Důkaz Jordanovy věty

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor, který má součet alg. násobností ~~vl~~ vl. čísel = dim U. Pak v U existuje báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

matice v Jord. kanonickém tvaru.

Matice J je určena jednoznačně, až na pořadí buněk.

1. krok λ vl. číslo operátoru φ

$$R_\lambda = \{ u \in U, \exists k \in \mathbb{N}, (\varphi - \lambda id)^k(u) = \vec{o} \}$$

Věta: Za předpokladů Jord. věty je

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k},$$

kde λ_i probíhá přes všechna vlastní čísla.

Direktní součet dvou podprostorů

$$\forall u \in V_1+V_2 \ \exists!\, v_1 \in V_1 \ \exists!\, v_2 \in V_2 \quad u = v_1+v_2 \iff \begin{cases} V_1 \oplus V_2 = V_1 + V_2 = \{v_1+v_2 \in U,\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \\ V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \end{cases}$$

Součet V_1+V_2 je direktní, právě když $\underset{V_1}{v_1} + \underset{V_2}{v_2} = \vec{0} \implies v_1 = v_2 = \vec{0}$

Součet podprostorů $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ je direktní $(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k)$, jestliže

$$\forall v_i \in V_i \qquad v_1 + v_2 + \dots + v_k = \vec{0} \Longrightarrow v_1 = v_2 = \dots = v_k = \vec{0}.$$

K důkazu věty: Dokážeme indukcí, že součet

$$R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_k}$$

je direktní. Indukce podle k.

$k = 1$ $\qquad R_{\lambda_1}$ je triviální direktní součet

Nechť součet $R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní. Dokažme, že

$$R_{\lambda_1}+\dots+R_{\lambda_{k-1}}+R_{\lambda_k}$$

je direktní. $v_i \in R_{\lambda_i}$

Nechť $v_1+v_2+\dots+v_{k-1}+v_k=\vec{o}$. Vezmeme maximum l takové, že

$(\varphi-\lambda_k\,id)^l(v_k)=\vec{o}$. Aplikujme $(\varphi-\lambda_k\,id)^l$ na rovnici.

$$\underbrace{(\varphi-\lambda_k\,id)^l v_1}_{\substack{w_1\\ \Uparrow\\ R_{\lambda_1}}}+\dots+\underbrace{(\varphi-\lambda_k\,id)^l v_{k-1}}_{\substack{w_{k-1}\\ \Uparrow\\ R_{\lambda_{k-1}}}}+\vec{o}=\vec{o}$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} = \vec{0} \qquad u_i \in R_{\lambda_i}$$

Z ind. předpokladu plyne, že

$$u_1 = u_2 = \dots = u_{k-1} = 0.$$

$\varphi - \lambda_k \mathrm{id}$ je izomorfismus na každém R_{λ_i}, $i = 1, 2, \dots k-1$

Proto i $(\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^\ell$ je izo na R_{λ_i}, proto z $u_i = (\varphi - \lambda_k \mathrm{id})^\ell v_i = 0$

plyne $v_i = \vec{0}$.

Dokázali jsme, že $v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = \vec{0} \Rightarrow v_k = \vec{0}$.

Nyní dokážeme, že $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_k} = U$.

<u>Pomocná věta:</u> V U existuje báze B taková, že

$$(\varphi)_{B,B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & & & & \\ & \lambda_1 & b_{23} & & * & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & 0 & & & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad}_{s}$$

Odtud dokážeme, že

$\dim R_{\lambda_1} \geq$ alg. nás. $\lambda_1 = s$

$B = (u_1, \dots u_s, \dots\dots)$

Tvrzení $u_1, u_2, \dots u_s \in R_{\lambda_1}$

$$\Big((\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(u_1)\Big)_B = \Big((\varphi)_{B,B} - \lambda_1 E\Big)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})u_1 = \vec{0}$$

$$\boxed{\big(\varphi(u)\big)_B = (\varphi)_{B,B}\,(u)_B}$$

$$\Big((\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^2(u_2)\Big)_B = \Big((\varphi)_{B,B} - \lambda_1 E\Big)$$

$$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^2(u_2) =$$

$$= (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})(b_{12}u_1) =$$

$$= 0$$

$$(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^3(u_3) = (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^2(b_{12}u_1 + b_{23}u_2) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Platí $\dim R_{\lambda_i} \geq$ alg. nás. λ_i

$$\dim\left(R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim R_{\lambda_i} \geq \sum_{i=1}^{k} \text{alg. nás. } \lambda_i$$

$$= \dim U$$

$$\left.\begin{array}{l} R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} \subseteq U \\ \dim\left(R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}\right) \geq \dim U \end{array}\right\} \Rightarrow R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U.$$

