

Aplikace Jord. kan. tvaru

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

A $n \times n$, na čísel. nebo reáln. vlastních čísel λ_i ,
existuje matice J a P podobná matici A

$$A = P J P^{-1}$$

Aplikace vzorců na \cos , \sin a J se počítá lépe než s Δ .

1. Mocnina matice v JKT

$$a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Pro matice také lze obecně replatit — důvod je, že násobením matic není komutativní

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = \underbrace{A \cdot A}_{A^2} + \underbrace{A \cdot B}_{A \cdot B} + \underbrace{B \cdot A}_{A \cdot B} + \underbrace{B \cdot B}_{B^2}$$

jerklisē $A \cdot B = B \cdot A$ tad $\neq A^2 + 2A \cdot B + B^2$

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A^{n-i} B^i$$

$$A = PJP^{-1} \quad \text{--- } n \text{ mat}$$

$$A^n = \underbrace{(PJP^{-1})}_{E} \underbrace{(PJP^{-1})}_{E} \underbrace{(PJP^{-1})}_{E} \dots \underbrace{(PJP^{-1})}_{E}$$

$$= PJ^n P^{-1}$$

Perhatikan A^n main dari peritak J^n .

$$J_k(\lambda)^m = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{m}{i} \lambda^{m-i} D^i = \lambda^m E + m \lambda^{m-1} D_k + \binom{m}{2} \lambda^{m-2} D_k^2$$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1)^m & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2)^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dots \end{pmatrix} + \dots + \binom{m}{k-1} \lambda^{m-k+1} D_k^{k-1}$$

$$J_k(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^n & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Parāiti: $X(n+1) = A X(n) = A \cdot A X(n-1) = \dots = \underline{A^{n+1}} X(0)$

Diskrētā lin. model

Spojā lin. model

Lineární dif. rovnice $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x'(t) = a x(t)$ $a \in \mathbb{R}$

$$x(0) = x_0$$

Řešení je $x(t) = e^{at} \cdot x_0$

$$(e^{at} x_0)' = a \cdot e^{at} \cdot x_0 = a x(t)$$

Nesnáme počítat $x_1, x_2, \dots, x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots$$

$$x_n' = a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n$$

$x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$x'(t) = A x(t)$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

Řada e^{At} konverguje stejnoměrně na každém intervalu $(a, b) \ni t$

Nyní lze derivovat e^{At} člen po členu

$$(e^{At})' = \left(E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \right)' = E' + (tA)' + \left(\frac{t^2 A^2}{2} \right)' + \dots$$

$$= 0 + A + \frac{2t A^2}{2} + \frac{3t^2 A^3}{3!} + \dots + \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} +$$

$$= A \left(E + tA + \frac{t^2 A^2}{2} + \dots + \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right) = A \cdot e^{At}$$

Exponenciála a matice

str 10

A je matice $n \times n$

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\|e^A\| \leq \|E\| + \|A\| + \left\| \frac{A^2}{2} \right\| + \dots$$

Tato předpisná konverguje

Riešení rovnice $x' = Ax$, kde $x(0) = x_0$

je

$$x(t) = e^{At} x_0$$

~~Pro matrici $n \times n$ JKT je načítání hermitovské - představení reálné
normy rozměrné nejmenší Jordanovy formy ($l \times l$)~~

$$\cancel{e^{Jt} = E +}$$

Použití s exponenciálou $a, b \in \mathbb{R}$ $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Pro matice která obecně neplatí, ale platí:

Jedliže $AB = BA$, pak $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$

Důvodem je lineární nika.

Pöytäme per Jordan. muoto $J_k(\lambda) = \lambda E + D_k$

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda Et} \cdot e^{tD_k} = \left(E + \lambda t E + \frac{\lambda^2 t^2 E^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^s t^s E^s}{s!} + \dots \right)$$

$$\cdot \left(E + tD_k + \frac{t^2 D_k^2}{2} + \frac{t^3 D_k^3}{3!} + \dots + \frac{t^{k-1} D_k^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

$$= E \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^s t^s}{s!} + \dots \right) \left(E + tD_k + \dots \right)$$

$$= e^{\lambda t} \left(E + tD_k + \frac{t^2}{2} D_k^2 + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} D_k^{k-1} \right)$$

Rěšení soustavy $x'(t) = Ax(t)$ $x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{At} x_0 = P e^{Jt} P^{-1} x_0$$

↑
toto již víme

Příklad lude ve crčnick
(příklad 8)

Dihlas Jordanovej vety

Ma' dva kroky

① Definice lineárných podprostorů R_{λ_i} pro operátor φ splňující předpoklady Jord. vety a dihlas se

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

$$\varphi: U \rightarrow U$$

Definice herimovského podprostoru

λ_i je vlastní číslo operátoru $\varphi : U \rightarrow U$

Vlastní podprostor $\ker(\varphi - \lambda_i \text{id})$

Kořenový podprostor $R_{\lambda_i} = \left\{ u \in U, \exists k \in \mathbb{N} \quad (\varphi - \lambda_i \text{id})^k(u) = 0 \right\}$

Root

Vlastnosti hermitovského podprostoru

① R_λ je null. podprostor

② R_λ je invariantní vůči hermitovskému operátoru φ , který komutuje

$$\rho \quad \varphi$$

Dl. $u \in R_\lambda \Rightarrow \exists k \quad (\varphi - \lambda \text{id})^k u = 0.$

Udáváme, že $\varphi(u) \in R_\lambda$:

$$(\varphi - \lambda \text{id})^k \varphi(u) = \varphi (\varphi - \lambda \text{id})^k (u) = \varphi(0) = 0$$

③ $\varphi - \lambda \text{id} \neq 0$ (dve niska'vl. čirka), pač
 $(\varphi - \lambda \text{id}) / R_\lambda : R_\lambda \rightarrow R_\lambda$ je izomorfizmus.

④ $\exists k \forall n \in R_\lambda$ je $(\varphi - \lambda \text{id})^k(n) = 0$.

Dk. Baire R_λ je n_1, n_2, \dots, n_s

$$(\varphi - \lambda \text{id})^{k_i}(n_i) = 0$$

$$\text{Vezme } k = \max \{k_1, k_2, \dots, k_s\}$$