12. cvičení Aproximace řešení, Jordanův kanonický tvar, 2024

Příklad. 1. Ukažte, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

nemá řešení. Pomocí pseudoinverzní matice najděte všechny nejlepší aproximace řešení této soustavy.

Řešení. □

Příklad. 2. Úloha lineární regrese. V rovině jsou dány body

$$[x_1, y_1) = [-1, 1], \quad [x_2, y_2] = [0, 0], \quad [x_3, y_3] = [1, 1], \quad [x_4, y_4] = [2, 3].$$

Těmito body proložte přímku $y = px + q$ tak, aby součet čtverců $\sum_{i=1}^{4} (y_i - (px_i + q))^2$ byl minimální.

Řešení. □

Příklad. 3. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}SP$.

Řešení. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Řetězec k vlastnímu číslu 1 je $u = (1, -2, 1)^T$, $v = (0, 0, -1)^T$, vlastní vektor v vlastnímu číslu 3 je $w = (0, -1, 1)$. Matice P má ve sloupcích souřadnice vektorů u, v, w. □

Příklad. 4. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}TP$.

Řešení. $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Řetězec k vlastnímu číslu 2 je $u = (0, -1, 1)^T$, $v = (1, 0, -1)^T$, $w = (1, -1, 1)$. Matice P má ve sloupcích souřadnice vektorů u, v, w. □

Příklad. 5. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}VP$.

Řešení. $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vlastní vektory jsou $a(0,0,1)^T + b(1,-2,0)^T$. Řetězec délky 2 začíná vlastním vektorem, kde $a = b$. Hledaná báze je tvořena řetězcem délky dva $u = (1,-2,1)^T$, $v = (0,-1,0)^T$, a vlastním vektorem $w = (0,0,1)$. Matice P má ve sloupcích souřadnice vektorů u, v, w. □

Příklad. 6. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici P takovou, že $J = P^{-1}AP$.

Řešení. Výpočet charakteristického polynomuje je pracnější. Můžete řádkovými úpravami dostat 0 na pozicích A_{31} a A_{41} a udělat Laplaceův rozvoj. Vyjde $(\lambda-3)(\lambda-4)^3$. Vlastní vektor k 3 je $u = (1,1,1,1)^T$, vlastní vektor k 4 je $v = (1,0,2,0)^T$. Proto

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řetězec délky tři k vlastnímu vektoru 4 je v, $w = (1,1,0,2)^T$, $z = (1,1,0,2)^T$. Matice P má ve sloupcích vektory u, v, w, z. □

Příklad. 7. Najděte Jordanův kanonický tvar J matice

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Současně najděte regulární matici Q takovou, že $J = Q^{-1}GQ$.

Řešení. Výpočet charakteristického polynomuje je pracnější. Od 1. sloupce odečteme a 4 sloupec a uděláme Laplaceův rozvoj podle 1. slouce. Char. polynom vyjde $(\lambda-1)(\lambda-2)^3$. Vlastní vektor k 1 je $u = (3,6,7,1)^T$, vlastní vektory k 2 jsou $a(1,1,1,0)^T + b(-1,0,0,1)^T$.

Proto

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řetězec délky 2 k vlastnímu vektoru 2 začíná vlastním vektorem pro $b = 0$, tedy $v = (1,1,1,0)^T$, a pokračuje vektorem $w = (-2,-1,0,0)^T$. Hledanou bázi vytvoříme z vektorů $u, v.w, z = (-1,0,0,1)^T$. Tyto vektory určují sloupce matice Q. □

Další příklady

Příklad. 1. Uvažujme v rovině 4 body:

$$[x_1, y_1) = [-1,1], \quad [x_2, y_2] = [0,0], \quad [x_3, y_3] = [1,1], \quad [x_4, y_4] = [2,3].$$

Těmito body proložte parabolu $y = px^2 + qx + r$ tak, aby součet čtverců

$$\sum_{i=1}^{4} \big(y_i - (px_i^2 + qx_i + r)\big)^2$$

byl minimální.