

Bilineární formy

① Lineární forma je lineární zobrazení z reáln. prostoru

U do tělesa skalárů. $\varphi: U \rightarrow K$

Přechází lineární forma na \mathbb{R}^n má tvar $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$= (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

② Bilineární forma je zobrazení $f: U \times U \rightarrow K$, kde

U je vekt. prostor nad K takové, že

$\forall u \in U$ je zobrazení $f(u, -): U \rightarrow K$ je lineární

$f(-, u): U \rightarrow K$ je lineární

Příklady:

① $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2}_{\text{blue}} + \underbrace{a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2}_{\text{blue}}$$
$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + a_{21}x_2)}_{\text{red}} \cdot y_1 + \underbrace{(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)}_{\text{blue}} \cdot y_2$$

$$\textcircled{2} \quad f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i y_j \quad \text{bilineární forma}$$

$$\textcircled{3} \quad f: \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(p, q) = p(1) \cdot q'(2)$$

$$f(p, aq_1 + bq_2) = p(1) \cdot (aq_1 + bq_2)'(2) =$$

$$= p(1) (aq_1' + bq_2')(2) = a p(1) q_1'(2) + b p(1) q_2'(2) \\ = a f(p, q_1) + b f(p, q_2)$$

$$\textcircled{4} \quad U = C[a, b] \quad F: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$F(cf_1 + df_2, g) = \int_a^b (cf_1 + df_2)(x)g(x)dx =$$

$$= c \int_a^b f_1(x)g(x)dx + d \int_a^b f_2(x)g(x)dx$$

$$= cF(f_1, g) + dF(f_2, g)$$

2 1. remarku matrice $A \in \text{Mat}_{\ell \times n}(\mathbb{R})$ může
lineárního zobrazení

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell \quad \varphi(x) = A \cdot x = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nově pro bilin. formy

A matice $n \times n$ nad \mathbb{K} může být bilin. forma

$$f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \quad f(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ = x^T A y$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 A &= (a_{ij}) & f(x, y) &= x^T A y = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
 & & &= \left(\sum_{i=1}^n x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n x_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i a_{in} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
 & & &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j
 \end{aligned}$$

Obráceně U vekt. prostor nad K s bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$.

$f: U \times U \rightarrow K$ je bilineární forma

Matice bilin. formy f v bází $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

je matice $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Tato matice může sloužit k normování, *průběh*
 $(f)_{\alpha, \alpha}$!

Glavna: Matrice lin. preslikavanja $\varphi: U \rightarrow V$

Baze U je $\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, baze V je $\beta = (v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Če je matrice lin. preslikavanja φ u bazisk α a β

$$\underline{(\varphi)_{\beta, \alpha}} = \left(\begin{array}{c} (\varphi(u_1))_{\beta} \\ \text{"} \\ (\varphi(u_2))_{\beta} \\ \dots \\ (\varphi(u_n))_{\beta} \end{array} \right)$$

svejednice vektoru $\varphi(u_i) \in V$ u bazi β

$f: U \times U \rightarrow K$ bilinear form, $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_u)$

$u = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ $(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

v basis U
 $A = (a_{ij})$ $a_{ij} = f(u_i, u_j)$

$v = \sum_{j=1}^n y_j u_j$ $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f\left(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j\right) = \sum_i x_i f\left(u_i, \sum_j y_j u_j\right) = \left. \begin{array}{l} (u)_\alpha^T A (v)_\alpha \\ \parallel \\ \alpha \end{array} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(u_i, u_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j a_{ij} = x^T A y \end{aligned}$$

Matrice bilineární ve dvou různých bázích

$f: U \times U \rightarrow K$ bilin. forma $\alpha = (u_1, \dots, u_n)$ báze U

$\beta = (v_1, \dots, v_m)$ jiná báze U

A matrice f v bazi α ($[f]_{\alpha, \alpha}$ zlatos)

B matrice f v bazi β

$$B = \begin{pmatrix} \text{id} \\ \text{id} \end{pmatrix}_{\alpha, \beta} A \begin{pmatrix} \text{id} \\ \text{id} \end{pmatrix}_{\alpha, \beta}$$

matice přechodu

$$f(u, v) = (u)_\alpha^T A (v)_\alpha = x^T A y$$

$$x = (u)_\alpha \quad \bar{x} = (u)_\beta$$

$$f(u, v) = (u)_\beta^T B (v)_\beta = \bar{x}^T B \bar{y}$$

$$y = (v)_\alpha \quad \bar{y} = (v)_\beta$$

Matrice přechodu funguje takto

$$(u)_\alpha = \underline{x} = (id)_{\alpha, \beta} (u)_\beta = \underline{(id)_{\alpha, \beta} \bar{x}}$$

$$f(u, v) = \underline{\bar{x}^T B \bar{y}} = x^T A y = \left((id)_{\alpha, \beta} \bar{x} \right)^T A \left((id)_{\alpha, \beta} \bar{y} \right) = \underline{\bar{x}^T (id)_{\alpha, \beta}^T A (id)_{\alpha, \beta} \bar{y}}$$

$$\forall \bar{x}, \bar{y}: \quad \underline{\bar{x}}^T \underline{B} \underline{\bar{y}} = \underline{\bar{x}}^T \underline{(id)_{\alpha, \beta}^T} A \underline{(id)_{\alpha, \beta}} \underline{\bar{y}}$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{B = (id)_{\alpha, \beta}^T A (id)_{\alpha, \beta}}$$