Kvocient vekt. prostoru

U vekt. prostor a V jeho podprostor. Definujeme množinu

$$U/V = \{u+V \,;\, u \in U\} \qquad u_1+V = u_2+V \Leftrightarrow u_1-u_2 \in V$$

$$u_1 \sim u_2 \Leftrightarrow u_1-u_2 \in V$$

$$= U/\sim \quad \text{množina tříd ekvivalence}$$

$$(u_1+V)+(u_2+V) \underset{\text{def}}{:=} (u_1+u_2)+V \quad \text{nezávisí na tj. na } u_1 \text{ a } u_2$$

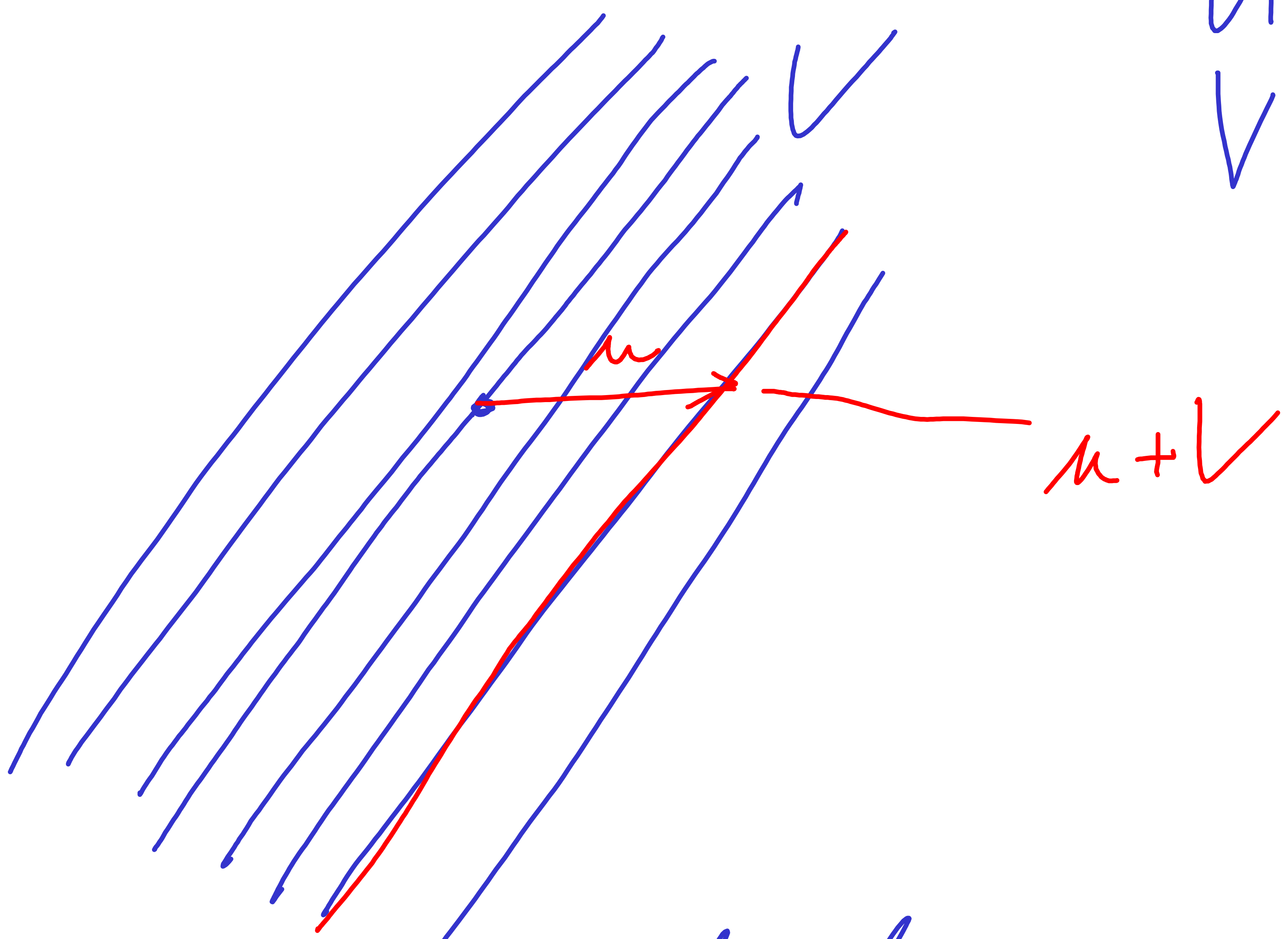
$$a \in K \quad a\cdot(u+V) \underset{\text{def}}{:=} au+V \quad \text{——} // \text{——}$$

