Konzultace

Příklad 4 z 10. dne

$\varphi : U \to U$ vlastní číslo λ,

k λ máme dva řetězce

$$0 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} u_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} u_2 \qquad 0 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_1 \xleftarrow{\varphi-\lambda id} v_2$$

jestliže u_1 a v_1 jsou lin. nezávislé, tak jsou lin. nezávislé všechny vektory

u_1, u_2, v_1, v_2.

Potřebujeme dokázat

$au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2 = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = d$.

Nechť

$$(\bullet) \quad au_1 + bu_2 + cv_1 + dv_2 = \vec{0} \quad / \varphi - \lambda id$$

$$a \underbrace{(\varphi-\lambda id) u_1}_{=\vec{0}} + b \underbrace{(\varphi-\lambda id) u_2}_{u_1} + c \underbrace{(\varphi-\lambda id) v_1}_{=\vec{0}} + d \underbrace{(\varphi-\lambda id) v_2}_{v_1} = \vec{0}$$

$$bu_1 + dv_1 = 0$$

Vektory u_1, v_1 jsou lin. nezávislé $\Rightarrow b = d = 0$.

Dosadíme do původní rovnice $(\bullet)$

$$a u_1 + 0 \cdot u_2 + c v_1 + 0 \cdot v_2 = \vec{o}$$

$$a u_1 + c v_1 = \vec{o}$$

u_1, v_1 jsou LN $\Rightarrow$ $a = c = 0$

Dokázali jsme, že $a = b = c = d = 0$

$\Rightarrow$ u_1, u_2, v_1, v_2 jsou lin. nezávislé.

A $\quad 4 \times 4$ $\quad$ vlastní číslo λ_0
alg. nás. 4
a geom. nás. 2

Jak bez počítání řešení zjistíme, zda JKT má 2 buňky 2×2
2 buňky 1×1 a 3×3.

$A - \lambda_0 E$ $\qquad A = P J P^{-1} \Leftrightarrow J = P^{-1} A P$

$$A - \lambda_0 E = P(\underline{J - \lambda_0 E}) P^{-1} = \underbrace{P J P^{-1}}_{A} - \underbrace{P \lambda_0 E P^{-1}}_{\lambda_0 E}$$

1

$J - \lambda_0 E$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 0$$

2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)^3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \nearrow$$

Najděte nejmenší $n \in \mathbb{N}$, že

$$\left(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E\right)^n = 0.$$

$n = k$

$$\left(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E\right)^2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{matrix}$$

$$\left(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E\right)^3 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{matrix}$$

$$\left(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E\right)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E\right)^k = 0$$

$$A - \lambda_0 E = P(J - \lambda_0 E)P^{-1}$$

$$(A - \lambda_0 E)^n = P(J - \lambda_0 E)\underbrace{P^{-1} \cdot P}_{E}(J - \lambda_0 E)P^{-1} \cdot \ldots$$

$$(A-\lambda_0 E)^n = P(J-\lambda_0 E)^n P^{-1}$$

Když $(J-\lambda_0 E)^n = 0 \Rightarrow (A-\lambda_0 E)^n = 0$

Když $(J-\lambda_0 E)^n \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{(A-\lambda_0 E)^n \neq 0}}$

<u>Příklad z 10. dne</u>

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2021 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Zjistěte, zda jsou podobné!

Jestliže mají JKT, pak jsou podobné právě tehdy, když jejich JKT je stejný (až pořadí buněk).

U obou zjistíme 1) vl. čísla 3 alg. nás. 4

2) geom. nás. vl. čísla 3 je 2

$C-3E$ $\quad \begin{matrix} 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{matrix}$ $\qquad$ vl. vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D-3E$ $\quad \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ $\qquad$ vl. vektory $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(C-3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ JKT matice C má 2 buňky velikosti 2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & & \\ 0 & 3 & & \\ \hline & & 3 & 1 \\ & & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$(D-3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ JKT matice D je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & 3 & \\ \hline & & & 3 \end{array}\right)$$

$$(D-3E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=

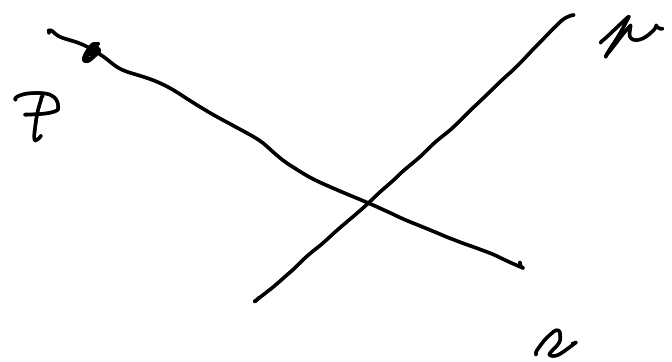
Afinní geometrie

bod P 2 mimoběžky p, q

Najděte přímku r procházející bodem P a protínající přímky p a q.

