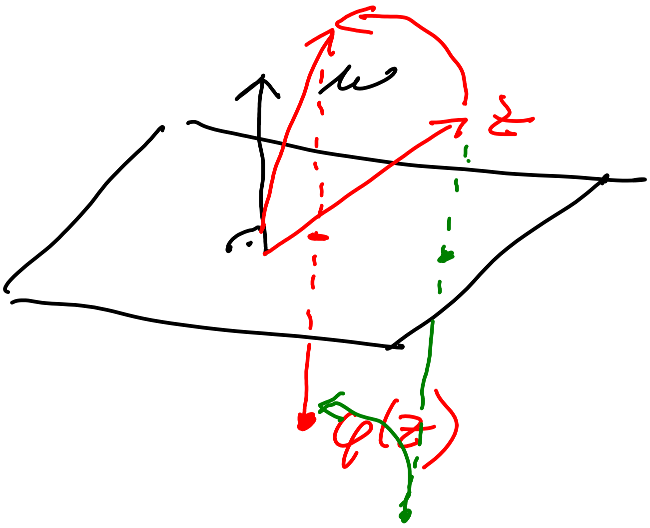


u vl. vektor k -1

$v \perp u$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|}$$

otočení(z)



$$\det A = \det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\left(-4-4-4-8+1-8\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(\underbrace{-12-16+1}_{-27}\right) = -1$$

Určitě má A vl. číslo -1.

Vlastní vektor k vl. číslu -1

$$\cancel{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+1 & -1 & -2 \\ -1 & 2+1 & -2 \\ -2 & -2 & -1+1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$A - \lambda E = \begin{matrix} a_{11} - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}+1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}+1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ & & \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ & & \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v \perp u = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sphericalangle(v, \varphi(v)) = 0$

Zobrazení φ při symetrii podle roviny $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

→ prochází rovina kolmá na u.

13:58

Příklad. 4. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Bx$, kde

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\det \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\left(8-1+8+4+4+4\right)$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

B má vl. číslo 1

Vlastní vektor k 1

$$\begin{pmatrix} 2/3-1 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3-1 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi(x) = Bx$ je otočení kolem osy proch. počátkem se směr. vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a úhel α :

$$v \perp u \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v) \rangle}{\|v\| \, \|\varphi(v)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad (60^\circ).$$

φ je otočení kolem osy
$p: \; t(1,1,1)$
a úhel $\frac{\pi}{3}$ ve směru od $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ k $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Příklad. 5. Zjistěte, jakou geometrickou transformaci popisuje zobrazení $\varphi(x) = Cx$, kde

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det C = \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\left(-8+1-8-4-4-4\right) = \underline{-1}$$

Vl. čísla je $\underline{-1}$. Najdeme příslušný vlastní vektor.

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

φ je složení symetrie podle roviny $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

a otočení kolem osy $p: \; t(1,1,1)$

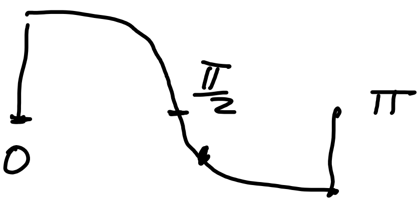
Úhel otočení je α

$v \perp u \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, \varphi(v)\rangle}{\|v\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{2}{3}\pi \quad (120^\circ)$



Otočení je o úhel $\frac{2}{3}\pi$ od $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ k $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Příklad. 6. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je symetrie podle roviny

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

Najděte matici A tvaru 3×3 takovou, že v souřadnicích standardní báze je

$$\varphi(x) = Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

u, v lin. nezávislé ležící v rovině $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

$u = (1,2,0) \qquad \varphi(u) = u$

$v = (1,0,-1) \qquad \varphi(v) = v$

$z \perp$ na rovinu $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$
$[u, v]$

$z \perp u, v \qquad z = (2,-1,2)$

z je kolmá k rovině

$\varphi(z) = -z$ Hledaná matice

A má sloupce $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$.

$$\begin{array}{cc} w & \varphi(w) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \text{řádk. úpravy} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -9 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 9 & -36 & 36 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & 1 & 4 & -8 \\ 0 & 9 & 0 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 4/9 & -8/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4/9 & 7/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 & -8/9 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \varphi(e_1) = s_1 A \\ \leftarrow \varphi(e_2) = s_2 A \\ \leftarrow \varphi(e_3) = s_3 A \end{array}$$

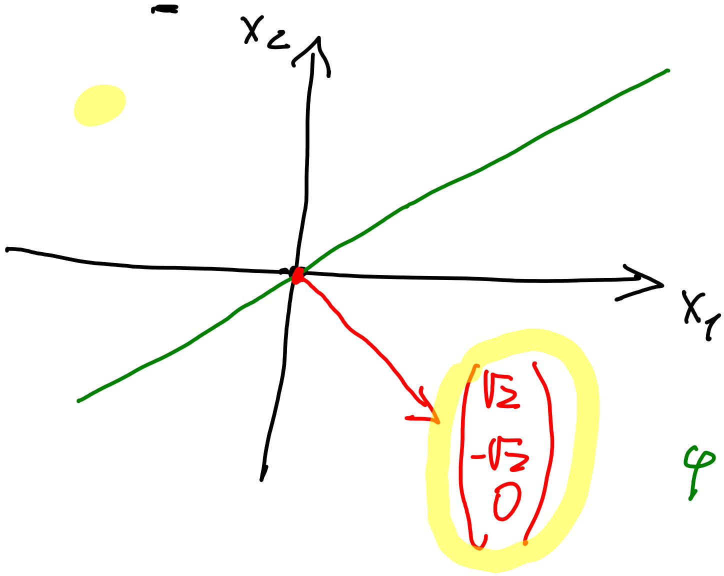
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Symetrie podle roviny je samoadj. operátor.

Příklad. 7. Zobrazení $\varphi:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je rotace kolem přímky

$$p:\quad x_1 - x_2 = 0\,,\ x_3 = 0$$

převádějící vektor $(0,0,2)^T$ na vektor $(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)^T$. Najděte matici B takovou, že ve standardních souřadnicích je $\varphi(x) = Bx$.



$p:\ tu$

$t(1,1,0)$

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \perp p$$

$$\underset{\overset{\|}{z}}{\varphi(v)} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \perp p$$

Úhel otočení je α

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, z\rangle}{\|v\|\,\|z\|} = \frac{0}{2\cdot 2} = 0$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ Otočení je o úhel $\frac{\pi}{2}$.

$$\varphi(u) = u$$

$$\varphi(v) = z$$

$$\varphi(z) = \underbrace{\varphi(\varphi(v))}_{\text{otočení o } \pi} = -v$$

$$\varphi\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} w & & \varphi(w) \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\
\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 2(-\sqrt{2}) & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2 \\
0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0
\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0
\end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\
0 & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l}
\leftarrow \varphi(e_1) \\
\leftarrow \varphi(e_2) \\
\leftarrow \varphi(e_3)
\end{array}$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
1 & 1 & \sqrt{2} \\
1 & 1 & -\sqrt{2} \\
-\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0
\end{pmatrix}$$