

Jordan's kan. form

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{k_2}(\lambda) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad k \times k$$

Jord. nika

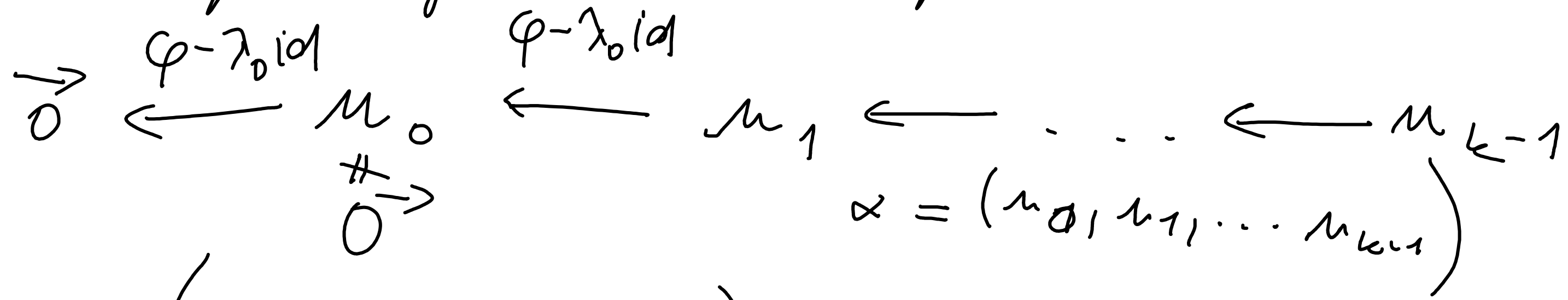
I $\varphi: V \rightarrow V$ ylinji'ci podminku, re sa cet alg.
ne'ralneki' ml. c'irul = dim V , par existuji baze α
par, re $(\varphi)_{\alpha, \alpha} = J$ matice n JKT .

II Pro každou matici A splňující analogičnou podmínku, existuje matice J a T tak, že

$$J = T^{-1} A T$$

Podmínky korepondují s iterací po vlastní čísla

λ_0 vl. číslo



Přítok dělby k :

$$\left(\varphi / [m_1 \dots m_k] \right)_{\alpha, \alpha} = J_k(\lambda_0)$$

Přádky řetězci ν bázi může přádky Jord. matic

$$\lambda_1 \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ 0 \leftarrow \nu_1 \leftarrow \nu_2 \leftarrow \nu_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi - \lambda_1 \text{id} \\ \varphi - \lambda_1 \text{id} \end{array}$$

$$\lambda_2 \quad \begin{array}{c} \leftarrow \\ 0 \leftarrow \nu_1 \leftarrow \nu_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi - \lambda_2 \text{id} \\ \varphi - \lambda_2 \text{id} \end{array}$$

$$\alpha = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_1, \nu_2)$$

$$\beta = (\nu_1, \nu_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 \\ 0 & & & 0 & \lambda_2 \end{array} \right)$$

$$(\varphi)_{\beta, \beta} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_2 & 1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ \hline & & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda_1 & 1 \\ & & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right)$$

$$P = (u_2, u_1, u_3, v_2, v_1)$$

$$(P)^{-1} P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

matrix inverse $\sim JkT$

$$\varphi(u_2) = u_1 + \lambda_1 u_2$$

$$\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$$

$$\varphi(u_3) = u_2 + \lambda_1 u_3$$

$$\varphi(v_2) = v_1 + \lambda_2 v_2$$

$$\varphi(v_1) = \lambda_2 v_1$$

Matrice 4×4

JkT jin' nelse ve nich p'padech mit
pennoi' alg. a geom. narolnochi slaknich u'ul

P'padech nejdrozna čnati : λ_0 ve. č'le alg. narolnochi 4
geom. narolnochi 2

①

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_0 & 1 \\ & 0 & \lambda_0 \end{array} \right)$$

②

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & & & \lambda_0 \end{array} \right)$$

Příklad 4

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1 + \lambda)^4$$

$\lambda_1 = -1$ je vl. číslo alg. nás. 4

geom. násobnost je 2

Vlastní vektory jsou $au + bv$

$$u = (1, 0, 3, 0)^T \quad v = (0, 0, 1, -2)^T$$

Kladáme ještě

$$(A + E)w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 10 & 5 & 3a+b \\ -12 & 6 & 4 & 2 & -2b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \\ -30 & 12 & 10 & 5 & 3a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -12 & 5 & 4 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \\ -30 & 10 & 10 & 5 & 5a+5b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \\ ~~-6 & 2 & 2 & 1 & a+b~~ \\ -12 & 5 & 4 & 2 & a \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 2 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Záver: Systéma má řešení pro všechna a, b .

Pro $a = 1, b = 0$, řešení $v_1 = (0, -1, 0, 3)^T$

Pro $a = 0, b = 1$, řešení $v_1 = (0, -2, 0, 5)^T$

Dva řešení

$$\vec{0} \leftarrow v \leftarrow v_1 \quad \left| \quad \vec{0} \leftarrow v \leftarrow v_1 \right. \quad \begin{array}{c} A+E \\ A+E \end{array}$$

Wesentliche Basis $\alpha = (u, u_1, v, v_1)$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & 0 \\ \hline & & & \\ 0 & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array} \right) = J$$

$$J = P^{-1} A P \Leftrightarrow P J = A P$$

$$(\varphi)_{\alpha, \alpha} = (\text{id})_{\alpha, \varepsilon_4} (\varphi)_{\varepsilon_4, \varepsilon_4} (\text{id})_{\varepsilon_4, \alpha}$$

$$\parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$$

$$J = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Zz: $P J = A P$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$(u)_{\varepsilon_4}$ $(u_1)_{\varepsilon_4}$ $(v)_{\varepsilon_4}$ $(v_1)_{\varepsilon_4}$