Množina U/V s operacemi $+$ a násobení skalárem je vekt. prostor. (Nulový prvek je $0+V=V$.)

$U=\mathbb{R}^2$

V 1. dim. podprostor

$\varphi: U\to U$ a V je invariantní podprostor $\varphi(V)\subseteq V$.



Můžeme definovat

$$\tilde{\varphi}: U/V \to U/V$$

$$\tilde{\varphi}(u+V) :=_{\text{def}} \varphi(u)+V$$

$\tilde{\varphi}$ je lineární

nezávisí na volbě reprezentanta u

Důkaz pomocné věty indukcí podle dimenze. Předp. že platí pro dim $= n-1$.

$\varphi: U \to U$ má vl. čísla λ_1 a vlastní vektor u_1

Uvažujme podprostor $[u_1]$. $\dim U = n$

Vezmeme prostor $U/_{[u_1]}$, který má dimenzi $n-1$.

Pro něj a $\hat{\varphi}: U/_{[u_1]} \to U/_{[u_1]}$ věta platí.

Vezmeme bázi $\alpha = (u_1, v_2, \dots, v_n)$ prostoru U

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Char. polynom φ je $(\lambda_1 - \lambda) \cdot \det(C - \lambda E)$

V $U/_{[u_1]}$ máme bázi $\tilde{\beta} = (v_2 + [u_1], v_3 + [u_1], \ldots v_n + [u_1])$

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}} = C \qquad C = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \cdots \\ c_{32} & \cdots & \cdots \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}(v_2 + [u_1]) = \varphi(v_2) + [u_1] = c_{22} v_2 + c_{32} v_3 + \dots + [u_1]$$

Char. polynom $\tilde{\varphi}$ je $\det(C - \lambda E)$ … má $n-1$ kořenů včetně násobností $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}$ splňuje předpoklady.

Existuje báze $\tilde{\beta} = (u_2+[u_1], \ldots, u_n+[u_1])$ prostoru $U/[u_1]$.

$$(\tilde{\varphi})_{\tilde{\beta},\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \\ 0 & \lambda_1 & * & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & , & \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{2. KROK}}$

Nilpotentní operátor $\psi : U \to U$ je lin. operátor takový, že existuje $l \in \mathbb{N}$, že

$$\psi^l = 0.$$

Z předchozího víme, že pro $\varphi : U \to U$ je

$$\varphi - \lambda_i \, id\Big|_{R_{\lambda_i}} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$$

nilpotentní operátor.

Cyklický operátor $\psi : V \longrightarrow V$ je takový operátor, že ve V existuje báze tvořená řetězcem pro vlastní číslo 0 operátoru ψ

Ve V je báze $B = (v_1, v_2, \dots v_n)$ taková, že

$$\vec{o} \longleftarrow v_1 \xleftarrow{\psi} v_2 \xleftarrow{\psi} v_3 \cdots\cdots \xleftarrow{\psi} v_n$$

$$[\psi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = J_n(0)$$

<u>Věta:</u> Nechť $\psi : V \to V$ je nilpotentní. Pak existují invariantní podprostory $V_j \subset V$, že

