Aproximace řešení soustavy lineárních rovnic

$$Ax = b \qquad h(A) < h(A|b)$$

Nejlepší aproximace x_0 řešení, tj. takový vektor x_0, že

$$\|Ax_0 - b\| \text{ je minimální,}$$

je

$$x_0 = A^{(-1)}b + y \,, \quad \text{kde } Ay = 0 .$$

Příklad:

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$x_1 = 7$$
$$x_2 = 5$$

② nemá řešení

Minule

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Hledáme x_1, x_2 tak, aby

$(x_1+2x_2-3)^2 + (x_1-7)^2 + (x_2-5)^2$ bylo minimální

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{(-1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Pro nejlepší aproximaci použijeme pseudoinverzní matici k matici 4

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A^* A = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$$

$$A^{(-1)} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2} (x_1, x_2, \dots x_n)$$

$$\beta = A^{(-1)} b = A^{(-1)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Složitější závislost

$$y = \alpha + \beta x$$

Neznámé jsou α, β

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x_1 &= y_1 \\ \alpha + \beta x_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ \alpha + \beta x_n &= y_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dokončeno v přípravě na 10. přednášku

ještě složitější závislost

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Polární rozklad matice

Motivace z komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

lze psát ve tvaru

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad r \geq 0$$

Lineární zobrazení

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \varphi(x) = z \cdot x = (a + ib)x$$

$$\varphi(x) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)x$$

Věta o polárním rozkladu Nechť A je matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Potom existuje rozklad

$$A = R \cdot U,$$

kde U je ortogonální nebo unitární matice a R je symetrická nebo hermitovská pozitivně semidefinitní matice.

Navíc platí, že $R^2 = A \cdot A^*$ (někdy píšeme $R = \sqrt{AA^*}$).

Je-li A regulární, je rozklad jednoznačný.

Důkaz: $A = PSQ^*$ singulární rozklad

$$A = PS\underbrace{P^*P}_{E}Q^* = \underbrace{(PSP^*)}_{R}\underbrace{(PQ^*)}_{U}$$

U je unitární

$$UU^* = (PQ^*)(PQ^*)^* = PQ^*Q^{**}P^* = P\overbrace{Q^*Q}^{E}P^* = PP^* = E$$

R je hermitovská

$$R^* = (PSP^*)^* = P^{**}S^*P^* = PSP^* = R$$

R je pozitivně semidefinitní, $\langle Rx, x\rangle \geq 0$ (10)

$$\langle Rx, x\rangle = \langle PSP^* x, x\rangle = \langle SP^* x, P^* x\rangle = \langle Sy, y\rangle \geq 0,$$

neboť S je diagonální a $S_{ii} \geq 0$.

$$\underline{\underline{AA^*}} = (RU)(RU)^* = R\underbrace{UU^*}_{E}R = \underline{\underline{R^2}}$$

φ je složení dvou zobrazení

$$\varphi_1(x) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\, x$$

Toto je unitární zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_1 \circ \varphi_1^* = id$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Druhé zobrazení je $\varphi_2(x) = r x$ $\qquad r \geq 0,\ r \in \mathbb{R}$.

$\varphi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je samoadjungované a pozitivně semidefinitní.