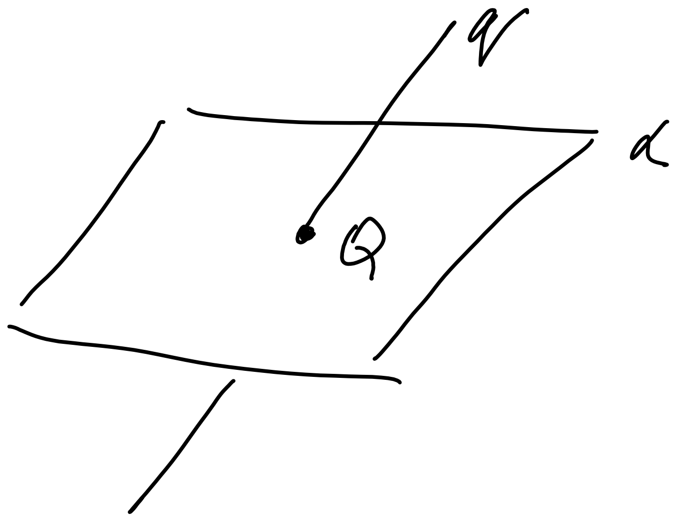
V $\mathbb{R}^3$.

Představme si, že máme přímku r



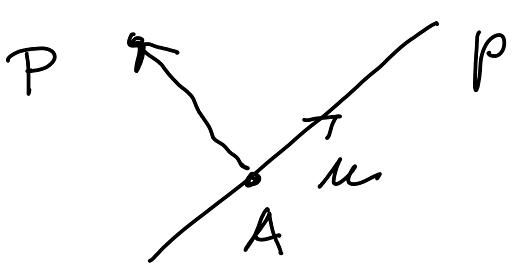
Přímka r a p, protože se protínají určují rovinu α.

r protíná přímku q, r leží v α, proto i rovina α protíná přímku q



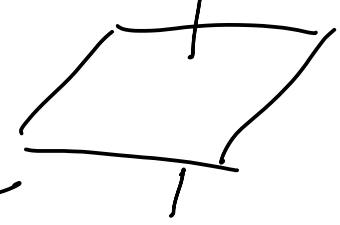
Rovinu α určíme ze znalosti přímky p a bodu P.

$\alpha = p \sqcup P$



$p : A + tu$

$\alpha : A + tu + s(P - A)$



Umíme spočítat $\alpha \cap q$

To je bod Q, Q musí ležet

na hledané přímce r.

$$r : P + a(Q - P) .$$

Složitější verse v $\mathbb{R}^4$

bod P, přímka p a rovina ρ.

Najděte přímku r procházející bodem P a protínající přímku p a rovinu ρ.

α rovina určená bodem P a přímkou p

v ní musí ležet hledaná přímka r

Spočítáme $\underline{\alpha} \cap \underline{\rho} = Q$

a přímka r je určena body P a Q $\qquad r : P + a(Q-P)$.

Základní věci z kvadratické části:

φ : lin. ~~operátor~~ zobrazení

$(\varphi)_{B,\alpha}$ $\qquad \varphi : U \to V$

$\overline{f}$ bilin. forma $\quad U \times U \to \mathbb{R}$

matice bilin. formy v bázi α

označíme $(f)_{\alpha,\alpha}$!

Transformace při změně báze

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\beta}$$

$$P^{-1} \; (\varphi)_{\alpha,\alpha} \; P$$

f bilin. forma $\quad A$ matice v bázi α

$\qquad\qquad\qquad\quad B$ matice v bázi β

$$B = (id)^T_{\alpha,\beta} \, A \, (id)_{\alpha,\beta}$$

$$B = P^T \, A \, P$$

Pokud se skal. součinem báze α, β jsou ortonormální

$P = (id)_{\alpha,\beta}$ je ortonormální

$$P^{-1} = P^T$$

$\varphi(x) = Ax \qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(x,y) = x^T A y \qquad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = A$$

matice f ve stand. bázi je také A.

A je symetrická, $\quad \varphi(x) = Ax$ je samoadj.

$\qquad\qquad\qquad\qquad f(x) = x^T A y$ je symetrická

O samoadj. ~~matic~~ operátorech víme, že dávají ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory.

$\exists$ ort. báze α

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$\underline{\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}} = (id)_{\varepsilon,\alpha}^{-1} \cdot A \cdot (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= \underline{(id)_{\varepsilon,\alpha}^{T} A \, (id)_{\varepsilon,\alpha}}$$

$\Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ je matice symetr. bilin. formy

$$f(x,y) = x^T A y$$

<u>v bázi</u> α.