(1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_p$

(2) $\psi / V_i : V_i \to V_i$ je cyklický

<u>Důsledek</u> $B_1, B_2, \dots B_p$ cyklické báze ve $V_1, V_2, \dots V_p$. Potom pro $B = (B_1, B_2, \dots B_p)$ bázi V platí

Důkaz věty o nilpotentním operátoru

$\varphi^{s} = 0$ na V

$\varphi^{s-1} \neq 0$ na V

$$0 = \operatorname{im} \varphi^{s} \subseteq \operatorname{im} \varphi^{s-1} \subseteq \operatorname{im} \varphi^{s-2} \;\ldots\ldots\; \operatorname{im} \varphi \subseteq \operatorname{im} \varphi^{0} = V$$

$$0 = P_s \subsetneq P_{s-1} \subsetneq P_{s-2} \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = V$$

$$P_3 = P_2 \;/\; \varphi$$

$$P_4 = P_3$$

Vybereme bázi P_{s-1} : $\quad e_1^{s-1} \quad e_2^{s-1} \quad \dots \quad e_{l_1}^{s-1}$ $\qquad \psi(e_i^{s-1}) \longrightarrow 0$

$$\begin{array}{ccccc} & e_1^{s-1} & e_2^{s-1} & \dots & e_{l_1}^{s-1} \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{im}\psi^{s-2} = P_{s-2} & e_1^{s-2} & e_2^{s-2} & \dots & e_{l_1}^{s-2} \end{array}$$

Tvrzení: $e_1^{s-1}, \dots, e_{l_1}^{s-1}, e_1^{s-2}, \dots, e_{l_1}^{s-2}$ jsou lin. nezávislé

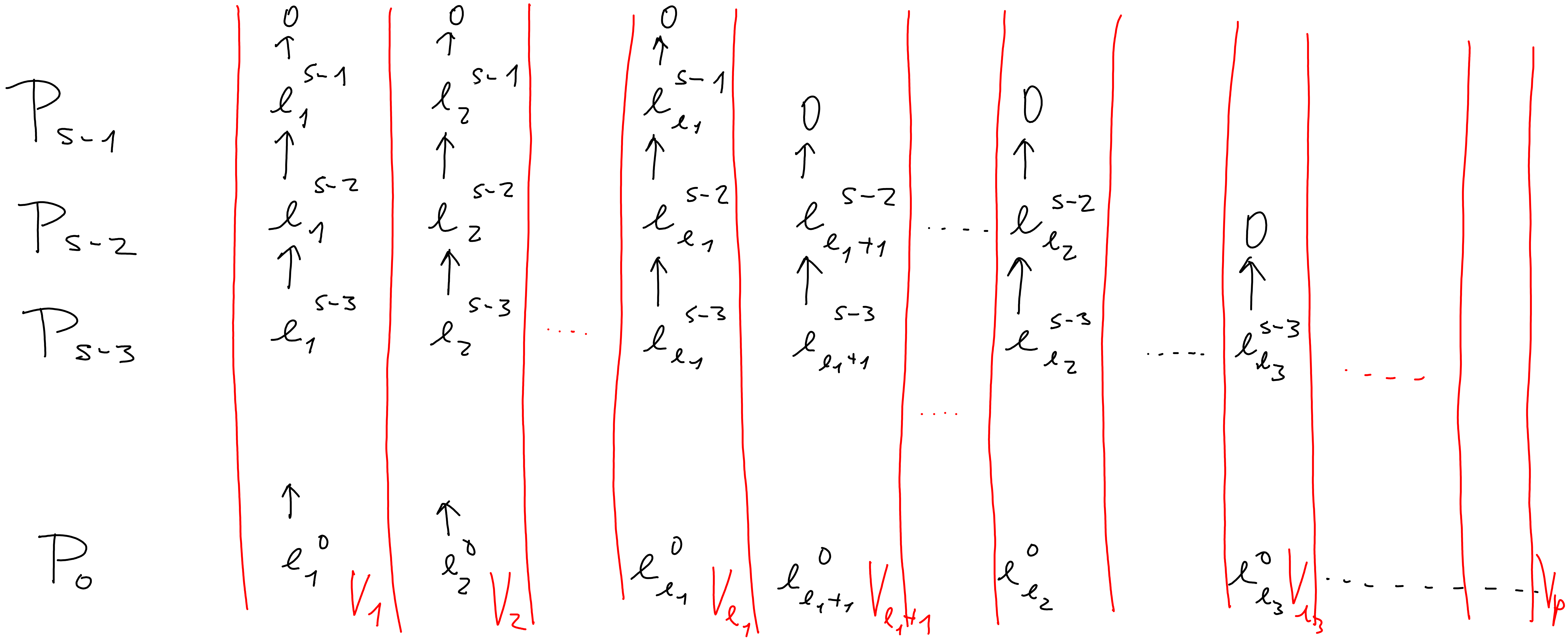
Doplníme tyto vektory do báze celého P_{s-2}