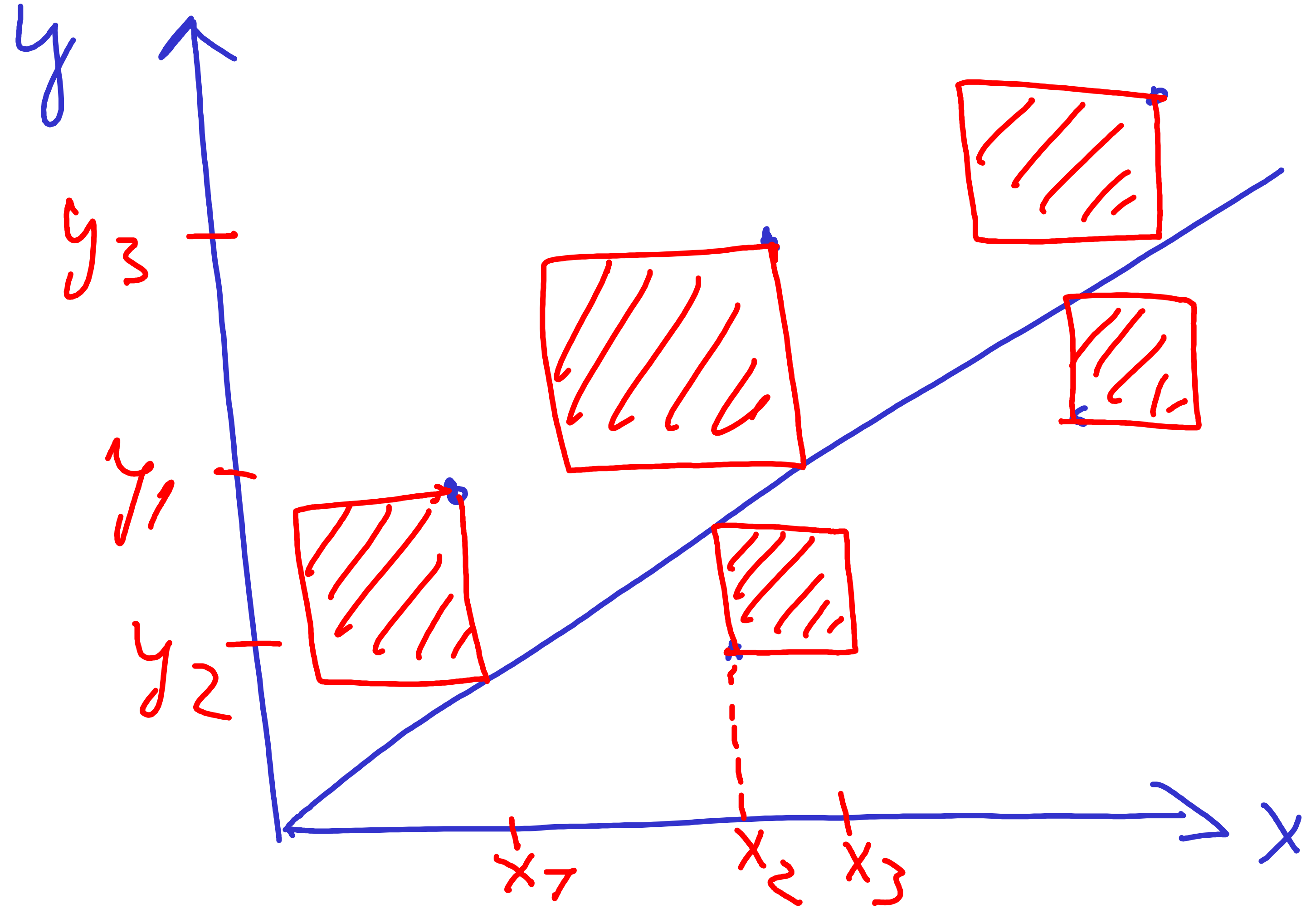
$$\varphi_2^*(x) = \bar{r} x = r x = \varphi_2(x) \qquad \langle \varphi_2(x), x\rangle = \langle r x, x\rangle = r\langle x, x\rangle \geq 0.$$

Příklad – lineární regrese

Předpokládáme, že veličiny x a y jsou ve vztahu

$$y = \beta x$$

Provádíme n měření, kterými dostaneme dvojice $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots$ $[x_n, y_n]$.



$$\begin{aligned} x_1 \beta &= y_1 \\ x_2 \beta &= y_2 \\ &\vdots \\ x_n \beta &= y_n \end{aligned}$$

Neznámá je parametr β.

Příklad na polární rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A \text{ není regulární}$$

$$A = PSQ^* = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^*$$

$$A = (PSP^*)(PQ^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \frac{\sqrt{10}}{2} & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

LINEÁRNÍ PROCESY

popisují vývoj nějakého systému v diskrétním čase

Čas $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Systém se skládá z k hodnot v čase n

$$x(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_k(n) \end{pmatrix}$$

Přitom závislost $x(n+1)$ na $x(n)$ je lineární

$$x(n+1) = A\,x(n) \qquad A \text{ matice } n\times n$$

Vývoj systému je určen vlastními čísly a vlastními vektory matice A

1 Dravec a kořist

$$x(n) = \begin{pmatrix} D(n) \\ K(n) \end{pmatrix}$$

$$D_{n+1} = 0{,}6\,D_n + 0{,}5\,K_n$$

$$K_{n+1} = -p \cdot D_n + 1{,}2 \cdot K_n \qquad p > 0$$

$$X(n+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 \\ -p & 1{,}2 \end{pmatrix}}_{A} X(n)$$

Vlastní čísla a vektory matice A v závislosti na p

(A) $p = 0{,}16$ $\quad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 0{,}8, \ u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(B) $p = 0{,}175$ $\quad \lambda_1 = 0{,}95, \ \lambda_2 = 0{,}85, \ u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $p = 0{,}135$ $\quad \lambda_1 = 1{,}05, \ \lambda_2 = 0{,}75 \ \ u_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