Püüklad 5

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi(x) = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^4$$

Al. ütle 1 ma' alg. ma's. 4

geom. ma's. 2

Vastus tehke

$$au + bv: \quad u = (0, 1, 0, 1)^T, \quad v = (-2, 0, 3, 0)^T$$

Reivme reitavon

$$(A - E)w = au + bv$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & +1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array} \right)$$

Závěr: Má řešení pouze
 pro $a+6b=0$. Tedy řešení
 dleby jsou 2 ruzná racionál
 ul. neborem $au+bu$, kde

$$a+6b=0.$$

Insolvenz $b = 1$, $a = -6$; $-6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$

da c̄'her i'herce d'illy ≥ 2 .

$$(A-E)w = -6u + v \quad (0, 1, 0, 1)^T \quad (-2, 0, 3, 0)^T \quad (\text{nur mit d'illy 3})$$

$$w = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0 \right)^T + a_1 u + b_1 v$$

Kedaince 3. n'her i'herce.

$$(A-E)z = w$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} + a_1 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & \frac{1}{3} - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array} \right)$$

Sankara ma'ireru'
ma'ne mo

$$-1 + a_1 + 6b_1 = 0,$$

bedy napi. mo $b_1 = 0, a_1 = 1$

$$W = \left(\frac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + 1 \cdot \left(0, 1, 0, 1\right)^T = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$Z = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$$

Řetězec délky 3 je

$$-6u + v \xleftarrow{A-E} W \xleftarrow{A-E} Z$$

Uzolíme páři

LN řetězec délky maxim

$$\alpha = (-6u + v, W, Z, u)$$

$$\left(\varphi\right)_{\alpha, \alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 \end{array} \right) = J$$

$$P = (\text{id}) \varepsilon_{4, \alpha} = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 6 & 1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Proč chodíte (nechodíte) na přednáška z LA II?
2. Jaké máte k přednášce kritické připomínky?
3. Jak jste spokojeni se cvičeními? Co by u dalo zlepšit?
4. Jak hodnotíte přímky v rámci? Je tento systém lepší než poslední domácí úkoly?
5. Děláte nezávislé domácí úkoly? Proč ano, proč ne?

6. Co můžeme udělat pro to, abychom našli řešení
 a připravou na zkoušku?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \right.$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)^2 = \left(\begin{array}{c|c} A^2 & 0 \\ \hline 0 & B^2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right)^3 = \left(\begin{array}{c|c} A^3 & 0 \\ \hline 0 & B^3 \end{array} \right)$$

A matrice 4×4 a ml. ünlem λ_0 alg. nis. 4 a geom. nis. 2

$$\textcircled{1} \quad A = Q \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & 1 & & \\ 0 & \lambda_0 & & \\ \hline & & \lambda_0 & 1 \\ & & 0 & \lambda_0 \end{array} \right) Q^{-1}$$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0 E) &= Q J Q^{-1} - \lambda_0 Q E Q^{-1} = Q (J - \lambda_0 E) Q^{-1} \\ &= Q \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) Q^{-1} \end{aligned}$$

$$(A - \lambda_0 E)^2 = Q (J - \lambda_0 E) Q^{-1} \cdot Q (J - \lambda_0 E) Q^{-1}$$

$$= Q (J - \lambda_0 E)^2 Q^{-1} = Q \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) Q^{-1} = 0$$

$$\textcircled{2} A = Q \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \\ \hline & & & \lambda_0 \end{array} \right) Q^{-1}$$

$$(A - \lambda_0 E)^2 = Q \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \right) Q^{-1} = Q \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) Q^{-1} \neq 0$$

Hledání iterací pomocí řepí stíhky.

Zvolíme náhodně $u_3 \in \mathbb{R}^4$

$(A - \lambda_0 E)u_3 = 0$ zkusíme u_3 na něco jiného
nůžeme

$$(A - \lambda_0 E)u_3 = u_2$$

$(A - \lambda_0 E)u_2 = 0$ iterací dle 2

zkusíme u_3 na v_3

$$(A - \lambda_0 E)v_3 = v_2 \neq 0$$

maíme 2 iterace dle 2
nebo

$$(A - \lambda_0 E)v_2 \neq v_1 \neq 0$$

maíme iterací
dle 3

Znam příklad 5

$$\varphi(x) = Ax$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$\lambda_0 = 1$, ml. vektor

$$a(0, 1, 0, 1)^T + b(-2, 0, 3, 0)^T$$

$$z_3 = (1, 0, 0, 0)^T$$

$$(A-E)z_3 = z_2 = (3, 6, -3, 9)^T$$

$$(A-E) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$(A-E)z_2 = (-6, -18, 9, -18) = z_1$$

$$B = (z_1, z_2, z_3, v)$$

$$-18(0, 1, 0, 1)^T + 3(-2, 0, 3, 0)^T$$

$0 \leftarrow z_1 \leftarrow z_2 \leftarrow z_3$ primitive děly 3,

$$(\varphi)_{BB} = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Vannámi: Tabla lsa þokuppraf jinnem hdyri mahice mað
 jrdime' vladu' číto !

$$A = J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & z \end{array} \right)$$

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$d \neq 0 \quad a \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

þar þokuppraf

$$(A - E)^k z \text{ þe nunnara'}$$

rekenina.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