Păremme, ie dner cõne' mahrice A a B ira kengmenkm',
zirkliie ekidnye regulãim' mahrice P kãr, ie

$$\boxed{B = P^T A P}$$

Symmetrička bilina forma $f: U \times U \rightarrow K$

je komutativna, t.j.

$$f(u, v) = f(v, u)$$

Antisimetrička

$$f(u, v) = -f(v, u) \quad \left(\Rightarrow f(u, u) = -f(u, u) \right)$$

Lemma Bilina forma je simetrička,

nad \mathbb{R}, \mathbb{C}

$$\Rightarrow f(u, u) = 0$$

pa se može dati u matrici u zavisnosti od baze
je simetrička

$$\Rightarrow a_{ij} = f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = a_{ji} \quad \Rightarrow A = A^T$$

Hlavi' výsledek dvošmi prednášky:

Pro každou symetrickou bilin. formu $f: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$
existuje v U báze B , v níž řádkovými je

$$f(u, v) = b_{11}x_1y_1 + b_{22}x_2y_2 + \dots + b_{nn}x_ny_n.$$

(Poznámka: matice f v bázi B je diagonální.)

Rádkové úpravy: e element. řádk. úprava

Plati

$$e(A) = \underbrace{e(E)}_{\text{element. matice}} \cdot A$$

1. řádku a . naopak 2. ř.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sloupové úpravy \bar{e} \bar{e} element. sloup. úprava

$$\bar{e}(A) = A \cdot \bar{e}(E)$$

1. sloupi a . naopak
2. sloupe

Pro stejné řádkové (e) a sloupové (\bar{e}) úpravy

$$\text{Plati } \left(e(E) \right)^T = \bar{e}(E)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Necht matice B vznikne z A porádkovním stejných řádk. a sloupc.
úprav. Pak jsou B a A kongruentní.

$$\begin{aligned} A, & P_1^T A P_1, P_2^T P_1^T A P_1 P_2, \dots, B = P_k^T P_{k-1}^T \dots P_1^T A P_1 \dots P_{k-1} P_k \\ & = (P_1 P_2 \dots P_k)^T A (P_1 \dots P_k) \\ & = P^T A P \end{aligned}$$

ALGORITMUS ① nalesne po kaiden symetricke matrici A

diagona'lnu' matrici B , ktera' je $\circ A$ kongruentni.

② nalesne ke kaidu' symetricke bilin. forme $f: U \times U \rightarrow \mathbb{K}$

ku' B , v' \mathcal{B} i' \mathcal{B} radnici'el je

$$f(u, v) = b_{11} x_1 y_1 + b_{22} x_2 y_2 + \dots + b_{nn} x_n y_n$$

$$= \begin{pmatrix} u \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}^T \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} f(n_1, n_j) & n_1 \\ f(n_2, n_j) & n_2 \\ \hline & n_j \end{array} \right)$$

K 1. iādla
 ni dlema
 2. iādla
 ~

$$\left(\begin{array}{c|c} \overset{f(n_1+n_2, n_j)}{f(n_1, n_j) + f(n_2, n_j)} & n_1 + n_2 \\ f(n_2, n_j) & \\ \hline & n_j \end{array} \right)$$

Príklad $f: U+U \rightarrow \mathbb{R}$ $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ f bilin. symetrická

matice f w α je $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & u_1 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline & & & u_1 \ u_2 \ u_3 \end{array} \right)$$

2 1. riadku
vycheme 2.

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 10 & u_1 + u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 4 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline & & & u_1 \ u_2 \ u_3 \end{array} \right)$$

2 1. sloupci
vycheme
2. sl

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1 + u_2 \\ 2 & 0 & 6 & u_2 \\ 10 & 6 & 0 & u_3 \\ \hline & & & u_1 + u_2 \ u_2 \ u_3 \end{array} \right)$$

2+2. řádky, 2+3. řádky

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 10 & u_1 + u_2 \\ 4 & 0 & 12 & 2u_2 \\ 20 & 12 & 0 & 2u_3 \end{array} \right)$$

2+2. řádky

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 20 & u_1 + u_2 \\ 4 & 0 & 24 & 2u_2 \\ 20 & 24 & 0 & 2u_3 \end{array} \right)$$

2. řádky - 2+1. řádky

3. řádky - 5x1. řádky

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 20 & u_1 + u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1 + u_2 \\ 0 & 4 & -100 & -5u_1 - 5u_2 + 2u_3 \end{array} \right)$$

$\stackrel{=}{=} B$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1 + u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1 + u_2 \\ 0 & 4 & -100 & -5u_1 - 5u_2 + 2u_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & u_1 + u_2 \\ 0 & -4 & 4 & -u_1 + u_2 \\ 0 & 0 & -96 & -6u_1 - 4u_2 + 2u_3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -4 & 0 & \cdot B \\ 0 & 0 & -96 & \dots \end{array} \right)$$

Výsledok

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -96 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} u_1 + u_2, & -u_1 + u_2, & -6u_1, & -4u_2 + 2u_3 \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) = 4x_1y_1 - 4x_2y_2 - 96x_3y_3 \quad \text{v súradnicovej} \\ \text{báze } B.$$