Počáteční stav je $X(0) = \begin{pmatrix} D_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = a u_1 + b u_2$

$$\underline{X(n)} = A\,X(n-1) = A \cdot A\,X(n-2) = \dots = A^n \cdot X(0)$$

$$= A^n (a u_1 + b u_2) = a A^n u_1 + b A^n u_2 = \underline{a \lambda_1^n u_1 + b \lambda_2^n u_2}$$

(A) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 < 1 \implies \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_1^n = 1,\ \lim\limits_{n \to \infty} \lambda_2^n = 0$

$X(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} a u_1$ Systém dravec – kořist se stabilizuje v násobku vlastního vektoru k 1.

(B) $0<\lambda_1<1$, $0<\lambda_2<1$ $\Rightarrow$ $\lambda_1^n \longrightarrow 0$, $\lambda_2^n \longrightarrow 0$. Proto

$$X(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Populace dravců a kořisti postupně vymizí (a to v čase exponenciálně).

(C) $\lambda_1 > 1$, $0<\lambda_2<1$ $\Longrightarrow$ populace roste

$$X(n) - a\lambda_1^n u_1 = b\lambda_2^n u_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Pro velká n $\quad X(n) \approx a\lambda_1^n u_1 = \begin{pmatrix} a\lambda_1^n D \\ a\lambda_1^n K \end{pmatrix}$

poměr $\dfrac{D_n}{K_n} \longrightarrow \dfrac{a\lambda_1^n D}{a\lambda_1^n K}$ = poměr dravců a kořisti ve vlastním vektoru k λ_1.

Populace draců i kuřízlí roste v čase exponenciálně, ale poměr se stabilizuje k poměru ve vlastním vektoru k λ_1.

② Leslieho populační model

Máme jeden druh a rozdělíme ho podle věku na k skupin

$$X(n+1) = A\,X(n),$$ kde A je tzv. Leslieho matice

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \tau_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \le f_i$ porodnost i-té skupiny

$0 \le \tau_i \le 1$ index přežití – jaká část i-té skupiny přežije do skupiny $i+1$

$\tau_i = 1 -$ úmrtnost

3 Markovův proces

Systém může být v čase n v k stavech $1, 2, \ldots k$ s pravděpodobností $p_1(n), p_2(n), \ldots p_k(n)$

$$p(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \\ p_k(n) \end{pmatrix} \qquad p_i(n) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i(n) = 1$$

pravděpodobnostní vektor

$$p(n+1) = A\, p(n),$$

A je Markovova matice

$$A = (a_{ij})$$

a_{ij} je verjetnost, da se sistem iz stanja j dostane do stanja i

$$a_{1j}$$
$$a_{2j}$$
$$\vdots$$
$$a_{kj}$$

$$\Rightarrow a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{kj} = 1$$

$$p_i(n+1) = a_{i1} \cdot p_1(n) + a_{i2} \cdot p_2(n) + \dots + a_{ik} \cdot p_k(n)$$

$$p(n+1) = A \cdot p(n)$$

Perronova - Frobeniova teorie

Matice $A=(a_{ij})$ se nazývá pozitivní, jestliže $a_{ij}>0$ pro všechna $i,j \in \{1,2,\dots k\}$. Matice A se nazývá primitivní, jestliže A^{ℓ} je pozitivní pro nějaké ℓ.

Věta Perronova - Frobeniova

Nechť A je primitivní matice. Ze všech komplexních vlastních čísel právě jedno má největší absolutní hodnotu. Označme ho λ_1.

Platí

(1) λ_1 je kladné reálné číslo,

(2) geometrická násobnost λ_1 je 1, tj. $\dim \ker(A-\lambda_1 E)=1$,

(3) K λ_1 existuje vlastní vektor se všemi souřadnicemi kladnými.

(4) Pokud je $\lambda_1=1$, systém měřený modelem $x(n+1)=Ax(n)$ se stabilizuje a konverguje k násobku vlastního vektoru ke λ_1.

(5) Pokud je $\lambda_1 < 1$, systém ve všech složkách konverguje exponenciálně k 0.

(6) Pokud je $\lambda_1 > 1$, pak systém expanduje do nekonečna a poměry mezi jednotlivými složkami jsou stejné jako poměry složek vlastního vektoru k λ_1.

<u>Markovův proces:</u> Má vždy největší vlastní číslo $\lambda_1 = 1$.
Z každého počátečního stavu konverguje k vlastnímu pravděpodobnostnímu vektoru k 1.