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \sum_{i=1}^{l_1} a_i e_i^{s-1} & & \\ e_1^{s-1} & e_2^{s-1} & e_{l_1}^{s-1} & \uparrow & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ e_1^{s-2} & e_2^{s-2} & e_{l_1}^{s-2} & e_{l_1+1}^{s-2} & \dots & e_{l_2}^{s-2} \end{array}$$

Vektory $e^{s-2}_{l_1+1}$ až $e^{s-2}_{l_2}$ lze modifikovat tak, aby se zobrazovaly operátorem φ na $\vec{O}$!

$$\widetilde{e^{s-2}_{l_1+1}} = e^{s-2}_{l_1+1} - \sum_{i=1}^{l_1} a_i e_i^{s-2}$$

$$\varphi\left(\widetilde{e^{s-2}_{l_1+1}}\right) = \varphi\left(e^{s-2}_{l_1+1}\right) - \sum_{i=1}^{l_1} a_i \cdot \overbrace{\varphi\left(e_i^{s-2}\right)}^{e_i^{s-1}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{l_1} a_i e_i^{s-1} - \sum_{i=1}^{l_1} a_i e_i^{s-1}}_{=\vec{0}}$$



P_{s-1}
P_{s-2}
P_{s-3}
P_0
0
l_1^{s-1}
l_1^{s-2}
l_1^{s-3}
l_1^0
V_1
l_2^{s-1}
l_2^{s-2}
l_2^{s-3}
l_2^0
V_2
$l_{l_1}^{s-1}$
$l_{l_1}^{s-2}$
$l_{l_1}^{s-3}$
$l_{l_1}^0$
V_{l_1}
$l_{l_1+1}^{s-2}$
$l_{l_1+1}^{s-3}$
$l_{l_1+1}^0$
V_{l_1+1}
$l_{l_2}^{s-2}$
$l_{l_2}^{s-3}$
$l_{l_2}^0$
$l_{l_3}^{s-3}$
$l_{l_3}^0$
V_{l_3}
V_p

$e_1^{s-1}\; e_1^{s-2}\; e_1^{s-3} \; \dots \; e_1^{0}$ je cyklická báze V_1 pro $\psi|V_1 : V_1 \to V_1$.

Velikosti a počty bloků JKT nezávisí na volbě báze:

Počet bloků velikosti s je $l_1 = \dim P_{s-1} = \dim \operatorname{im} \psi^{s-1}$

Počet bloků velikosti $s-1$ je $l_2 - l_1 = \dim P_{s-2} - 2 \dim P_{s-1}$

Počet bloků velikosti $s-2$ je $l_3 - l_2 = \underbrace{\dim P_{s-3}} - 2 \dim P_{s-2} + \dim P_{s-1}$

$$l_1 + l_2 + l_3 - 2(l_1 + l_2) + l_1$$

$$= l_3 - l_2$$

$$= \cancel{l_1 + l_1 + l_1 + l_2 + l_2 + l_3 - 2(l_1 + l_1 + l_2) + l_1} =$$

$$(\psi)_{B,B} = \begin{pmatrix} J_{\dim V_1}(0) & & & 0 \\ & J_{\dim V_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\dim V_p}(0) \end{pmatrix}$$

Odtud plyne důkaz Jord. věty (existenční část)

Předchozí aplikujeme postupně na operátory

$$(\varphi - \lambda_i \, id)|_{R_{\lambda_i}} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$$